

## UJIAN TENGAH SEMESTER STATISTIKA

DR. IR. ISTIARTO, M.ENG. | JUMAT, 1 NOVEMBER 2013 | 150 MENIT | OPEN BOOK | TANPA KOMPUTER

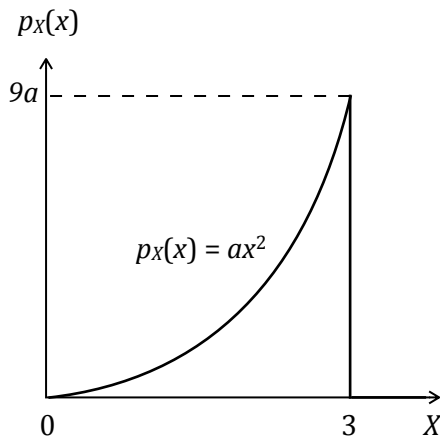
### SOAL A

Produksi listrik tahunan PLTMH Terangjaya menunjukkan angka yang sangat bervariasi, walau data beberapa tahun terakhir menunjukkan produksi yang tinggi dengan kemungkinan capaian sampai 3 GWh. Berdasarkan data, tampak bahwa pdf produksi listrik tahunan dapat didekati dengan persamaan  $p_x(x) = ax^2$ ,  $0 \leq x [\text{GWh}] \leq 3$ ,  $x$  adalah produksi listrik tahunan.

1. Temukanlah nilai konstanta  $a$ .
2. Tuliskanlah cdf produksi listrik tahunan.
3. Gambarlah pdf dan cdf tersebut.
4. Berapakah probabilitas produksi listrik tahunan melampaui 2 GWh?
5. Hitunglah produksi listrik tahunan yang dapat diharapkan (produksi rata-rata).

### Penyelesaian

Nilai konstanta  $a$  lebih mudah dihitung dengan menggambarkan sketsa pdf terlebih dulu.



$$\int_0^3 p_x(x) dx = 1$$

$$\int_0^3 ax^2 dx = 1$$

$$\frac{a}{3} x^3 \Big|_0^3 = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} (3^3 - 0) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

Dengan demikian, pdf produksi listrik adalah:

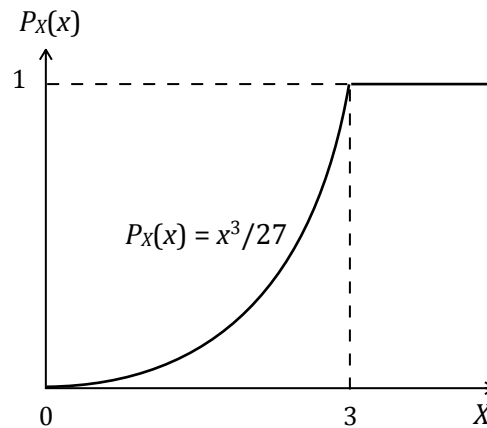
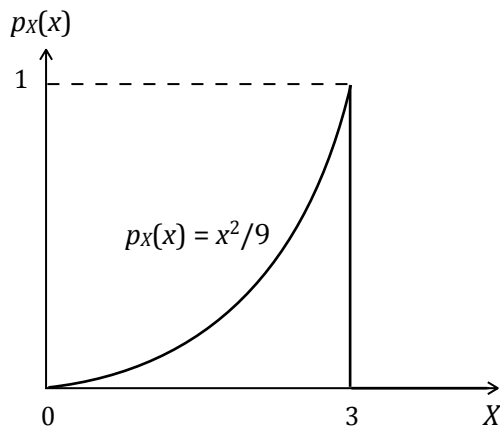
$$p_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/9 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

Fungsi distribusi kumulatif,  $P_x(x)$ .

$$P_x(x) = \int p_x(x) dx = \int \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{27} x^3 + C$$

Syarat batas: di  $x = 0 \Rightarrow P_x(x = 0) = 0 \Rightarrow C = 0$ . Dengan demikian, cdf produksi listrik adalah:

$$P_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



Probabilitas produksi listrik tahunan melampaui 2 GWh =  $\text{prob}(X > 2 \text{ GWh})$ .

$$\text{prob}(X > 2 \text{ GWh}) = 1 - P_X(2) = 1 - \frac{2^3}{27} = \frac{19}{27} \text{ GWh}$$

Produksi listrik tahunan yang dapat diharapkan,  $E(x)$ .

$$\begin{aligned} E(x) &= \bar{X} = \int_0^3 x p_X(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{9} x^3 dx \\ &= \frac{1}{36} x^4 \Big|_0^3 = \frac{1}{36} (3^4 - 0) = \frac{81}{36} = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ GWh} \end{aligned}$$

### SOAL B

Tabel di bawah ini menunjukkan frekuensi tanah longsor pada saat hujan deras atau gempa bumi, yang pernah terjadi di kawasan Giriraya.

