



Universitas Gadjah Mada  
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan  
Prodi Sarjana Teknik Sipil

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

# PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

*Partial Differential Equations – PDE*

# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

2

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

## ❑ Acuan

- ❑ Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
  - Chapter 23 dan 24, hlm. 707-749.

# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- Suatu fungsi  $u$  yang bergantung pada  $x$  dan  $y$ :  $u(x,y)$ 
  - Diferensial  $u$  terhadap  $x$  di sembarang titik  $(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

- Diferensial  $u$  terhadap  $y$  di sembarang titik  $(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$



# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

5

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$(2) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$(3) \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

- ❑ Tingkat (*order*) PDE adalah tingkat tertinggi suku derivatif
- ❑ PDE merupakan fungsi linear apabila
  - ❑ fungsi tsb linear pada  $u$  dan derivatif  $u$ , dan
  - ❑ koefisien persamaan tsb hanya bergantung pada variabel bebas ( $x$  atau  $y$ ) atau konstanta

PDE	Order	Linear
(1)	2	ya
(2)	3	ya
(3)	3	tidak
(4)	2	tidak

# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

6

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D = 0$$

$A, B, C$  : fungsi  $x$  dan  $y$

$D$  : fungsi  $x, y, u, \partial u/\partial x$ , dan  $\partial u/\partial y$

$B^2 - 4AC$	kategori
$< 0$	eliptik
$= 0$	parabolik
$> 0$	hiperbolik

- ❑ PDE yang dibahas pada makul Metode Numeris I hanya PDE linear bertingkat dua
- ❑ PDE linear bertingkat dua dan fungsi dua variabel bebas ( $x, y$ ) dapat dikelompokkan menjadi:
  - ❑ eliptik
  - ❑ parabolik
  - ❑ hiperbolik

# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

7

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>

$B^2 - 4AC$	Kategori	Nama	Persamaan
$< 0$	Eliptik	Persamaan Laplace (permanen, 2D spasial)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabolik	Persamaan konduksi panas (tak-permanen, 1D spasial)	$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$
$> 0$	Hiperbolik	Persamaan gelombang (tak-permanen, 1D spasial)	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

PDE Eliptik (Persamaan Laplace)

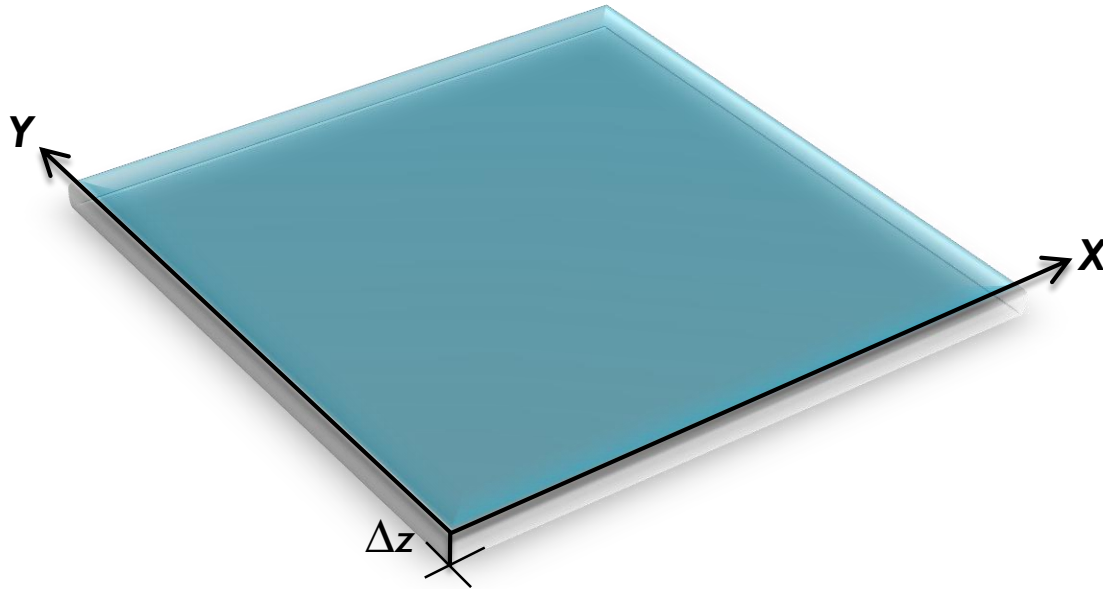
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace



# Persamaan Laplace

9

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

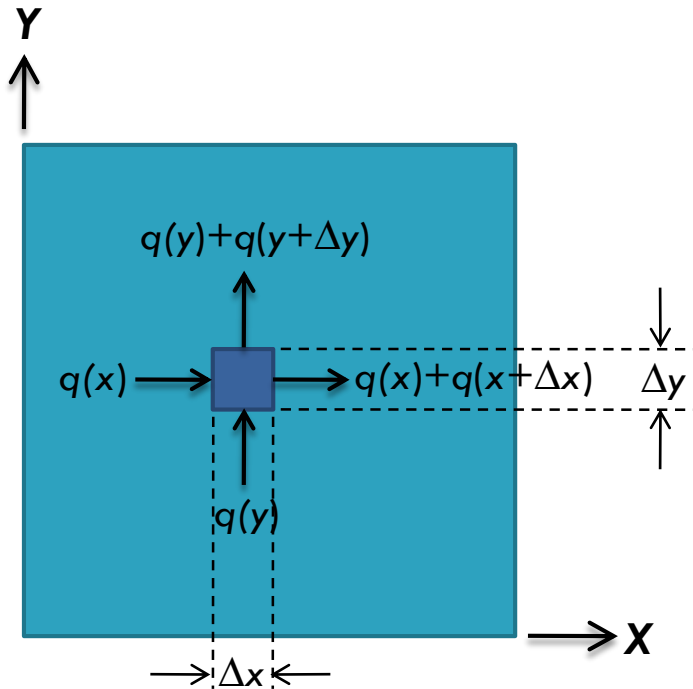


- ❑ Sebuah plat logam persegi tipis
  - ❑ kedua permukaan dilapisi dengan isolator panas
  - ❑ sisi-sisi plat diberi panas dengan temperatur tertentu
  - ❑ transfer panas hanya dimungkinkan pada arah x dan y
- ❑ Ditinjau pada saat transfer permanen telah tercapai (*steady-state condition*)

# Persamaan Laplace

10

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Pada *steady-state condition*, aliran ke dalam sebuah elemen (lihat gambar di samping) selama periode  $\Delta t$  haruslah sama dengan aliran yang keluar dari elemen tsb:

$$q(x) \Delta y \Delta z \Delta t + q(y) \Delta x \Delta z \Delta t =$$

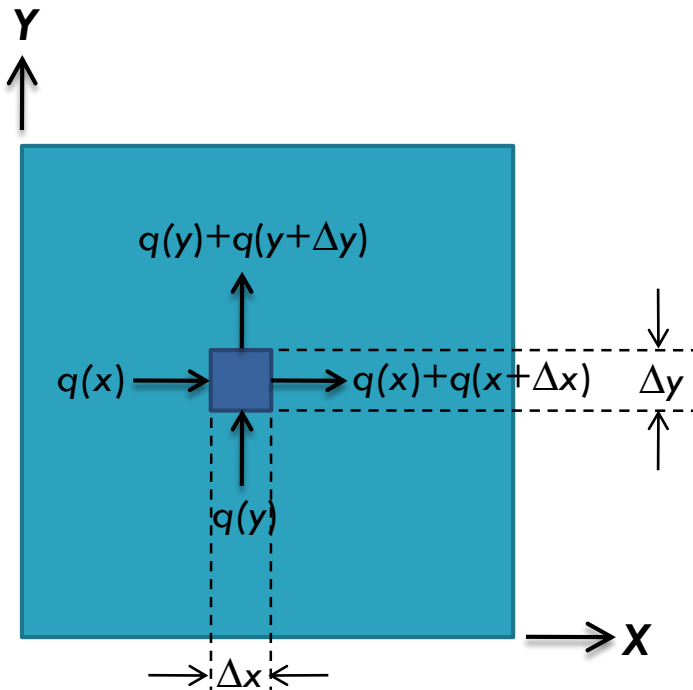
$$q(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \Delta t + q(y + \Delta y) \Delta x \Delta z \Delta t$$

$q(x)$  dan  $q(y)$  berturut-turut adalah fluks panas arah  $x$  dan arah  $y$ , dalam satuan  $\text{kal}/\text{cm}^2/\text{s}$ .

