UJIAN AKHIR SEMESTER
METODE NUMERIS I

DR. IR. ISTIARTO, M.ENG. | KAMIS, 8 JUNI 2017 | OPEN BOOK | 150 MENIT

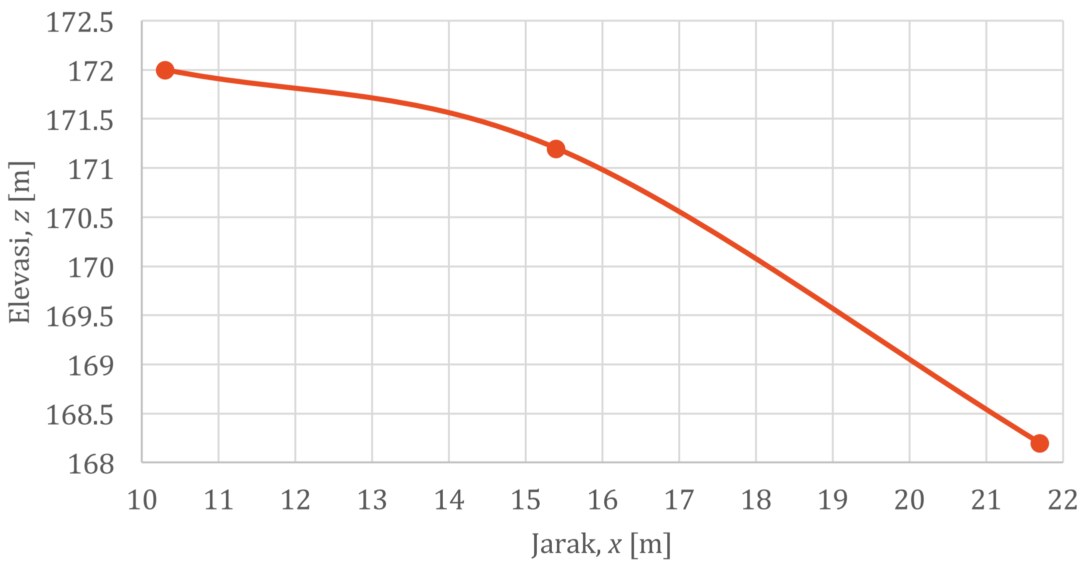
PETUNJUK

1. Saudara <u>tidak boleh</u> menggunakan komputer untuk mengerjakan soal ujian ini.
2. Tuliskan urutan/cara/formula yang Saudara pakai untuk mendapatkan jawaban. Jangan hanya menuliskan tabel angka jawaban.

SOAL 1 [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT NILAI: 25%]

Tabel dan gambar di bawah ini adalah elevasi muka tanah di suatu tebing.

Jarak, *x* [m]	10.3	15.4	21.7
Elevasi, *z* [m]	172.0	171.2	168.2



Cari dan temukan kurva polinomial kuadratik (*second-order polynomial*) melewati ketiga titik data tersebut dengan metode (a) interpolasi Lagrange dan (b) interpolasi Newton. Buat tabel seperti di bawah ini berdasarkan kurva polinomial tersebut.

Jarak, *x* [m]	Elevasi, *z* [m] (Metode Lagrange)	Elevasi, *z* [m] (Metode Newton)
10.3	172.0	172.0
13.15	...	...
16	...	...
18.85	...	...
21.7	168.2	168.2

PENYELESAIAN

Polinomial kuadratik yang merupakan kurva parabolik melewati ketiga titik data pada soal ini, dengan memakai metode Lagrange, dinyatakan dalam persamaan berikut:

$z = f_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$

$$z = f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$z = f_2(x) = \left(\frac{x - 15.4}{10.3 - 15.4}\right)\left(\frac{x - 21.7}{10.3 - 21.7}\right)(172) + \left(\frac{x - 10.3}{15.4 - 10.3}\right)\left(\frac{x - 21.7}{15.4 - 21.7}\right)(171.2)$$
$$+ \left(\frac{x - 10.3}{21.7 - 10.3}\right)\left(\frac{x - 15.4}{21.7 - 15.4}\right)(168.2)$$

Jika memakai metode Newton, maka persamaan kuadratik yang melewati ketiga titik data pada soal ini adalah:

$$z = f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left[\left\{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right\} - \left\{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right\}\right]$$