Hujan [mm/jam]	Gempa bumi [Richter]		
	5 - 7	7 - 9	> 9
100 - 150	-	2	1
150 - 200	3	1	2
> 200	1	1	-

*Event A* adalah tanah longsor yang terjadi pada saat hujan 150 - 200 mm/jam dan *Event B* adalah tanah longsor yang terjadi pada saat gempa bumi > 7 Richter. Dengan memakai nilai frekuensi relatif sebagai estimasi nilai probabilitas, hitunglah nilai-nilai probabilitas:  $\text{prob}(A)$ ,  $\text{prob}(B)$ ,  $\text{prob}(A \cap B)$ ,  $\text{prob}(A|B)$ ,  $\text{prob}(B|A)$ . Gunakan diagram Venn untuk memudahkan perhitungan probabilitas.

### Penyelesaian

Untuk menghitung probabilitas tanah longsor, tabel frekuensi tanah longsor perlu terlebih dulu dilengkapi dengan menjumlahkan frekuensi kejadian pada setiap klas hujan maupun intensitas gempa bumi. Tabel disajikan pada halaman setelah halaman ini. Pada tabel tersebut, *Event A* dan *Event B* ditunjukkan pada baris dan kolom yang sesuai dengan definisi masing-masing *event*. Di bawah tabel, disajikan pula diagram Venn yang menunjukkan *event A* dan *event B*. Perhatikan bahwa probabilitas seringkali lebih mudah ditemukan dengan cara membuat diagram Venn.

$$\text{prob}(A) = 6/11$$

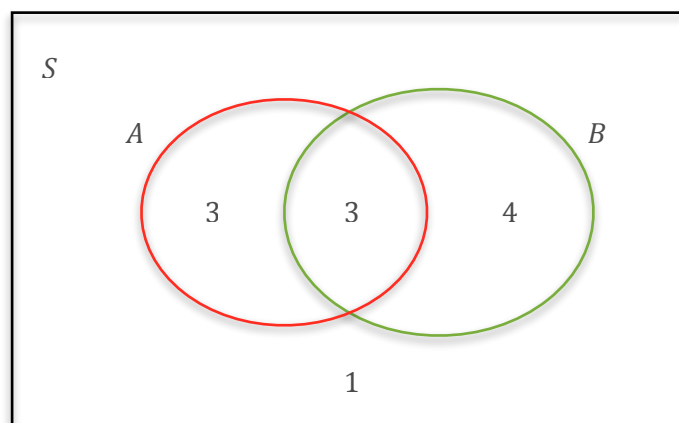
$$\text{prob}(B) = (4+3)/11 = 7/11$$

$$\text{prob}(A \cap B) = 3/11$$

$$\text{prob}(A|B) = (1+2)/(4+3) = 3/7$$

$$\text{prob}(B|A) = (1+2)/6 = 3/6 = 1/2$$

Hujan [mm/jam]	Gempa bumi [Richter]			Jumlah
	5 - 7	7 - 9	> 9	
100 - 150	-	2	1	3
150 - 200	3	1	2	6
> 200	1	1	-	2
Jumlah	4	4	3	11



### SOAL C

Tabel di bawah ini menyajikan frekuensi data hujan maksimum (*annual series*) di stasiun Tampa,  $R$  [mm].

Curah hujan [mm]	100 - 140	140 - 180	180 - 220	220 - 260	260 - 300
Frekuensi	2	9	11	7	3

1. Gambarlah histogram frekuensi relatif data tersebut dan pdf distribusi normal teoretis.
2. Perkirakanlah  $\text{prob}(150 < R \text{ [mm]} < 210)$ .
3. Perkirakanlah rentang keyakinan nilai rata-rata hujan maksimum,  $(1 - \alpha) = 95\%$ .
4. Perkirakanlah tingkat keyakinan nilai rata-rata hujan maksimum antara 190 s.d. 210 mm.
5. Perkirakanlah rentang keyakinan nilai variansi atau simpangan baku hujan maksimum.