# Persamaan Laplace

11

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Jika semua suku pada persamaan tsb dibagi dengan  $\Delta x \Delta y$ , maka:

$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x = q(x + \Delta x)\Delta y + q(y + \Delta y)\Delta x$$

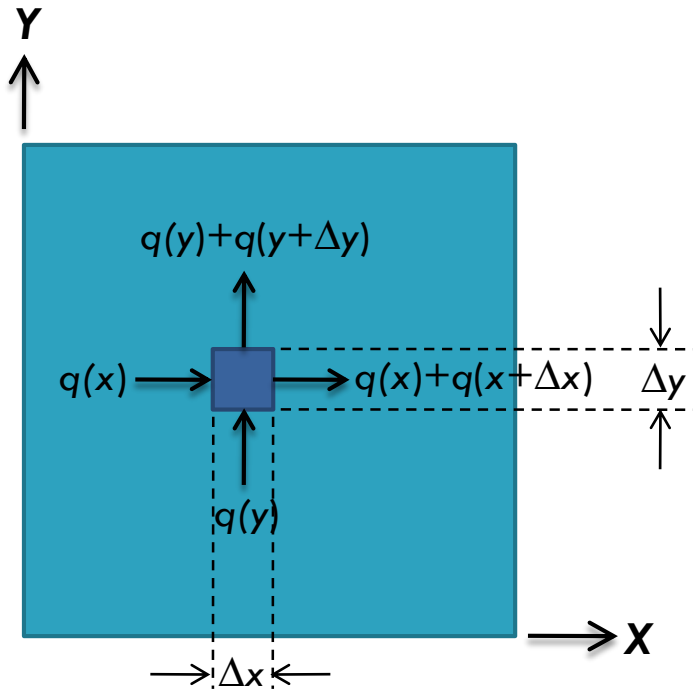
- Pengelompokan suku dan perkalian dengan  $\Delta x/\Delta x$  atau  $\Delta y/\Delta y$  menghasilkan:

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} \Delta y \Delta x = 0$$

# Persamaan Laplace

12

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Pembagian dengan  $\Delta x \Delta y$  menghasilkan:

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} = 0$$

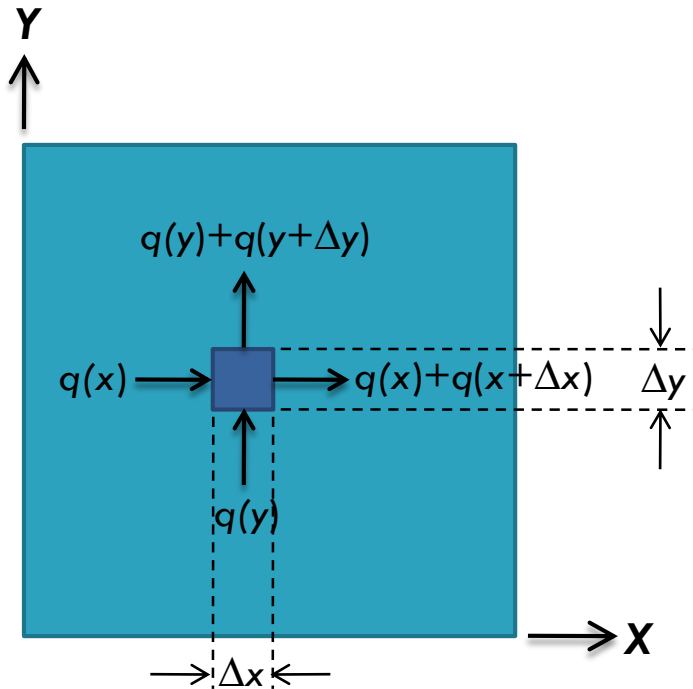
- Mengambil nilai limit persamaan tsb dan memperhatikan definisi diferensial parsial, maka diperoleh:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (\text{persamaan konservasi energi})$$

# Persamaan Laplace

13

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

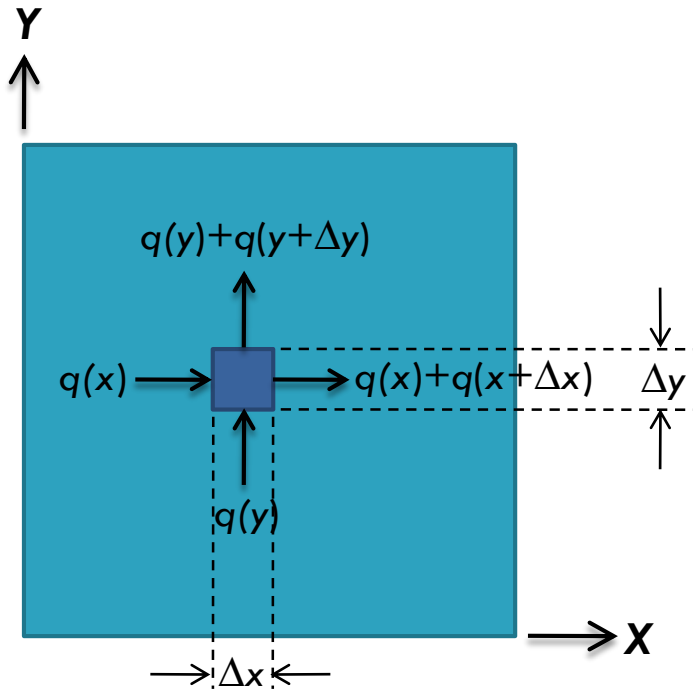
- ❑ Penyelesaian PDE tsb membutuhkan syarat batas fluks panas  $q$ ; padahal syarat batas yang diketahui adalah temperatur  $T$ .
- ❑ Oleh karena itu, PDE di atas diubah menjadi PDE dalam  $T$  dengan menerapkan Hukum Fourier untuk konduksi panas.

$$q_i = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial i} \quad (\text{Fourier's law of heat conduction})$$
$$= -k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

# Persamaan Laplace

14

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



$$q_i = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial i} = -k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

$q_i$  : fluks panas arah  $i$  (kal/cm<sup>2</sup>/s)

$k$  : koefisien difusi thermal (cm<sup>2</sup>/s)

$\rho$  : rapat massa medium (g/cm<sup>3</sup>)

$C$  : kapasitas panas medium (kal/g/°C)

$T$  : temperatur (°C)

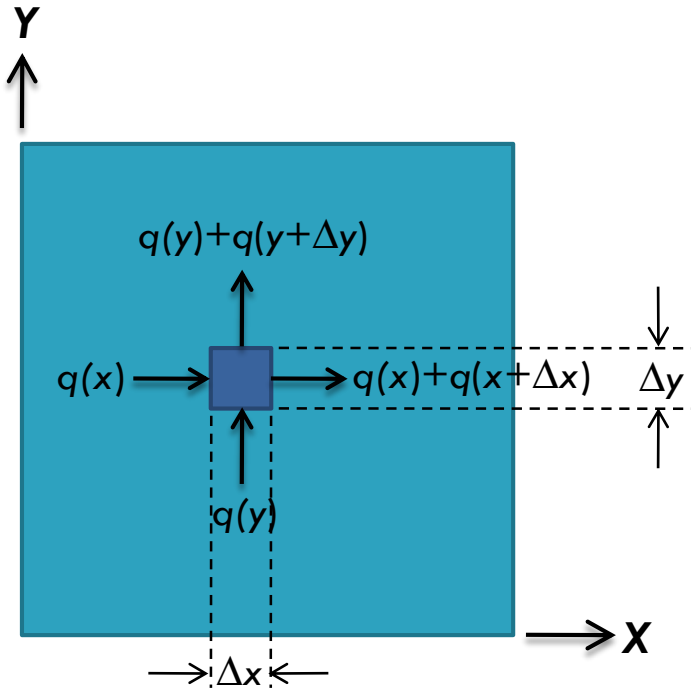
$k'$  : konduktivitas thermal (kal/s/cm/°C)

- Persamaan di atas menunjukkan bahwa fluks panas tegak lurus sumbu  $i$  sebanding dengan gradien/slope temperatur pada arah  $i$ .

# Persamaan Laplace

15

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Dengan memakai Fick's Law, maka persamaan konservasi energi dapat dituliskan sbb.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Persamaan Laplace})$$

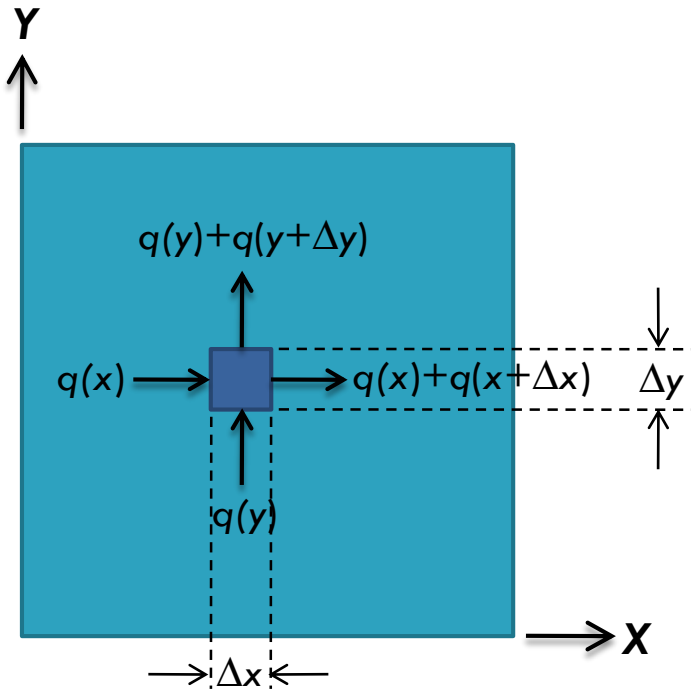
- Jika ada *source* atau *sink*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (\text{Persamaan Poisson})$$

# Persamaan Laplace

16

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Persamaan tsb sama dengan persamaan aliran melalui medium porus (Hukum Darcy).

$$q_i = -K \frac{\partial H}{\partial i}$$

$q_i$  : debit aliran arah  $i$  ( $m^3/m/s$ )

$K$  : konduktivitas hidraulik ( $m^2/s$ )

$H$  : tinggi energi hidraulik (m)

$i$  : panjang lintasan, panjang aliran (m)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$