Koefisien b_0, b_1, dan b_2 dapat diperoleh dengan hitungan tabulasi di bawah ini.

i	x	$z = f(x_i)$	Langkah hitungan ke-1	Langkah hitungan ke-2	
0	10.3	172	-0.1569	-0.0280	$\rightarrow b_0, b_1, b_2$
1	15.4	171.2	-0.4762		
2	21.7	168.2			

Dengan demikian, persamaan kuadratik yang melewati ketiga titik data adalah:

$$z = f_2(x) = 172 - 0.1569(x - 10.3) - 0.0280(x - 10.3)(x - 15.4)$$

Dengan dua persamaan polinomial kuadratik tersebut, maka tabel pada soal dapat dilengkapi menjadi sebagai berikut:

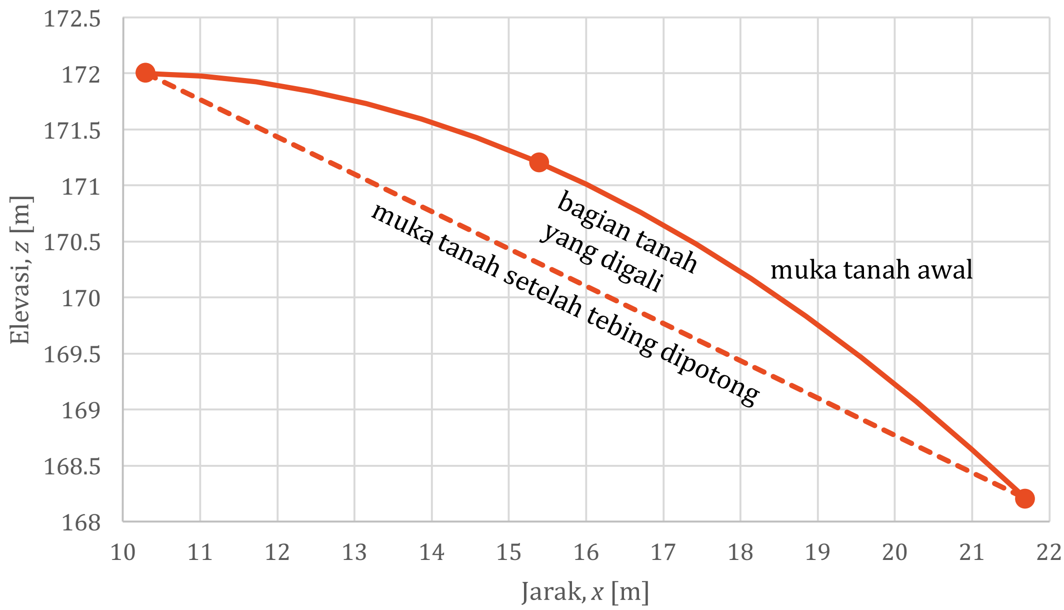
Jarak, x [m]	Elevasi, z [m] (Metode Lagrange)	Elevasi, z [m] (Metode Newton)
10.3	172.0	172.0
13.15	171.7	171.7
16	171.0	171.0
18.85	169.8	169.8
21.7	168.2	168.2

SOAL 2 [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT NILAI: 25%]

Tebing pada Soal 1 akan dipotong mengikuti garis lurus yang menghubungkan titik (10.3,172.0) ke titik (21.7,168.2). Gunakan tabel hasil interpolasi pada Soal 1 beserta (a) metode integrasi Kuadratur Gauss dan (b) metode integrasi Simpson 1/3 untuk menghitung dan menemukan volume galian tanah.

PENYELESAIAN

Profil muka tanah di tebing pada Soal 1 dapat digambar dengan memakai persamaan polinomial yang merupakan kurva interpolasi ketiga titik data muka tanah. Gambar berikut ini adalah hasil plot kurva interpolasi melewati ketiga titik data. Garis putus-putus pada gambar adalah profil muka tanah setelah tebing dipotong. Volume galian tanah adalah volume tanah di antara profil muka tanah awal dan profil muka tanah setelah tebing dipotong. Jika lebar tebing tegak lurus bidang gambar adalah 1 meter, maka volume tanah galian dapat diketahui dengan menghitung selisih luas di bawah profil muka tanah awal dan luas di bawah profil muka tanah setelah pemotongan tebing. Luas di bawah profil muka tanah dihitung dengan cara integrasi numeris.