### Penyelesaian

Langkah pertama dalam mengerjakan soal di atas adalah menghitung nilai rerata dan simpangan baku hujan maksimum. Hitungan mudah dikerjakan dengan cara membuat tabel frekuensi.

Curah hujan, $R$ [mm]	Frekuensi, $f$	Frek relatif	$fR$	$fR^2$	
100 - 140	120	2	0.0625	240	28800
140 - 180	160	9	0.28125	1440	230400
180 - 220	200	11	0.34375	2200	440000
220 - 260	240	7	0.21875	1680	403200
260 - 300	280	3	0.09375	840	235200
		32		6400	1337600

Curah hujan rerata serta varian dan simpangan baku curah hujan.

$$\bar{R} = \frac{\sum f R}{\sum f} = \frac{6400}{32} = 200 \text{ mm}$$

$$s_R^2 = \frac{\sum f R^2 - \sum f \bar{R}^2}{\sum f - 1} = \frac{1337600 - 32 \times 200^2}{32 - 1} = 1858.0645 \text{ mm}^2$$

$$s_R = \sqrt{\frac{\sum f R^2 - \sum f \bar{R}^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{1858.0645} = 43.1 \text{ mm}$$

Distribusi frekuensi relatif menurut distribusi normal teoretis dihitung dengan bantuan tabel distribusi normal standar. Langkah hitungan adalah sebagai berikut:

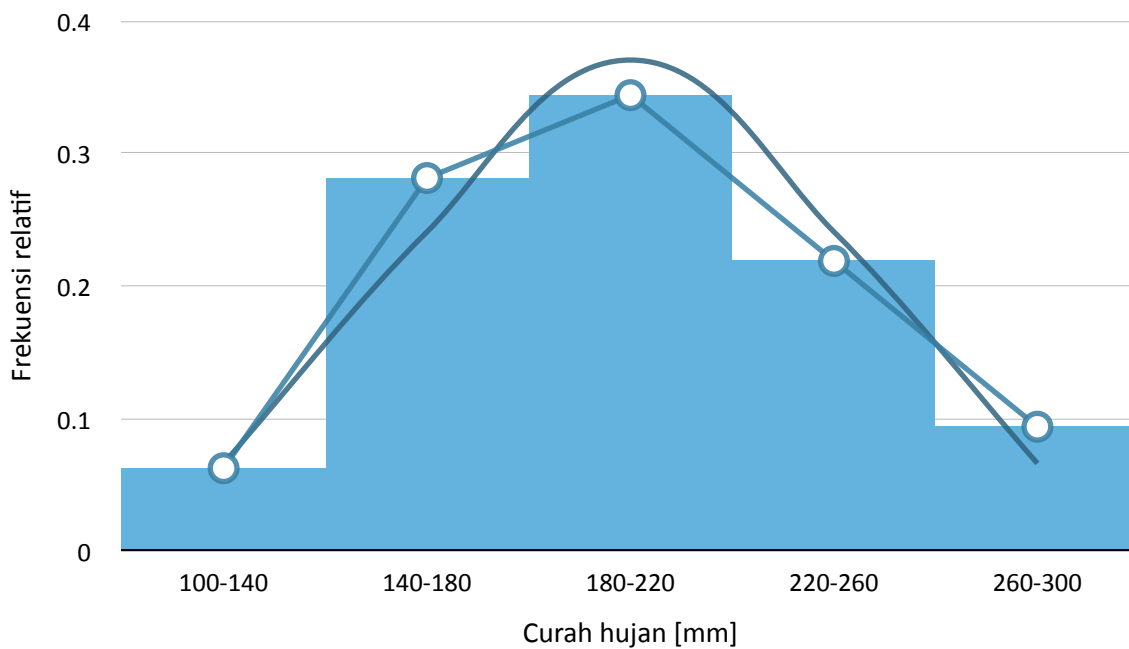
- nilai curah hujan dinormalkan,  $R \rightarrow Z$ ,