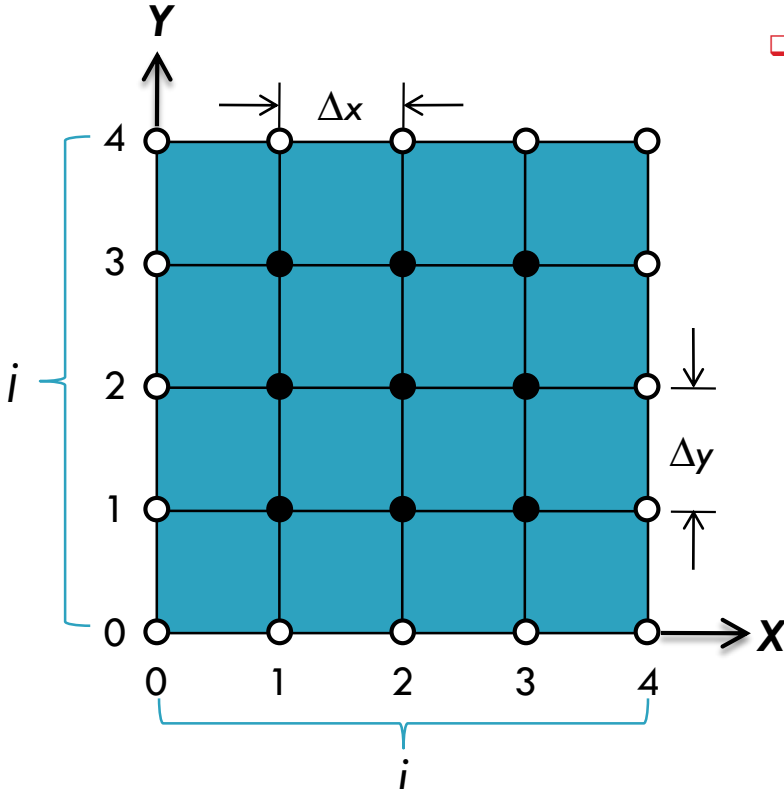
# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- ❑ Penyelesaian persamaan Laplace, dan berbagai PDE di bidang enjiniring, hampir tidak pernah dilakukan secara analitis, kecuali untuk kasus-kasus yang sederhana.
- ❑ Penyelesaian hampir selalu dilakukan dengan cara numeris.
- ❑ Teknik penyelesaian PDE secara numeris
  - ❑ Metode beda hingga (*finite difference approximation, FDA*)
  - ❑ Metode elemen hingga (*finite element method, FEM*)
  - ❑ Metode volume hingga (*finite volume method, FVM*)

# Finite Difference Approach – FDA

18

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



## Langkah pertama dalam FDA

- Domain fisik plat persegi dibagi menjadi sejumlah pias atau grid titik-titik diskrit.
- PDE Laplace diubah menjadi persamaan beda hingga di setiap titik hitung  $(i,j)$ .
- Di titik hitung interior (simbol bulat hitam):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

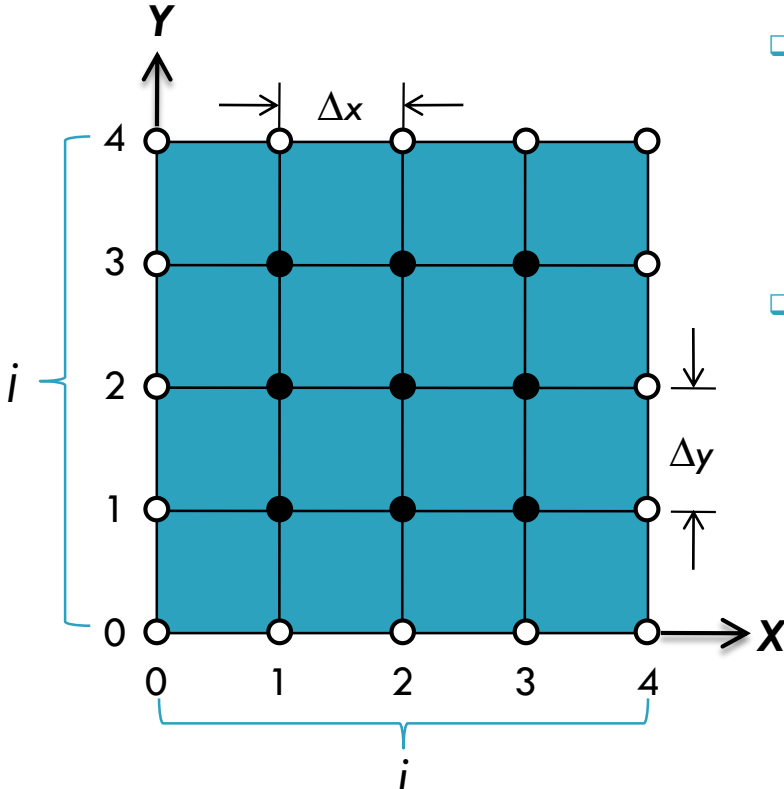
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- diferensi tengah (*central difference*)
- error =  $O[(\Delta x)^2]$  &
- error =  $O[(\Delta y)^2]$

# Finite Difference Approach – FDA

19

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



- Persamaan Laplace dalam bentuk beda hinga:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

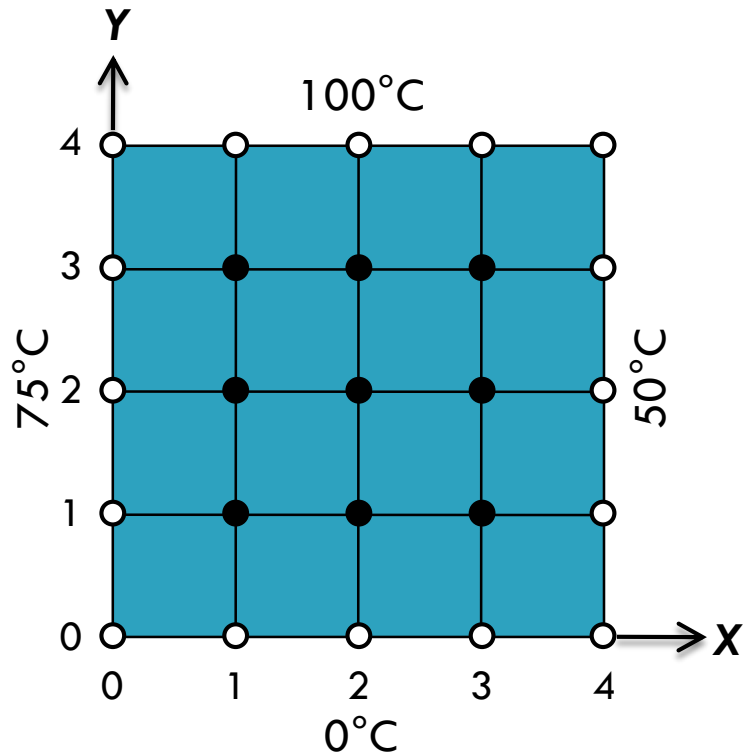
- Jika ukuran grid seragam,  $\Delta x = \Delta y$ , maka:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

# Finite Difference Approach – FDA

20

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

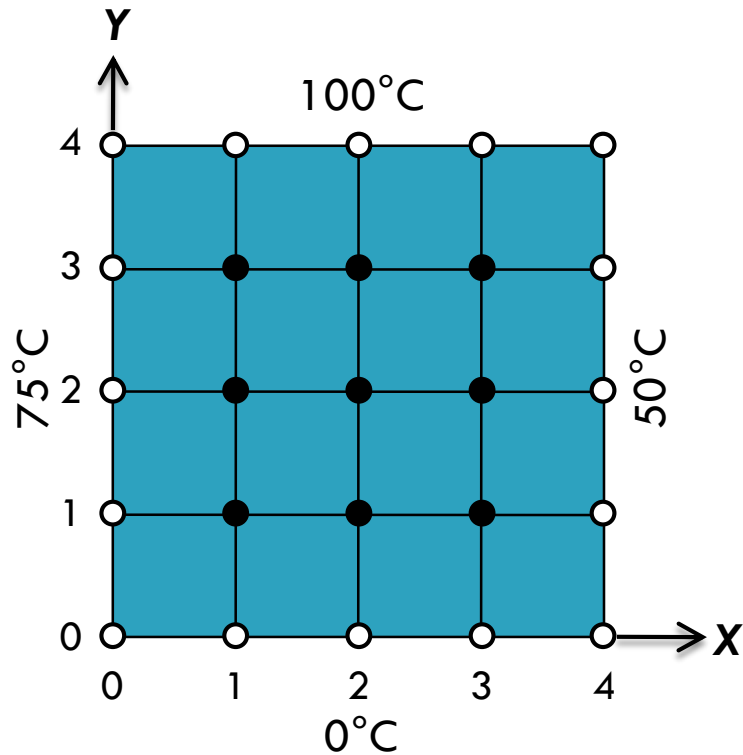


- Di titik-titik yang berada di batas domain (simbol bulat putih), berlaku syarat batas (*boundary conditions*) → temperatur diketahui/ditetapkan.
- BC semacam itu dikenal dengan nama **Dirichlet boundary condition**.
- Di titik (1,1):  
$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$$
$$-4T_{1,1} + T_{1,2} + T_{2,1} = -75 - 0$$
- Di 8 titik interior yang lain pun dapat dituliskan persamaan beda hingga diskrit semacam di atas.

# Finite Difference Approach – FDA

21

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Dari 9 titik interior diperoleh sistem persamaan aljabar linear yang terdiri dari 9 persamaan dengan 9 *unknowns*.

# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

□ 9 persamaan dengan 9 *unknowns*:

$$\begin{array}{rcll} 1) & -4T_{1,1} & + T_{2,1} & + T_{1,2} & = & -75 \\ 2) & T_{1,1} & - 4T_{2,1} & + T_{3,1} & + T_{2,2} & = & 0 \\ 3) & & T_{2,1} & - 4T_{3,1} & + T_{3,2} & = & -50 \\ 4) & T_{1,1} & & - 4T_{1,2} & + T_{2,2} & + T_{1,3} & = & -75 \\ 5) & & T_{2,1} & + T_{1,2} & - 4T_{2,2} & + T_{3,2} & + T_{2,3} & = & 0 \\ 6) & & & T_{3,1} & + T_{2,2} & - 4T_{3,2} & + T_{3,3} & = & -50 \\ 7) & & & T_{1,2} & & - 4T_{1,3} & + T_{2,3} & = & -175 \\ 8) & & & & T_{2,2} & + T_{1,3} & - 4T_{2,3} & + T_{3,3} & = & -100 \\ 9) & & & & & T_{3,2} & + T_{2,3} & - 4T_{3,3} & = & -150 \end{array}$$

# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

23

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- 9 persamaan dengan 9 *unknowns* dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -175 \\ -100 \\ -150 \end{Bmatrix}$$

# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- ❑ Sistem persamaan aljabar yang dihasilkan dari penerapan persamaan beda hingga (*finite difference*) di semua titik interior
  - ❑ diselesaikan dengan salah satu Metode yang telah dibahas pada kuliah sebelum UTS
  - ❑ untuk 9 persamaan, penyelesaian masih dapat dilakukan dengan mudah memakai cara tabulasi *spreadsheet*
  - ❑ untuk jumlah persamaan yang banyak, seperti yang biasa ditemui dalam permasalahan *civil engineering*, perlu bantuan program komputer
    - MatLab (program aplikasi berbayar)
    - SciLab (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
    - **Octave** (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
    - *Numerical Recipes*
    - Etc. (dapat dicari di internet)



# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Metode iteratif: *Gauss-Seidel iteration method*

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad \text{atau} \quad T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1}}{4}$$

- Dipakai SOR (*Successive Over Relaxation*) method untuk mempercepat konvergensi

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \lambda T_{i,j}^{n+1} + (1-\lambda)T_{i,j}^n \quad 1 < \lambda < 2$$

- Kriteria konvergensi

$$\max |\varepsilon_{i,j}| = \max \left| \frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^n}{T_{i,j}^{(n+1)}} \right| < 1\%$$

hitungan dilakukan  
dengan bantuan  
tabulasi spreadsheet

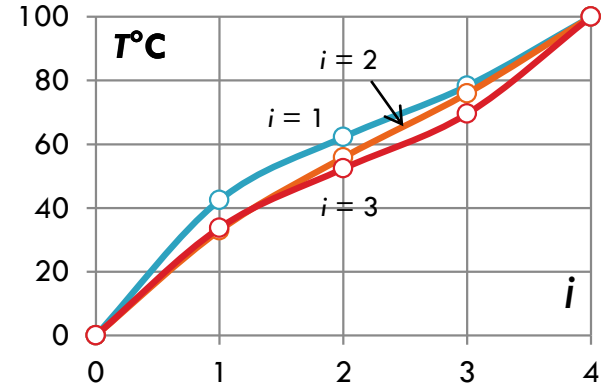
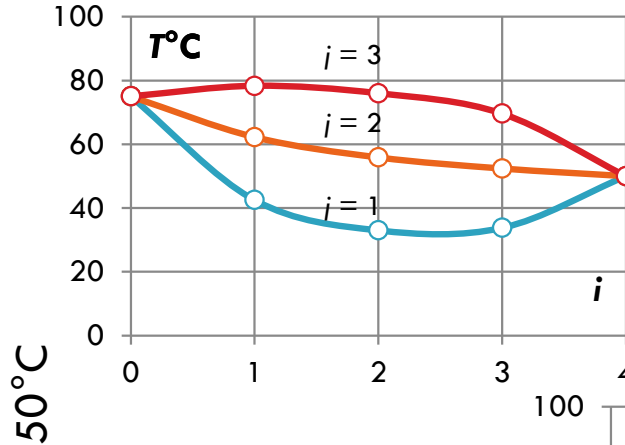
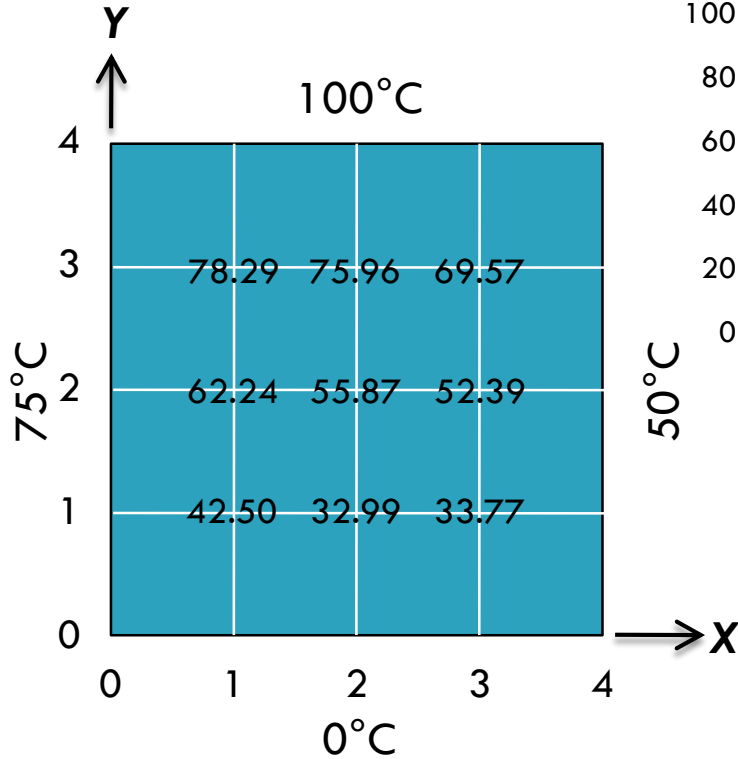
# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

iterasi, $n$	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$	$\Delta T_{\max}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	---
1	28.1250	10.5469	22.7051	38.6719	18.4570	34.1858	80.1270	74.4690	96.9955	100.0%
2	32.5195	22.3572	28.6011	55.8311	60.8377	71.5700	74.4241	87.3620	67.3517	69.7%
3	41.1859	37.8056	45.4653	71.2290	70.0686	51.5471	87.8846	78.3084	71.2700	40.9%
4	48.4201	42.5799	31.3150	66.3094	54.4950	51.8814	75.9144	73.9756	67.8114	45.2%
5	44.7485	27.6695	32.9241	59.9274	52.7977	50.3842	77.8814	74.9462	69.3432	53.9%
6	38.5996	32.7858	33.4767	60.5401	55.5973	52.9643	77.4916	75.9389	69.9171	15.9%
7	43.8224	33.4432	34.4145	63.6144	56.9367	52.7435	79.2117	76.8051	69.8722	11.9%
8	42.6104	33.5140	33.8893	62.4499	56.0988	52.3259	78.2398	75.6765	69.3148	2.8%
9	42.8062	33.0409	33.8179	62.3681	55.7299	52.1605	78.2718	75.9054	69.6173	1.4%
10	42.5003	32.9976	33.7753	62.2418	55.8746	52.3950	78.2943	75.9671	69.5771	0.7%

# Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

27

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



# Persamaan Diferensial Parsial – PDE

PDE Parabolik

Penyelesaian PDE Parabolik

FDA Skema Eksplisit

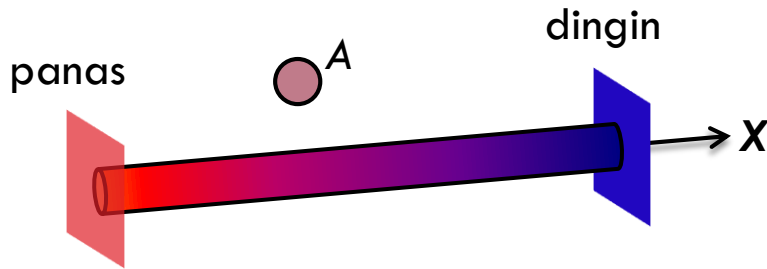
FDA Skema Implisit

FDA Skema Crank-Nicolson

# PDE Parabolik

29

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator panas, kecuali di kedua ujung batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, panas dan dingin.

- Heat balance di dalam batang

$$q(x)A\Delta t - q(x + \Delta x)A\Delta t = \Delta x A \rho C \Delta T$$

input                      output                      storage

- persamaan tsb dibagi vol =  $\Delta x A \Delta t$

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

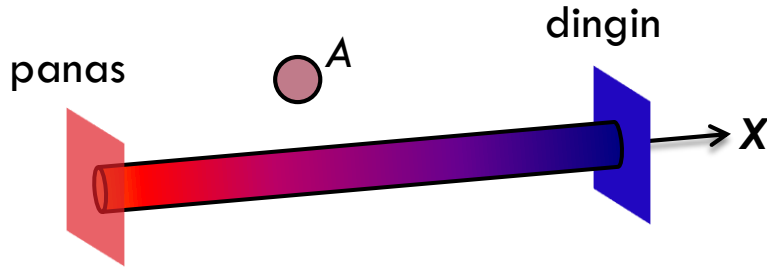
- limit persamaan tsb untuk  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

# PDE Parabolik

30

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator panas, kecuali di kedua ujung batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, panas dan dingin.