Integrasi Numeris Metode Kuadratur Gauss. Dalam metode ini, variabel x diubah menjadi variabel x_d. Hubungan kedua variabel adalah sebagai berikut:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\mathrm{d}x_d$$

Dalam hubungan di atas, a dan b adalah batas integrasi, yaitu a = 10.3 dan b = 21.7. Dengan memakai persamaan kuadratik yang diperoleh dari interpolasi metode Newton, maka luas di bawah profil muka tanah tebing dihitung dengan integrasi numeris berikut:

$$x = \frac{(21.7+10.3)+(21.7-10.3)x_d}{2} = 16+5.7x_d$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\mathrm{d}x_d = 5.7\mathrm{d}x_d$$

$$\int_{10.3}^{21.7} \{172-0.1569(x-10.3)-0.0280(x-10.3)(x-15.4)\}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \{172-0.1569(16+5.7x_d-10.3)$$

$$-0.0280(16+5.7x_d-10.3)(16+5.7x_d-15.4)\}\,5.7\mathrm{d}x_d$$

$$= f\left(x_d=-1/\sqrt{3}\right)+f\left(x_d=1/\sqrt{3}\right) = 979.2801+966.7759$$

$$= 1946.0560\ [\mathrm{m}^2]$$

Luas tanah di bawah profil muka tanah setelah dipotong dapat dihitung dengan mudah karena bentuk bangun profil tanah tersebut adalah trapesium.

$\text{Luas trapesium} = (21.7 - 10.3)(172 + 168.2)/2 = 1939.14\ [\text{m}^2]$

Dengan demikian, volume galian tanah per satuan lebar tegak lurus bidang gambar adalah:

$\text{Vol.} = 1946.0560 - 1939.14 = 6.9160\ [\text{m}^3/\text{m}]$

Integrasi Numeris Metode Simpson 1/3. Tabel koordinat titik-titik pada penyelesaian Soal 1 memiliki 5 titik berjarak seragam. Metode integrasi Simpson 1/3 dapat diterapkan untuk menghitung luas di bawah profil muka tanah tebing. Menurut metode Simpson 1/3, luas atau integral di bawah kurva adalah:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} = \frac{\Delta x}{3}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}$$

Hitungan disajikan pada tabel di bawah ini.

i	x	$f(x)$	Δx	I
0	10.3	172.0		
1	13.15	171.7	2.85	978.4433
2	16	171.0		
3	18.85	169.8	2.85	967.6133
4	21.7	168.2		
				1946.0566

Volume galian tanah per satuan lebar tegak lurus bidang gambar adalah:

$\text{Vol.} = 1946.0566 - 1939.14 = 6.9166\ [\text{m}^3/\text{m}]$

Soal 3 [CP: a.1, a.2, a.3, k.1; Bobot Nilai: 25%]

Kecepatan laju kereta api dalam 8 detik pertama sejak saat mulai bergerak dari posisi berhenti dinyatakan dengan persamaan matematis di bawah ini:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5e^{0.5t} - 0.8x$$

Dalam persamaan tersebut, v adalah kecepatan laju kereta api dalam satuan meter per detik, t adalah waktu dalam selang 0 s.d. 8 detik, dan x adalah jarak dari titik awal dalam satuan meter.

Hitunglah posisi kereta api dari titik awal (x [m]) setiap selang 2 detik (t = 0, 2, 4, 6, 8 [s]) dengan menggunakan (a) metode Ralston (*2nd-order Runge-Kutta*) dan (b) metode poligon (*modified Heun)*.

Penyelesaian

Persamaan kecepatan laju kereta api merupakan persamaan diferensial biasa (ODE), fungsi waktu dan jarak:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) = 5e^{0.5t} - 0.8x \quad (\text{pada saat awal: } t = 0, \text{kereta berhenti: } x = 0)$$

Persamaan tersebut dapat diselesaikan secara numeris untuk mendapatkan jarak sebagai fungsi waktu dengan menggunakan antara lain metode Ralston atau metode poligon.