$$Z = \frac{R - \bar{R}}{s_R}$$

- temukan nilai ordinat pdf distribusi normal standar dengan bantuan tabel distribusi normal standar,  $p_R(r)$ ,
- hitungan frekuensi relatif,  $f_R(r)$

$$f_R(r) = \Delta r \frac{p_R(r)}{s_R} = 40 \frac{p_Z(z)}{43.1}$$

Curah hujan, $R$ [mm]	$Z$	$p_Z(z)$	$f_R(r)$	
100 - 140	120	-1.8561	0.0712	0.0661
140 - 180	160	-0.9281	0.2593	0.2407
180 - 220	200	0.0000	0.3989	0.3702
220 - 260	240	0.9281	0.2593	0.2407
260 - 300	280	1.8561	0.0712	0.0661
				0.9839



**prob(150 mm < R < 210 mm).**

$$Z_{150} = \frac{150 - 200}{43.1} = -1.1601 \Rightarrow \text{prob}(Z < -1.1601) = 0.1230$$

$$Z_{210} = \frac{210 - 200}{43.1} = 0.2320 \Rightarrow \text{prob}(Z < 0.2320) = 0.5917$$

$$\text{prob}(150 < R [\text{mm}] < 210) = \text{prob}(-1.1601 < Z < 0.2320) = 0.5917 - 0.1230 = 0.4687$$

**Rentang keyakinan curah hujan rata-rata dengan tingkat keyakinan (1 - α) = 95%.**

$$\text{prob}\left(\bar{R} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_R}{\sqrt{n}} < \mu_R < \bar{R} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_R}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975$$

$$t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0.975, 31} = 2.0395$$

$$\bar{R} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_R}{\sqrt{n}} = 200 - 2.0395 \frac{43.1}{\sqrt{32}} = 184 \text{ mm}$$

$$\bar{R} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_R}{\sqrt{n}} = 200 + 2.0395 \frac{43.1}{\sqrt{32}} = 216 \text{ mm}$$

$$\text{prob}(184 \text{ mm} < \mu_R < 216 \text{ mm}) = 95\%$$

**Tingkat keyakinan terhadap rentang curah hujan rata-rata 190 mm s.d. 210 mm.**

$$\text{prob}(190 \text{ mm} < \mu_R < 210 \text{ mm}) = (1 - \alpha).$$

$$190 = \bar{R} - t_{\alpha_a, n-1} \frac{S_R}{\sqrt{n}} \Rightarrow 190 = 200 - t_{\alpha_a, 31} \frac{43.1}{\sqrt{32}} \Rightarrow t_{\alpha_a, 31} = -1.3125 \Rightarrow \alpha_a = 0.0995$$

$$210 = \bar{R} + t_{1-\alpha_b, n-1} \frac{S_R}{\sqrt{n}} \Rightarrow 210 = 200 + t_{1-\alpha_b, 31} \frac{43.1}{\sqrt{32}} \Rightarrow t_{1-\alpha_b, 31} = 1.3125 \Rightarrow \alpha_b = 0.0995$$

$$1 - \alpha = 1 - (\alpha_a + \alpha_b) = 1 - 2 \times 0.0995 = 0.8010 \approx 80\%$$

**Rentang keyakinan variansi dan simpangan baku.**

$$\text{prob} \left( \frac{(n-1)S_R^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} < \sigma_R^2 < \frac{(n-1)S_R^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \right) = 1 - \alpha$$

Dengan mengambil tingkat keyakinan  $(1 - \alpha) = 90\%$ , maka  $1 - \alpha/2 = 95\%$  dan  $\alpha/2 = 5\%$ .

$$\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 = \chi_{0.95, 31}^2 = 44.9853 \text{ dan } \chi_{\alpha/2, n-1}^2 = \chi_{0.05, 31}^2 = 19.2806$$

$$\text{prob} \left( \frac{31 \times 1858.0645}{44.9853} < \sigma_R^2 < \frac{31 \times 1858.0645}{19.2806} \right) = 90\%$$

$$\text{prob}(1280 \text{ mm}^2 < \sigma_R^2 < 2987 \text{ mm}^2) = 90\%$$

$$\text{prob}(36 \text{ mm} < \sigma_R < 55 \text{ mm}) = 90\%$$

-o0o-