- Hukum Fourier untuk konduksi panas

$$q = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial x}$$

- Persamaan *heat balance* menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{Persamaan konduksi panas}$$

- Persamaan di atas merupakan persamaan difusi
  - transpor polutan
  - transpor sedimen suspensi

# FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- ❑ Temperatur batang merupakan fungsi waktu dan ruang
  - ❑ terhadap waktu,  $T$  berupa suku derivatif pertama
  - ❑ terhadap ruang,  $T$  berupa suku derivatif kedua
- ❑ Langkah hitungan pada FDA
  - ❑  $T$  pada waktu  $t+\Delta t$  dihitung berdasarkan  $T$  pada waktu  $t$
  - ❑  $T$  pada waktu  $t$  sudah diketahui dari nilai/syarat awal (**initial condition**) atau dari hasil hitungan langkah sebelumnya
  - ❑ saat menghitung  $T$  di suatu titik pada suku derivatif ruang,  $T$  yang mana yang dipakai?
    - jika  $T$  pada waktu  $t$  → dinamai skema eksplisit
    - jika  $T$  pada waktu  $t+\Delta t$  → dinamai skema implisit

# FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{\text{di titik } i}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Skema Eksplisit

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Skema Implisit

$k$  konstan di sepanjang batang  
dan di sepanjang waktu

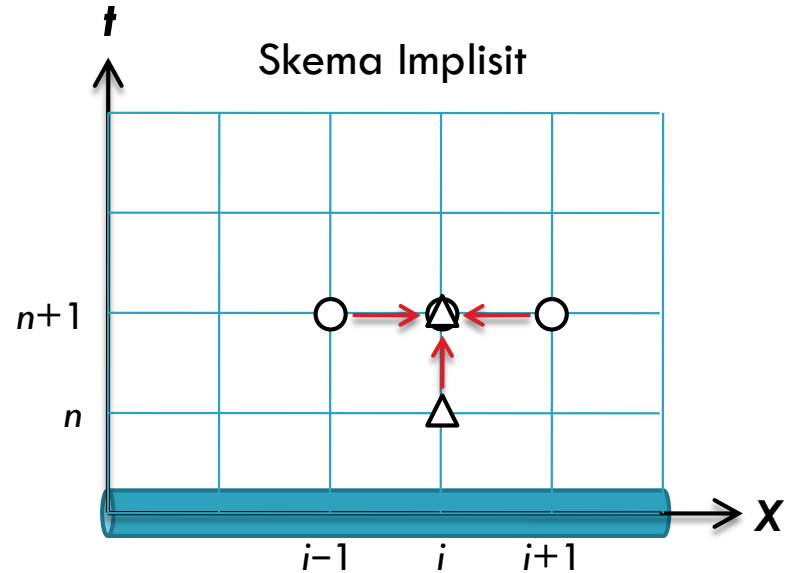
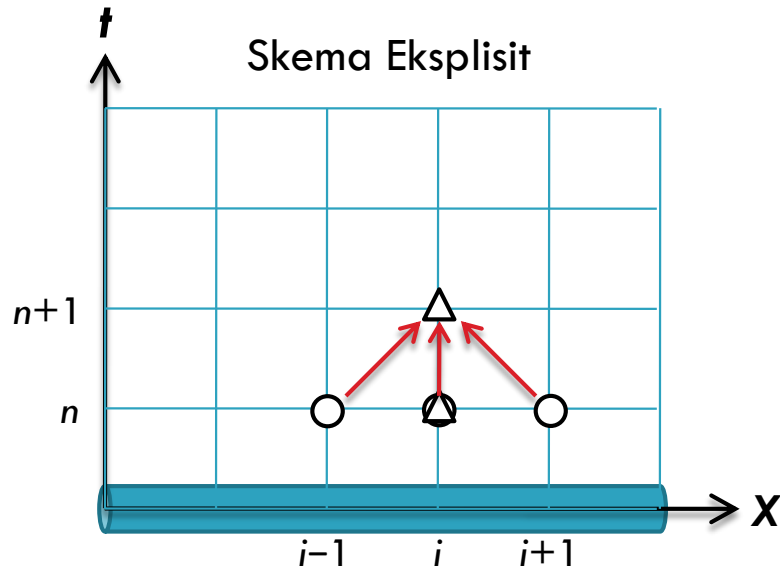
$\Delta x$  seragam di sepanjang batang



# FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

33

<https://istiarito.staff.ugm.ac.id>



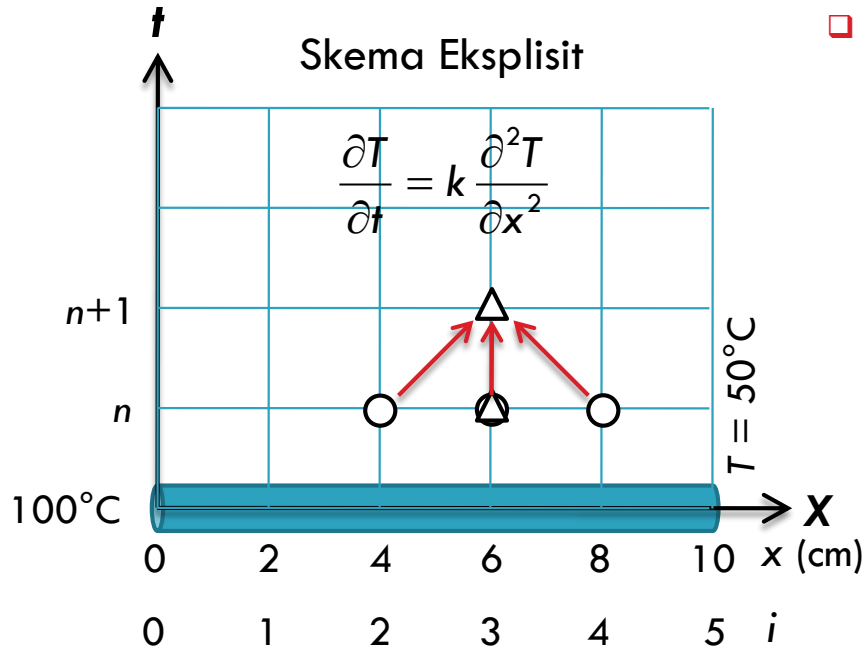
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left( k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

$$\left( -k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i-1}^{n+1} + \left( 1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_i^{n+1} + \left( -k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

# FDA: Skema Eksplisit

34

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



□ Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang

- panjang batang,  $L = 10$  cm,  $\Delta x = 2$  cm
- time step,  $\Delta t = 0.1$  s
- koefisien difusi thermal,  $k = 0.835$  cm<sup>2</sup>/s
- syarat batas:  $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$  dan  $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
- nilai awal:  $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left( k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

# FDA: Skema Eksplisit

35

<https://istiaro.staff.ugm.ac.id>

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left( k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

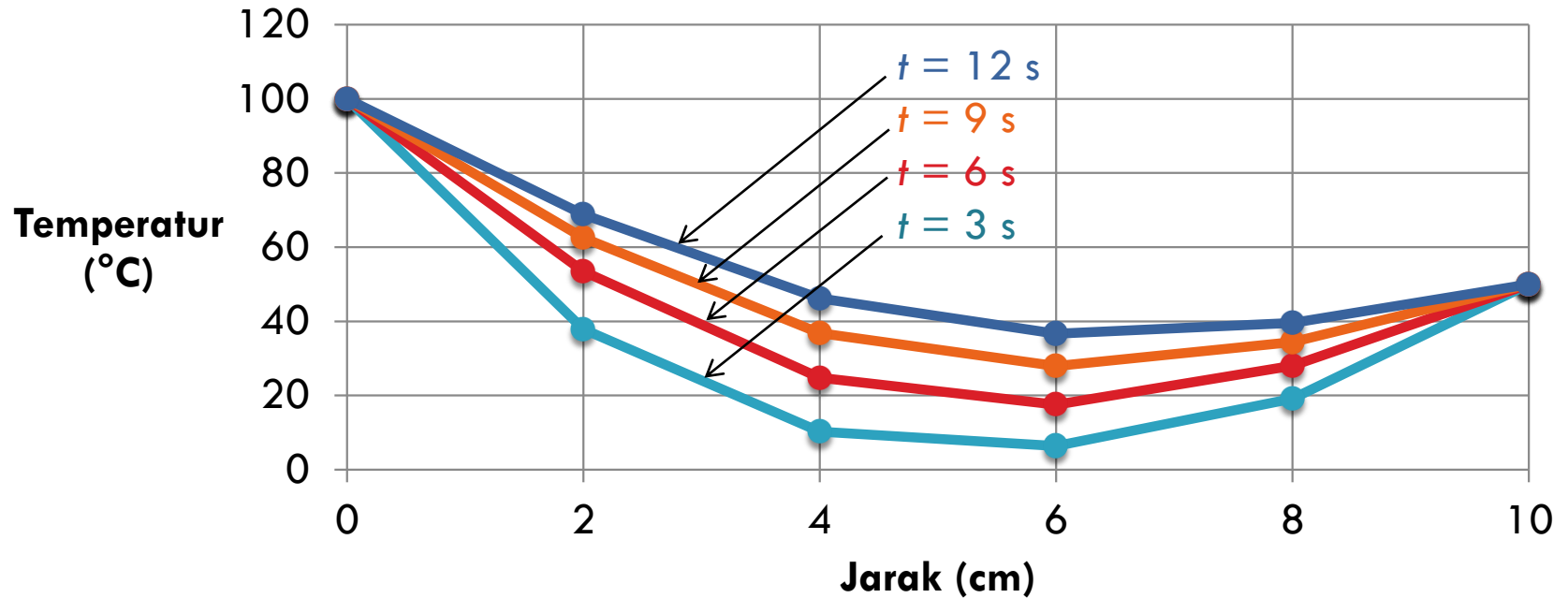
iterasi	waktu (s)	temperatur (°C) di titik hitung					
$n$	$t$	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
0	0	100	0	0	0	0	50
1	0.1	100	2.0875	0	0	1.0438	50
2	0.2	100	4.0878	0.0436	0.0218	2.0439	50
3	0.3	100	6.0056	0.1275	0.0645	3.0028	50
4	0.4	100	7.8450	0.2489	0.1271	3.9225	50
5	0.5	100	9.6102	0.4050	0.2089	4.8052	50

