JAWABAN SOAL UAS KALKULUS II SEMESTER GENAP 2018-2019

SOAL #1

(SO-a.1, bobot 20%) Tentukan derivatif berarah fungsi $f(x, y)$ pada titik **p** dalam arah **a**.
$f(x, y) = x^3y - y^2z^2$; **p** = (−2, 1, 3); **a** = **i** − 2**j** + 2**k**.

Catatan IST: fungsi $f(x, y)$ seharusnya fungsi $f(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = x^3y - y^2z^2$.

Vektor satuan $\boldsymbol{u}$ dalam arah **a**: $\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$

Derivatif fungsi $f(x,y,z)$ di titik **p** = (-2,1,3):

$f_x(x, y, z) = 3x^2y \implies f_x(-2,1,3) = 12$

$f_y(x, y, z) = x^3 - 2yz^2 \implies f_x(-2,1,3) = -26$

$f_z(x, y, z) = -2y^2z \implies f_x(-2,1,3) = -6$

Derivatif berarah fungsi $f(x,y,z)$ di titik **p** = (-2,1,3) dalam arah **a** = $\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{D_u} f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{p})$

$\boldsymbol{D_u} f(x, y, z) = u_1 f_x(x, y, z) + u_2 f_y(x, y, z) + u_3 f_z(x, y, z)$

$\boldsymbol{D_u} f(-2,1,3) = \frac{1}{3}(12) - \frac{2}{3}(-26) + \frac{2}{3}(-6) = \dfrac{12 + 52 - 12}{3} = \dfrac{52}{3} = 17\frac{1}{3}$

SOAL #2

(SO-a.2, bobot 20%) Temperatur (dalam °C) sebuah pelat metal dinyatakan dalam persamaan $T(x, y) = 4 + 2x^2 + y^3$. Dalam persamaan itu, x dan y adalah posisi (koordinat) dalam satuan meter. Temukan laju perubahan temperatur terhadap jarak (dalam satuan °C/m) jika seseorang bergerak dari koordinat (3,2) dalam arah sumbu-y.

Laju perubahan temperatur terhadap jarak dalam arah sumbu y: $\partial T/\partial y = T_y(x, y)$

$T_y(x, y) = 3y^2 \implies T_y(3,2) = 3(2)^2 = 12\text{°C/m}$

SOAL #3

(SO-a.3, bobot 20%) Sebuah supermarket akan membangun gudang penyimpanan dengan bentuk mendekati balok. Gudang tersebut dirancang agar mampu menampung barang dengan volume 1000 m³. Biaya yang diperlukan untuk membuat atap adalah 1,2 juta rupiah/m², lantai 1,8 juta rupiah/m², dan dinding 1,5 juta rupiah/m². Tentukan biaya minimal yang harus disediakan untuk membangun gudang tersebut.

Volume gudang, $V(x, y, z) = xyz = 1000\ \text{m}^3 \implies z = 1000/xy\ \ \text{m}$

Luas atap = $xy\ \text{m}^2$

Luas lantai = $xy\ \text{m}^2$

Luas dinding = $2xz + 2yz = (2000/y + 2000/x)\ \text{m}^2$

Biaya pembangunan gudang supermarket:

$B(x, y) = 1.2xy + 1.8xy + 1.5(2000/y + 2000/x)$ juta rupiah

$B(x, y) = 3xy + 3000/y + 3000/x$ juta rupiah

$B_x(x, y) = 3y - 3000/x^2$ untuk $B_x(x, y) = 0 \implies 3y - 3000/x^2 = 0$

$B_y(x, y) = 3x - 3000/y^2$

untuk $B_x(x, y) = 0 \implies 3y - 3000/x^2 = 0 \implies 3xy - 3000/x = 0$

untuk $B_y(x, y) = 0 \implies 3x - 3000/y^2 = 0 \implies 3xy - 3000/y = 0$

Dari kedua persamaan di atas dan dengan teknik subsitusi, diperoleh $y = x$ sehingga:

$3x - 3000/x^2 = 0 \implies x^3 = 1000 \implies x = 10$ m dan $y = 10$ m

$B_{xx}(x, y) = 6000/x^2 \implies B_{xx}(10,10) = 60$

$B_{yy}(x, y) = 6000/y^2 \implies B_{yy}(10,10) = 60$

$B_{xy}(x, y) = 3$

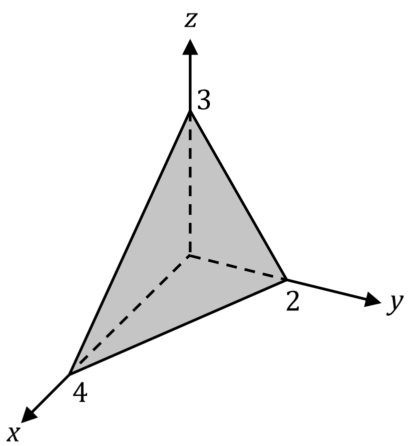
$D = B_{xx}(x, y)B_{yy}(x, y) - B_{xy}(x, y)B_{xy}(x, y) \implies D(10,10) = 60(60) - 3(3) > 0$

Karena $D(10,10) > 0, B_{xx}(10,10) > 0, B_{yy}(10,10) > 0$, maka $B(10,10)$ adalah minimum. Dengan demikian, biaya minimum pembangunan gudang adalah:

$B(10,10) = 3(10)(10) + 3000/10 + 3000/10 = 900$ juta rupiah.

SOAL #4

(SO-a.1, a.2 bobot 20%) Gambarlah sketsa suatu bidang empat (tetrahedron) pada oktan pertama yang dibatasi oleh sumbu-sumbu koordinat dan bidang $3x + 6y + 4z - 12 = 0$. Tentukan juga volume benda tersebut dengan menggunakan integral.



$3x + 6y + 4z - 12 = 0 \implies z = 3 - \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}x$

Titik-titik potong fungsi dengan sumbu koordinat:

$x = 0, y = 0 \implies z = 3$

$z = 0, x = 0 \implies y = 2$

$z = 0, y = 0 \implies x = 4$

Batas-batas integrasi:

integrasi arah sumbu-z (integrasi di ruang xyz)

$z = 0$ s.d. $z = 3 - \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}x$

integrasi arah sumbu-y (integrasi di bidang xy)

$z = 0 \implies 3x + 6y + 4(0) - 12 = 0 \implies 3x + 6y = 12 \implies y = 2 - \frac{1}{2}x$

$y = 0 \text{ s.d. } y = 2 - \frac{1}{2}x$

integrasi arah sumbu-x (integrasi di bidang xy)

$x = 0 \text{ s.d. } x = 4$

$$\text{Volume} = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{2-\frac{1}{2}x} \int_{z=0}^{3-\frac{3}{2}y-\frac{3}{4}x} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

$$\text{Volume} = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{2-\frac{1}{2}x} \left(3 - \tfrac{3}{2}y - \tfrac{3}{4}x\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{4} \left(3y - \tfrac{3}{4}y^2 - \tfrac{3}{4}xy\right)\Big|_{y=0}^{2-\frac{1}{2}x} \mathrm{d}x$$

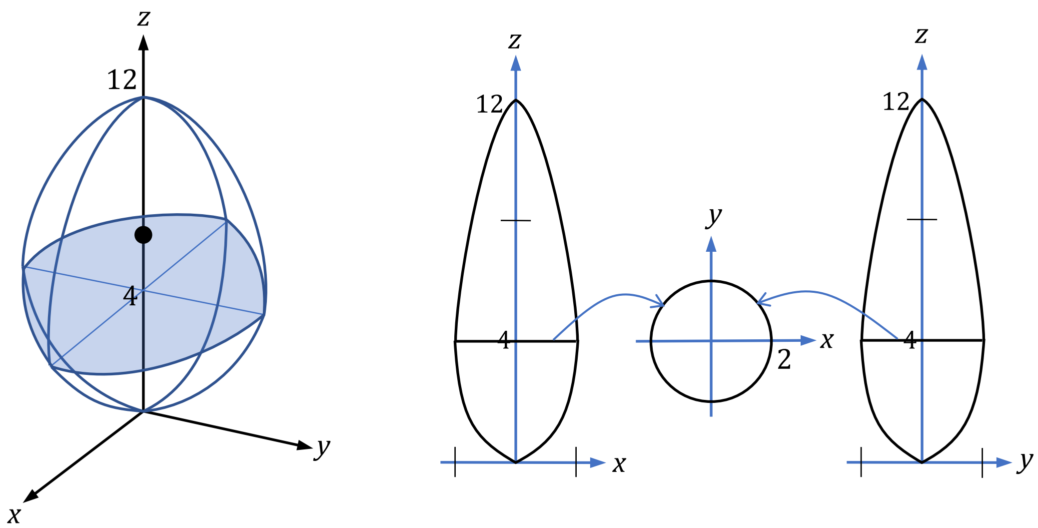
$$\text{Volume} = \int_{x=0}^{4} \left(3\left(2 - \tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{3}{4}\left(2 - \tfrac{1}{2}x\right)^2 - \tfrac{3}{4}x\left(2 - \tfrac{1}{2}x\right)\right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{4} \left(3 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{16}x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$\text{Volume} = \left(3x - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{3}{48}x^3\right)\Big|_{x=0}^{4} = 3(4) - \tfrac{3}{4}(4)^2 + \tfrac{3}{48}(4)^3 = 12 - 12 + 4 = 4$$