Metode Ralston. Metode ini termasuk salah satu metode Runge-Kutta orde dua dengan nilai $a_2 = 2/3$, sehingga $a_1 = 1/3$ dan $p_1 = q_{11} = 3/4$. Dengan nilai-nilai ini, maka persamaan diferensial di atas diselesaikan untuk mendapatkan jarak x sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \phi_i h = x_i + \left(\tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{2}{3}k_2\right)h$$

$k_1 = f(t_i, x_i)$

$k_2 = f\left(t_i + \frac{3}{4}h, x_i + \frac{3}{4}hk_1\right)$

Dalam persamaan di atas, h adalah langkah hitung, yaitu selang waktu hitung, $h = \Delta t = 1$ detik.

Tabel di bawah ini menyajikan langkah hitungan penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Ralston.

i	t_i	x_i	k_1	$t_i + ¾h$	$x_i + ¾hk_1$	k_2	ϕ_i	x_{i+1}
0	0	0	5	1.5	7.50	4.59	4.72	9.45
1	2	9.45	6.03	3.5	18.50	13.97	11.33	32.10
2	4	32.10	11.26	5.5	49.00	39.02	29.76	91.63
3	6	91.63	27.12	7.5	132.32	106.75	80.21	252.05
4	8	252.05						

Metode poligon. Persamaan diferensial biasa kecepatan laju kereta api diselesaikan untuk jarak sebagai fungsi waktu dalam dua tahap mengikuti persamaan berikut:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \phi_i \frac{h}{2} = x_i + f(t_i, x_i)\frac{h}{2} = x_i + v_i \frac{h}{2}$$

$$x_{i+1} = x_i + \phi_{i+\frac{1}{2}} h = x_i + f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right) h = x_i + v_{i+\frac{1}{2}} h$$

Hitungan disajikan dalam tabel di bawah ini.

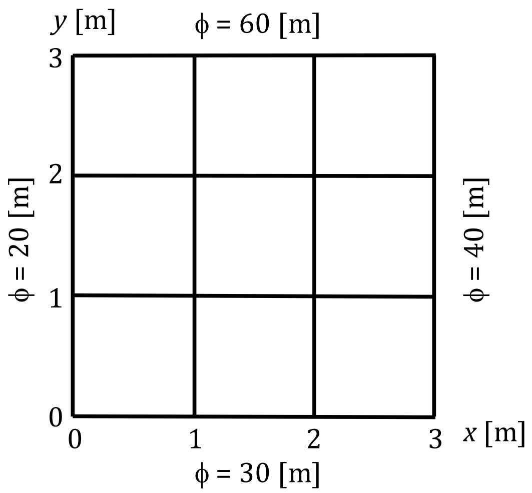
i	t_i	x_i	v_i	$t_{i+½}$	$x_{i+½}$	$v_{i+½}$	x_{i+1}
0	0	0	5	1	5	4.24	8.49
1	2	8.49	6.80	3	15.29	10.18	28.84
2	4	28.84	13.87	5	42.71	26.74	82.33
3	6	82.33	34.57	7	116.89	72.06	226.45
4	8	226.45					

SOAL 4 [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT NILAI: 25%]

Suatu persamaan diferensial parsial eliptik (Persamaan Laplace) yang menggambarkan distribusi energi potensial dinyatakan dalam bentuk di bawah ini:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Dalam persamaan tersebut ϕ adalah tinggi energi potensial dalam satuan meter, x dan y adalah koordinat dalam satuan meter.



Persamaan di atas berlaku di $0 \leq x \leq 3$ dan $0 \leq y \leq 3$.

Gunakan teknik penyelesaian beda hingga (*finite difference approximation*) untuk menghitung tinggi energi potensial di setiap selang $\Delta x = \Delta y = 1$ [m] apabila diketahui syarat batas:

$\phi(0,y) = 20$ [m],

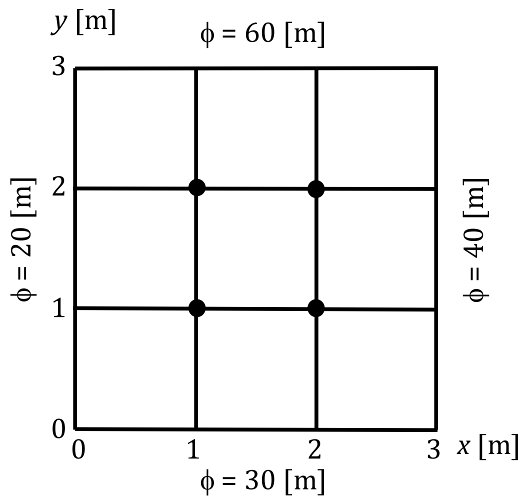
$\phi(3,y) = 40$ [m],

$\phi(x,0) = 30$ [m],

$\phi(x,3) = 60$ [m].