Hitungan diteruskan sampai  $t = 12$  s

# FDA: Skema Eksplisit

36

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



# FDA: Skema Eksplisit

37

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Konvergensi dan stabilitas hitungan
  - ❑ Konvergensi berarti bahwa jika  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  mendekati nol, maka penyelesaian FDA mendekati penyelesaian eksak.
  - ❑ Stabilitas berarti bahwa kesalahan hitungan di setiap tahap hitungan tidak mengalami amplifikasi, tetapi mengecil seiring dengan berjalannya hitungan.
- ❑ Skema eksplisit konvergen dan stabil jika:

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k}$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left\{ \begin{array}{l} \leq 1/2 \text{ dapat terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ \leq 1/4 \text{ tidak terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ = 1/6 \text{ meminimumkan } \textit{truncation error} \end{array} \right.$$

# FDA: Skema Eksplisit

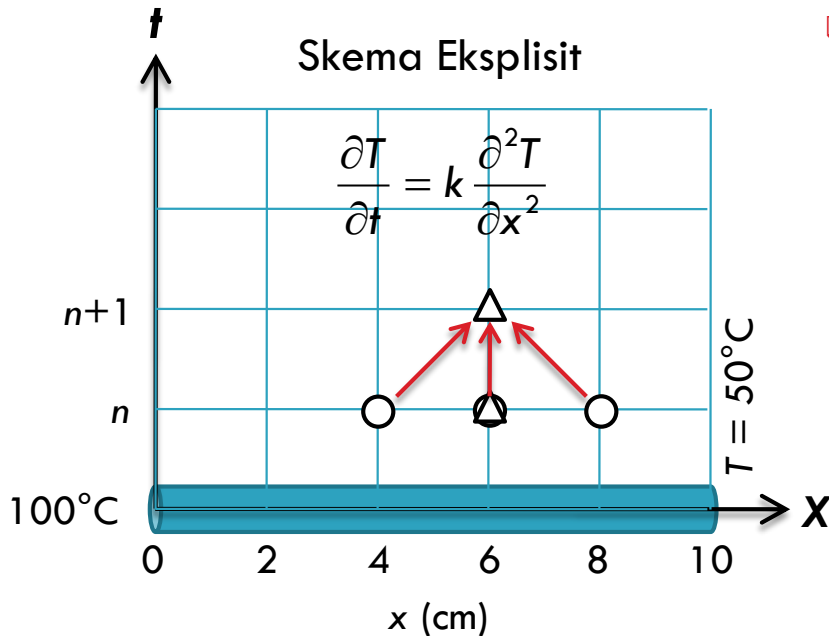
- ❑ Konvergensi dan stabilitas hitungan
  - ❑ untuk mendapatkan akurasi hasil hitungan, dibutuhkan  $\Delta x$  kecil, namun
  - ❑ konsekuensi  $\Delta x$  kecil adalah  $\Delta t$  pun harus kecil untuk menjamin konvergensi dan kestabilan hitungan
  - ❑ jika  $\Delta x$  dikalikan faktor  $\frac{1}{2}$ , maka  $\Delta t$  perlu dikalikan faktor  $\frac{1}{4}$  untuk mempertahankan konvergensi dan kestabilan hitungan
  - ❑ skema eksplisit menjadi mahal, dalam arti beban hitungan bertambah besar

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

# FDA: Skema Eksplisit

39

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang,  $L = 10$  cm,  $\Delta x = 2$  cm
  - time step,  $\Delta t = 0.1$  s
  - koefisien difusi thermal,  $k = 0.835$  cm<sup>2</sup>/s
  - syarat batas:  $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$  dan  $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
  - nilai awal:  $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

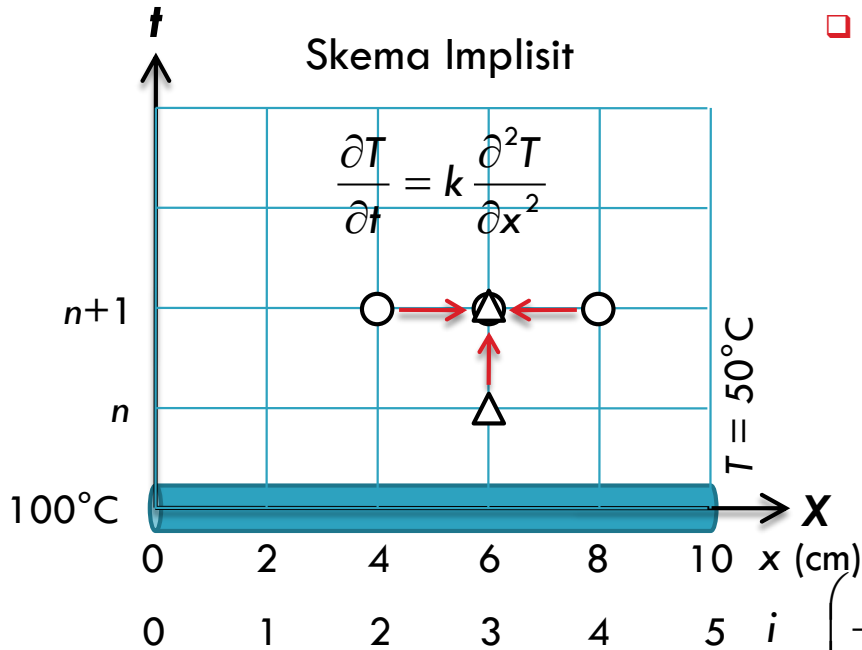
Hitung dengan skema eksplisit:  $k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$

**PR dikumpulkan minggu depan!**

# FDA: Skema Implisit

40

<https://istiarito.staff.ugm.ac.id>



□ Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang

- panjang batang,  $L = 10$  cm,  $\Delta x = 2$  cm
- time step,  $\Delta t = 0.1$  s
- koefisien difusi thermal,  $k = 0.835$  cm<sup>2</sup>/s
- syarat batas:  $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$  dan  $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
- nilai awal:  $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$



# FDA: Skema Implisit

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \quad 1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.05175$$

□ Hitungan pada saat  $n+1=1$  atau  $t+\Delta t = 0.1$  s:

$$\begin{array}{l} \text{node 1:} \quad 1.04175T_1^1 - 0.020875T_2^1 = T_1^0 + 0.020875T_0^0 \\ \text{node 2:} \quad -0.020875T_1^1 + 1.04175T_2^1 - 0.020875T_3^1 = T_2^0 \\ \text{node 3:} \quad -0.020875T_2^1 + 1.04175T_3^1 - 0.020875T_4^1 = T_3^0 \\ \text{node 4:} \quad -0.020875T_3^1 + 1.04175T_4^1 = T_4^0 + 0.020875T_5^0 \end{array}$$

# FDA: Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}$$

matriks tridiagonal

- Apabila jumlah persamaan banyak, penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

# FDA: Skema Implisit

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* MSEXcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1} \{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam MSEXcel

# FDA: Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MSExcel adalah:

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{matrix} \right\} \\ \{T\} \end{matrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 & 0 \\ 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 \\ 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 \\ 0 & 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{matrix} \right\} \\ \{RHS\} \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2.0047 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 1.0023 \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

# FDA: Skema Implisit

45

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Hitungan pada saat  $n+1=2$  atau  $t+\Delta t = 0.2$  s:
  - Matriks koefisien persamaan  $[A]$  tidak berubah
  - Matriks di sebelah kanan tanda “=” berubah dan merupakan fungsi  $T$  pada saat  $n=1$

$$\{\text{RHS}\} = \begin{Bmatrix} T_1^1 + 0.020875 T_0 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 + 0.020875 T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 2.0461 \end{Bmatrix}$$



