

PROPERTIES OF RANDOM VARIABLES

SAMPLE MOMENTS

Univariate Random Variables

Random samples, $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

Momen ke- r terhadap O, r^{th} sample moment with respect to O

$$M'_r = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^r}{n}$$

Momen ke- r terhadap nilai rata-rata

$$M_r = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{X})^r}{n}$$

Bivariate Random Variables

Momen ke- r,s terhadap O

$$M'_{r,s} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^r y_i^s}{n}$$

dan terhadap mean

$$M_{r,s} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{X})^r (y_i - \bar{Y})^s}{n}$$

Momen terhadap O dan momen terhadap mean

$$M_r = \sum_{i=1}^n (-1)^s \binom{r}{s} \mu^s M'_{r,s}$$

Apabila data dikelompokkan menjadi sejumlah klas data:

$$M'_i = \sum_{j=1}^k \frac{x_j^i n_j}{n}$$

$$M_i = \sum_{j=1}^k \frac{(x_j - \bar{X})^i n_j}{n}$$

MOMEN DAN EXPEKTASI VARIABEL RANDOM KONTINU

Variabel random kontinu: X, Y bergabung dalam berdistribusi (jointly distributed continuous random variables).

Jika U adalah fungsi X dan Y , maka ekspektasi U , $E(U)$, dapat diperoleh dengan mencari marginal distribution U , $p_U(U)$.

$$U = g(X, Y) \Rightarrow E(U) = E[g(X, Y)] = \int u p_U(u) du$$

Ekspektasi U dapat pula diperoleh melalui persamaan berikut ini.

$$\text{Kontinu: } E[g(X, Y)] = \iint g(X, Y) p_{X, Y}(x, y) dx dy$$

$$\text{Diskrit: } E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{X, Y}(x_i, y_j)$$

Ekspektasi U merupakan nilai rata-rata fungsi $g(X, Y)$.

Momen ke- r, s

$$\text{Kontinu: } \mu'_{r, s} = \iint x^r y^s p_{X, Y}(x, y) dx dy$$

$$\text{Diskrit: } \mu'_{r, s} = \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f_{X, Y}(x_i, y_j)$$

Momen sentral ke- r, s

$$\text{Kontinu: } \mu_{r, s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s p_{X, Y}(x, y) dx dy$$

$$\text{Diskrit: } \mu_{r, s} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^r (y_j - \mu_Y)^s f_{X, Y}(x_i, y_j)$$

Catatan:

$$\begin{aligned} E(X^1, Y^0) &= \iint x^1 y^0 p_{X, Y}(x, y) dx dy \\ &= \int x \left(\int p_{X, Y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int x p_X(x) dx \\ &= \mu_X \end{aligned}$$

$$E[(X - \mu_X)^2] = \text{var}(X)$$

Covariance

Central moment $r = 1, s = 1$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \sigma_{X, Y} = \mu_{1, 1} \\ &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \iint (x - \mu_X)(y - \mu_Y) p_{X, Y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Estimasi covariance berdasarkan sampel

$$s_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{(n-1)}$$

Correlation Coefficient

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

$$r_{X,Y} = \frac{s_{X,Y}}{s_X s_Y}$$

Covariance dan correlation coefficient menunjukkan tingkat keterkaitan kedua variable X dan Y .

Jika $\rho_{X,Y} (\sigma_{X,Y}) > 0$: X besar cenderung berpasangan dengan Y besar, dan sebaliknya.

Jika $\rho_{X,Y} (\sigma_{X,Y}) < 0$: X besar cenderung berpasangan dengan Y kecil, dan sebaliknya.

Jika X dan Y independent, maka $\rho_{X,Y} (\sigma_{X,Y}) = 0$, namun tidak berlaku sebaliknya.

Pembaca disarankan untuk membaca hlm 53-55 *Statistical Method in Hydrology* (Haan, 1981) yang memberikan paparan mengenai correlation coefficient.