SOAL #5

(SO-a.3, bobot 20%) Tentukan koordinat titik pusat massa (x, y, z) suatu benda pejal **homogen** yang dibatasi di atas oleh $z = 12 - 2x^2 - 2y^2$ dan di bawah oleh $z = x^2 + y^2$ menggunakan integral.

Bidang $z = 12 - 2x^2 - 2y^2$ adalah wadah yang membuka ke bawah, simetris terhadap sumbu z, titik puncak di $z = 12$, potongan melintang horizontal berbentuk lingkaran, potongan vertikal berbentuk parabola. Bidang $z = x^2 + y^2$ adalah wadah yang membuka ke atas, simetris terhadap sumbu z, titik nadir di $z = 0$, potongan melintang horizontal berbentuk lingkaran, potongan vertikal berbentuk parabola. Kedua bidang berpotongan di $z = 4$, bentuk potongan adalah lingkaran berdiameter 4.



Perpotongan antara kedua bidang:

$$12 - 2x^2 - 2y^2 = x^2 + y^2 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 + y^2 = 4 \;\;\Rightarrow\;\; z = 4$$

Memperhatikan bentuk benda pejal (gambar di samping kiri), maka persamaan selimut benda ini lebih mudah dinyatakan dalam sistem koordinat silindris (r, θ, z).

$$x = r\cos\theta,\;\; y = r\sin\theta\,,\;\; x^2 + y^2 = r^2$$

$$z = 12 - 2x^2 - 2y^2 \;\Rightarrow\; z = 12 - 2r^2$$

$$z = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; z = r^2$$

Massa benda pejal homogen (rapat massa ρ konstan):

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V \;\;\Rightarrow\;\; m = \rho\iiint \mathrm{d}V = \rho\iiint r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$m = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2}^{12-2r^2} r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\,(z)\big|_{z=r^2}^{z=12-2r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$m = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r(12 - 2r^2 - r^2)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(12r - 3r^3)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$m = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(6r^2 - \tfrac{3}{4}r^4\right)\Big|_{r=0}^{r=2}\,\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[6(2)^2 - \tfrac{3}{4}(2)^4\right]\,\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi} 12\,\mathrm{d}\theta$$

$$m = \rho 12\,(\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \rho 12(2\pi - 0) = 24\rho\pi$$

Momen benda pejal (rapat massa ρ konstan) terhadap bidang *xy*:

$$M_{xy} = \rho\iiint z\,\mathrm{d}V = \rho\iiint z\,r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$M_{xy} = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2}^{12-2r^2} zr\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\tfrac{1}{2}r(z^2)\big|_{z=r^2}^{z=12-2r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$M_{xy} = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\tfrac{1}{2}r[(12 - 2r^2)^2 - r^4]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\tfrac{1}{2}r[144 - 48r^2 + 3r^4]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$M_{xy} = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(72r - 24r^3 + \tfrac{3}{2}r^5\right)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(36r^2 - 6r^4 + \tfrac{3}{12}r^6\right)\Big|_{r=0}^{r=2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$M_{xy} = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\left(36(2)^2 - 6(2)^4 + \tfrac{3}{12}(2)^6\right)\right]\mathrm{d}\theta = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi}(144 - 96 + 16)\,\mathrm{d}\theta$$

$$M_{xy} = \rho\int_{\theta=0}^{2\pi} 64\,\mathrm{d}\theta = \rho\,64\,(\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \rho\,64\,(2\pi) = 128\rho\pi$$

Titik pusat massa:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{128\rho\pi}{24\rho\pi} = \frac{16}{3},\;\; \bar{x} = 0,\;\; \bar{y} = 0$$

Koordinat titik pusat massa adalah: $(z = \bar{z}, x = 0, y = 0) = (16/3\,, 0{,}0)$.