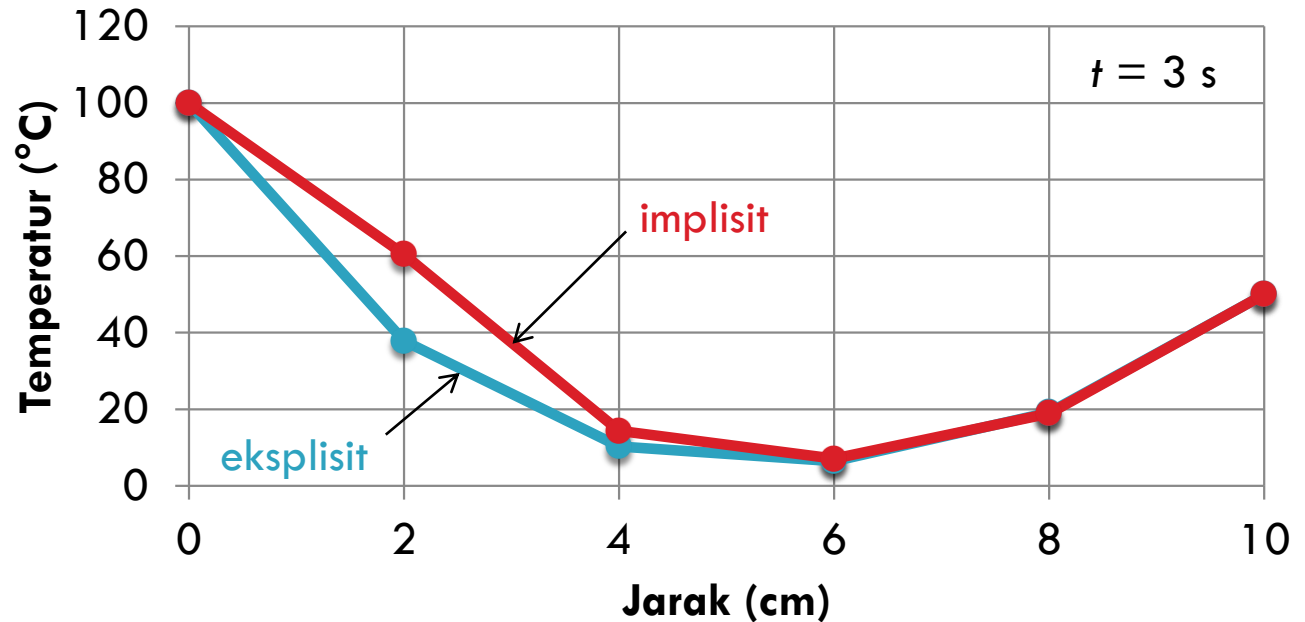
$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 & 0 \\ 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 \\ 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 \\ 0 & 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 2.0461 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0101 \\ 0.1206 \\ 0.0619 \\ 1.9653 \end{Bmatrix}$$

# FDA: Skema Implisit

46

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Konduksi atau perambatan panas hasil hitungan dengan skema implisit tampak lebih cepat daripada hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada  $t = 3$  s).



# FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

## Skema eksplisit

- ❑ Persamaan dan teknik penyelesaiannya *straight-forward*, penyelesaian dilakukan *node per node*
- ❑ Rentan terhadap konvergensi dan stabilitas hitungan
- ❑ *Time step* terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

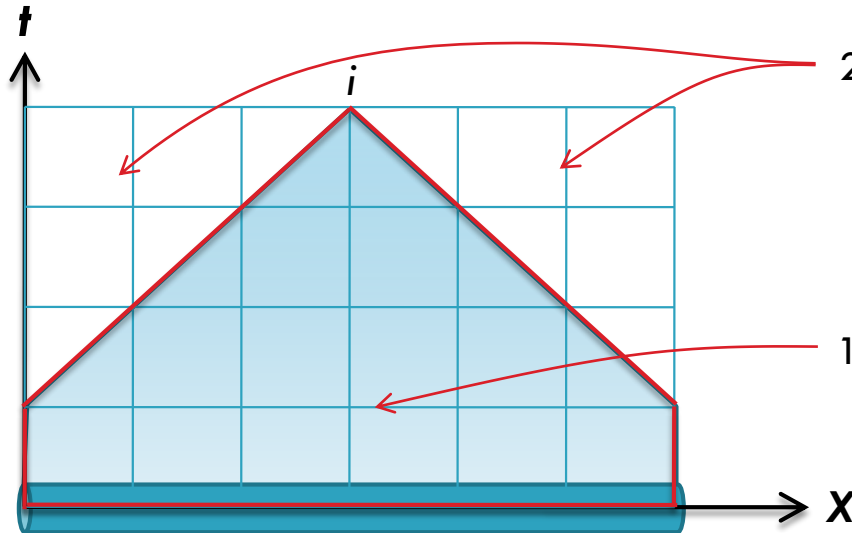
## Skema implisit

- ❑ Persamaan dan teknik penyelesaian lebih “rumit”, penyelesaian dilakukan secara simultan untuk seluruh node
- ❑ Konvergensi dan stabilitas hitungan lebih mudah dijaga
- ❑ *Time step* tidak terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

# FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

48

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



2) Saat menghitung  $T$  di  $i$ , titik-titik hitung (*nodes*) di kedua zona ini tidak diperhitungkan, padahal secara fisik, justru node-node di sini berpengaruh thd  $T$  di titik  $i$ .

1) Saat menghitung  $T$  di  $i$ , hanya titik-titik hitung (*nodes*) di dalam segitiga ini yang berpengaruh dalam hitungan.


Skema Eksplisit



# FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

## Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$


$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

*1st order accurate*

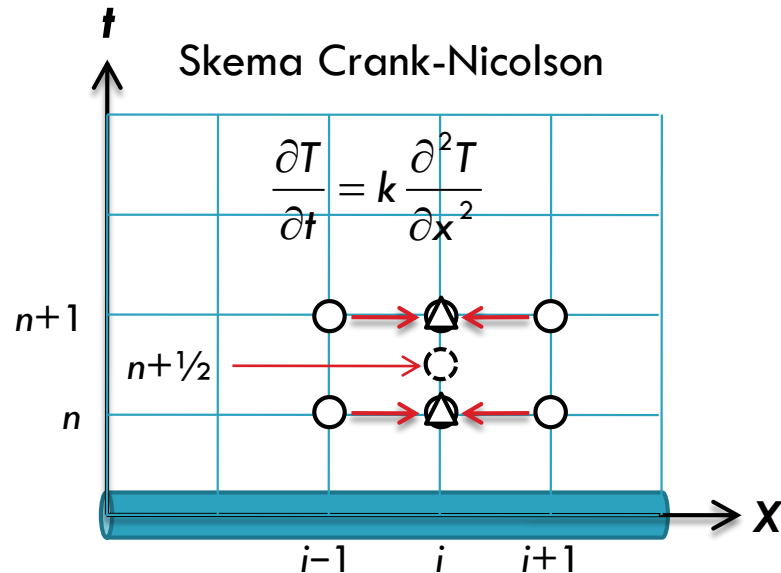
*2nd order accurate*

- 1) Skema implisit menjamin konvergensi dan stabilitas hitungan, namun aproksimasi suku derivatif waktu dan suku derivatif ruang memiliki akurasi berbeda.
- 2) Skema implisit yang memiliki akurasi yang sama pada aproksimasi suku derivatif waktu dan ruang adalah Metode **Crank-Nicolson**.

# FDA: Metode Crank-Nicolson

50

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Aproksimasi suku derivatif waktu ditempatkan pada waktu  $n+1/2$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

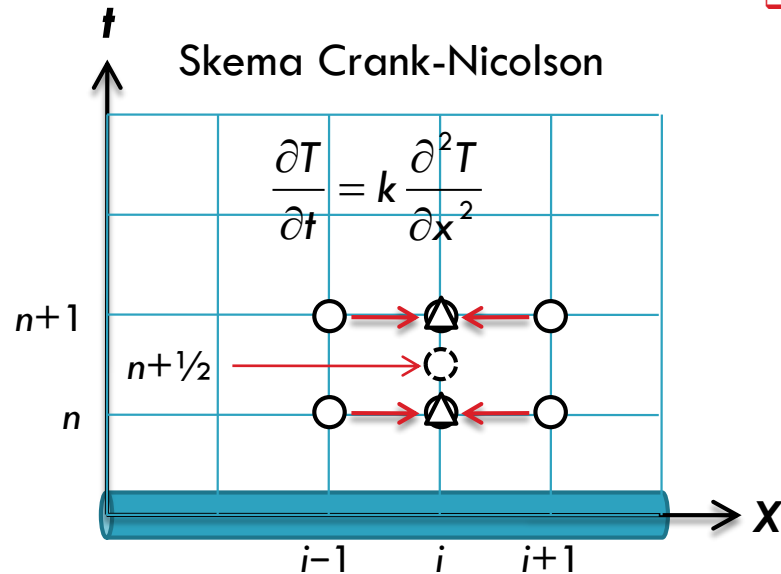
- Aproksimasi suku derivatif ruang pada waktu  $n+1/2$  dianggap sbg nilai rata-rata derivatif pada waktu  $n$  dan  $n+1$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

# FDA: Metode Crank-Nicolson

51

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



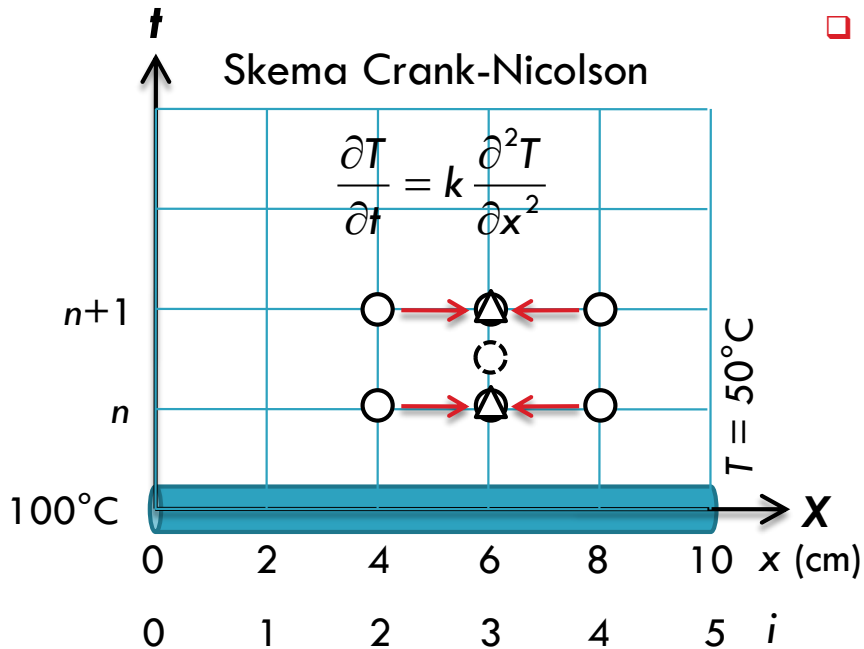
- Bentuk beda hingga persamaan parabola dengan demikian dapat dituliskan sbb.