PENYELESAIAN

Tinggi potensial dihitung di 4 titik hitung, yaitu $\phi_{1,1}, \phi_{2,1}, \phi_{1,2}, \phi_{2,2}$ (lihat gambar). Dengan teknik beda hingga (*finite difference approximation*), di setiap titik dapat disusun persamaan yang mengaitkan tinggi potensial di suatu titik dengan tinggi potensial di keempat titik tetangganya.



$$20 + \phi_{2,1} + 30 + \phi_{1,2} - 4\phi_{1,1} = 0$$

$$\phi_{1,1} + 40 + 30 + \phi_{2,2} - 4\phi_{2,1} = 0$$

$$20 + \phi_{2,2} + \phi_{1,1} + 60 - 4\phi_{1,2} = 0$$

$$\phi_{1,2} + 40 + \phi_{2,1} + 60 - 4\phi_{2,2} = 0$$

Dengan pengaturan letak suku-suku pada persamaan di atas, maka diperoleh 4 persamaan aljabar di bawah ini:

$$-4\phi_{1,1} + \phi_{2,1} + \phi_{1,2} + 0\phi_{2,2} = -50$$

$$\phi_{1,1} - 4\phi_{2,1} + 0\phi_{1,2} + \phi_{2,2} = -70$$

$$\phi_{1,1} + 0\phi_{2,1} - 4\phi_{1,2} + \phi_{2,2} = -80$$

$$0\phi_{1,1} + \phi_{2,1} + \phi_{1,2} - 4\phi_{2,2} = -100$$

Keempat persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50 \\ -70 \\ -80 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

Empat persaman di atas dapat diselesaikan dengan berbagai metode penyelesaian persamaan aljabar yang telah Saudara pelajari pada pertemuan sebelum UTS. Di ujian, Saudara dapat memakai metode iteratif, misal metode Jacobi, Gauss-Seidel, atau SOR. Di bawah ini disajikan tabel hitungan iterasi metode Jacobi.

iterasi, n	$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{1,2}$	$\phi_{2,2}$	Δ_{maks}
0	0	0	0	0	-
1	12.5	17.5	20	25	25
2	21.875	26.875	29.375	34.375	9.375
⋮					
19	31.250	36.250	38.750	43.750	7.15×10^{-05}
20	31.250	36.250	38.750	43.750	3.58×10^{-05}

Dalam hitungan iterasi metode Jacobi, setiap persamaan dituliskan dalam bentuk:

$$\phi_{1,1}^{n+1} = \frac{-50 - \phi_{2,1}^{n} - \phi_{2,1}^{n}}{-4} = \frac{50 + \phi_{2,1}^{n} + \phi_{2,1}^{n}}{4}$$

$$\phi_{2,1}^{n+1} = \frac{-70 - \phi_{1,1}^{n} - \phi_{2,2}^{n}}{-4} = \frac{70 + \phi_{1,1}^{n} + \phi_{2,2}^{n}}{4}$$

$$\phi_{1,2}^{n+1} = \frac{-80 - \phi_{1,1}^{n} - \phi_{2,2}^{n}}{-4} = \frac{80 + \phi_{1,1}^{n} + \phi_{2,2}^{n}}{4}$$

$$\phi_{2,2}^{n+1} = \frac{-100 - \phi_{2,1}^{n} - \phi_{1,2}^{n}}{-4} = \frac{100 + \phi_{2,1}^{n} + \phi_{1,2}^{n}}{4}$$

Pada awal iterasi, tinggi potensial di setiap titik hitung diberi nilai nol, $\phi_{i,j}^{0} = 0$. Setelah 20 kali iterasi, diperoleh hitungan konvergen ke nilai-nilai tinggi potensi di setiap titik, yaitu $\phi_{1,1} = 31.25$ [m], $\phi_{2,1} = 36.25$ [m], $\phi_{1,2} = 38.75$ [m], $\phi_{2,2} = 43.75$ [m].

Dalam ujian, Saudara boleh hanya melakukan hitungan sampai 2 atau 3 kali iterasi.

-o0o-