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + 2 \left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} =$$
$$\left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^n + 2 \left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^n$$

# FDA: Skema Crank-Nicolson

52

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang,  $L = 10$  cm,  $\Delta x = 2$  cm
  - time step,  $\Delta t = 0.1$  s
  - koefisien difusi thermal,  $k = 0.835$  cm<sup>2</sup>/s
  - syarat batas:  $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$  dan  $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
  - nilai awal:  $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

# FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^n + 2\left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^n$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \quad 1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.05175$$

- Hitungan pada saat  $n+1=1$  atau  $t+\Delta t = 0.1$  s:

node 1:	$2.04175T_1^1$	$-0.020875T_2^1$		$=$	4.1750
node 2:	$-0.020875T_1^1$	$+2.04175T_2^1$	$-0.020875T_3^1$	$=$	0
node 3:		$-0.020875T_2^1$	$+2.04175T_3^1$	$-0.020875T_4^1$	$=$ 0
node 4:			$-0.020875T_3^1$	$+2.04175T_4^1$	$=$ 2.0875

# FDA: Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}$$

matriks tridiagonal

- Apabila jumlah persamaan banyak, penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

# FDA: Skema Implisit

55

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan spreadsheet MSEXcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1} \{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam MSEXcel

# FDA: Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MScExcel adalah:

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 & 0 \\ 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 \\ 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 \\ 0 & 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.0450 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0450 \\ 0.0210 \\ 0.0107 \\ 1.0225 \end{Bmatrix}$$

$\{T\}$   $[A]^{-1}$   $\{RHS\}$



# FDA: Skema Crank-Nicolson

57

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Hitungan pada saat  $n+1=2$  atau  $t+\Delta t = 0.2$  s:
  - Matriks koefisien persamaan  $[A]$  tidak berubah
  - Matriks di sebelah kanan tanda “=” berubah dan merupakan fungsi  $T$  pada saat  $n=1$

$$\{\text{RHS}\} = \begin{Bmatrix} 8.1797 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{Bmatrix}$$



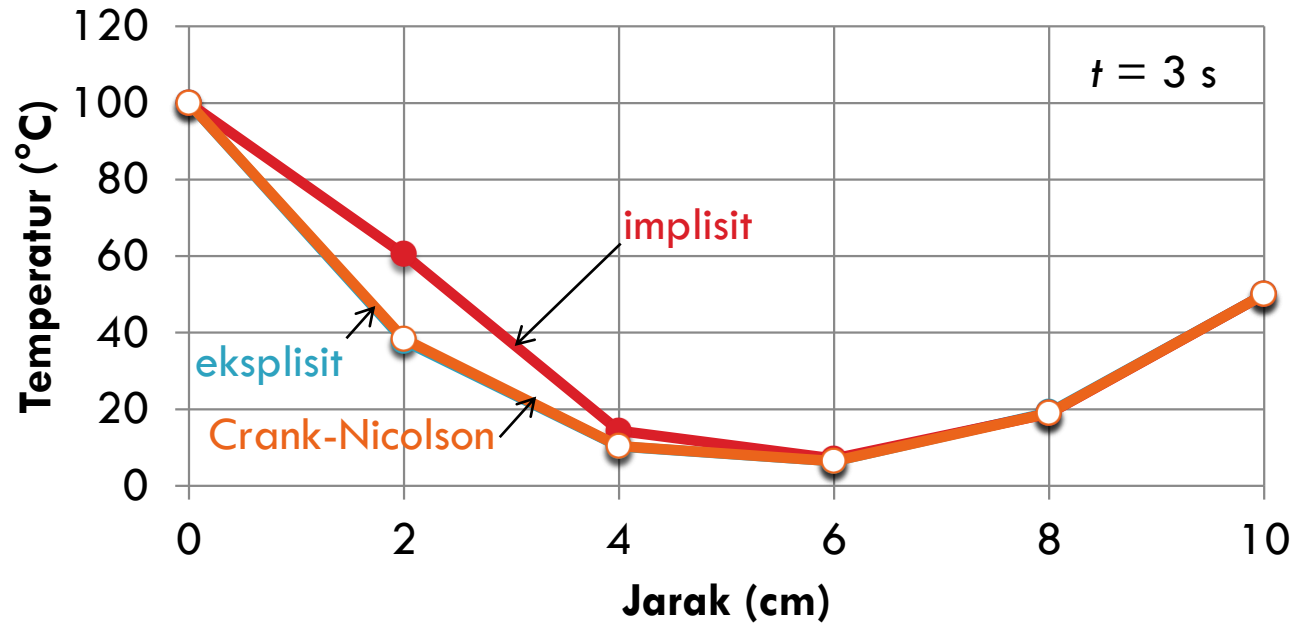
$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 & 0 \\ 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 \\ 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 \\ 0 & 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8.1797 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0071 \\ 0.0826 \\ 0.0422 \\ 2.0036 \end{Bmatrix}$$

# FDA: Skema Crank-Nicolson

58

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Konduksi atau perambatan panas hasil hitungan dengan skema Crank-Nicolson tampak mirip dengan hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada  $t = 3$  s).



# FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



FDA



$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \phi \left( k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \phi) \left( k \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

## □ Skema FDA

- $\phi = 0$  : skema eksplisit
- $\phi = 1$  : skema implisit
- $\phi = 1/2$  : skema Crank-Nicolson

# FDA Persamaan Parabolik

- Bentuk umum FDA persamaan diferensial parsial parabolik

$$\left(-\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = \left[(1-\phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_{i-1}^n + \left[1 - 2(1-\phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_i^n + \left[(1-\phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_{i+1}^n$$

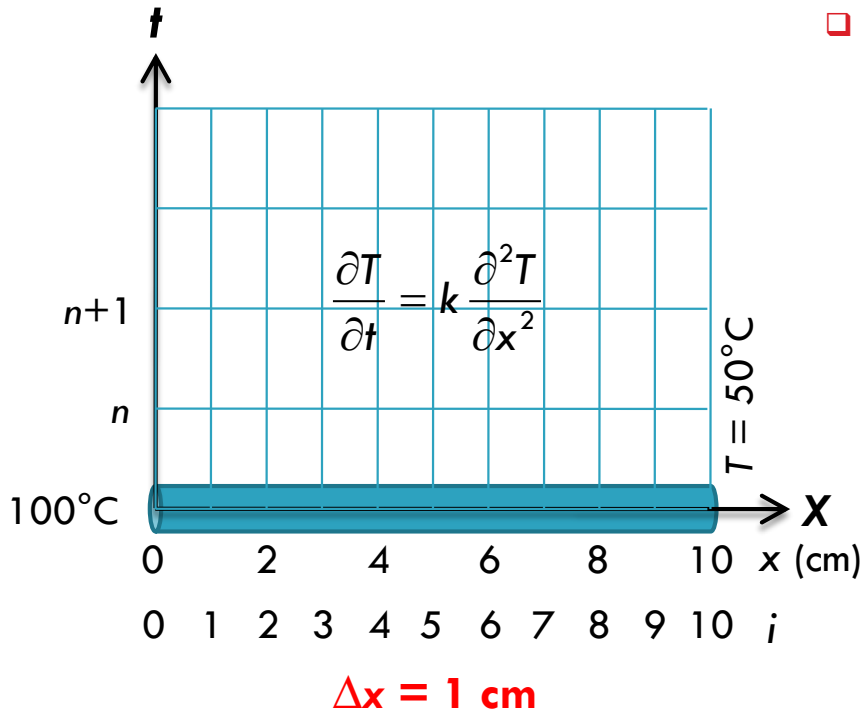
## □ Skema FDA

- $\phi = 0$  : skema eksplisit
- $\phi = 1$  : skema implisit
- $\phi = 1/2$  : skema Crank-Nicolson

# FDA: Persamaan Parabolik

61

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- ❑ Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - ❑ **panjang batang,  $L = 10 \text{ cm}$ ,  $\Delta x = 1 \text{ cm}$  (!!)**
  - ❑ time step,  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$
  - ❑ koefisien difusi thermal,  $k = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$
  - ❑ syarat batas:  $T(x=0,t) = 100^\circ\text{C}$  dan  $T(x=10,t) = 50^\circ\text{C}$
  - ❑ nilai awal:  $T(x,t=0) = 0^\circ\text{C}$

- ❑ Hitung sampai *steady-state condition*
  - ❑ Skema eksplisit
  - ❑ Skema implisit
  - ❑ Skema Crank-Nicolson

PR/  
Tugas

# Sekian