Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan
Universitas Gadjah Mada

STATISTIKA

Discrete Probability Distributions

Discrete Probability Distributions

- Distribusi Hipergeometrik
- Bernoulli Processes
  - Distribusi Binomial
  - Distribusi Geometrik
  - Distribusi Binomial Negatif
- Poisson Processes
  - Distribusi Poisson
  - Distribusi Eksponensial
  - Distribusi Gamma
- Distribusi Multinomial

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Hypergeometric Distributions

Hypergeometric Distributions

- Situasi
  - Mengambil sampel (random) berukuran *n* tanpa pengembalian dari suatu populasi berukuran *N*
  - Elemen-elemen di dalam populasi tersebut terbagi kedalam dua kelompok, masing-masing berukuran *k* dan ($N - k$)
- Contoh
  - Suatu populasi berupa
    - hari hujan dan hari tak hujan
    - stasiun dengan data baik dan stasiun dengan data jelek
    - sukses dan gagal

Hypergeometric Distributions

- Persamaan/rumus
  - Jumlah cara/hasil dari memilih *n* elemen dari *N* objek adalah kombinasi

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

  - Jumlah cara/hasil dari memilih/memperoleh *x* sukses dan (*n* – *k*) gagal dari suatu populasi yang terdiri dari *k* sukses dan (*N* – *k*) gagal adalah

$$\binom{k}{x}\binom{N-k}{N-x} = \frac{k!}{(k-x)!\,x!}\,\frac{(N-k)!}{(N-k-n+x)!\,(n-x)!}$$

Hypergeometric Distributions

- Jadi probabilitas mendapatkan *X* = *x* sukses dalam sampel berukuran *n* yang diambil dari suatu populasi berukuran *N* yang memiliki *k* elemen sukses adalah

$$f_X(x;N,n,k)=\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}\bigg/\binom{N}{n}$$

- Distribusi kumulatif dari probabilitas mendapatkan *x* sukses atau kurang adalah

$$F_X(x;N,n,k)=\sum_{i=0}^{x}\binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i}\bigg/\binom{N}{n}$$

Hypergeometric Distributions

- Nilai rata-rata (mean) suatu distribusi hipergeometrik adalah

$$E(X) = \frac{nk}{N}$$

- Variance

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

- Catatan

$$x \le k;\ x \le n;\ k \le N;\ n \le N;\ n - x \le N - k$$

Hypergeometric Distributions

- Contoh
  - Suatu DAS memiliki 12 stasiun pengukuran curah hujan dan diketahui bahwa 2 diantaranya dalam keadaan rusak. Manajemen telah memutuskan untuk mengurangi jumlah stasiun menjadi 6 saja.
  - Apabila 6 stasiun dipilih secara acak dari 12 stasiun tersebut, berapakah peluang terpilihnya stasiun rusak sejumlah 2, 1, atau tidak ada sama sekali?

Hypergeometric Distributions

- Penyelesaian
  - populasi, N = 12
  - jumlah stasiun rusak, k = 2
  - ukuran sampel, n = 6
  - peluang (probability) mendapatkan stasiun rusak sejumlah x = 2, 1, 0 dalam sampel adalah

$$f_X\left(x;N,n,k\right)=\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}\bigg/\binom{N}{n}$$

http://istiarto.staff.ugm.ac.id 5-Sep-14

Hypergeometric Distributions

$$f_X(x;N,n,k)=\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$$

$$x=2:f_X(2;12,6,2)=\binom{2}{2}\binom{12-2}{6-2}\Big/\binom{12}{6}=0.2273$$

$$x=1:f_X(1;12,6,2)=\binom{2}{1}\binom{12-2}{6-1}\Big/\binom{12}{6}=0.5454$$

$$x=0:f_X(0;12,6,2)=\binom{2}{0}\binom{12-2}{6-0}\Big/\binom{12}{6}=0.2273$$

Hypergeometric Distributions

- Ekspektasi jumlah stasiun rusak yang ada di dalam sampel adalah

$$E(X) = \frac{nk}{N} = \frac{6 \times 2}{12} = 1$$

- atau

$$M_1 = \sum_{i=0}^{2} x_i f_X(x_i) = 0(0.2273) + 1(0.5454) + 2(0.2273) = 1$$

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Bernoulli Processes:
Distribusi Binomial

Contoh Ilustrasi

- Investigasi thd suatu populasi
  - karakteristik populasi → variabel
  - nilai variabel
    - nilai ujian: 0 s.d. 100
    - status perkawinan: tidak kawin, kawin, cerai, duda/janda
    - usia: 0 s.d. ...
    - cuaca: cerah, berawan, hujan

Contoh Ilustrasi

- Contoh lain
  - Jawaban pertanyaan:
    - ya / tidak
    - benar / salah
    - menang / kalah
    - lulus / tak-lulus
    - sukses / gagal

sukses
vs
gagal

Distribusi Binomial

- Jika
  - variabel hanya memiliki 2 kemungkinan hasil
  - probabilitas (peluang) kedua hasil tersebut tidak berubah (tetap) apapun hasil experimen sebelumnya

Distribusi Binomial

- Probabilitas hasil suatu distribusi binomial
  - prob(sukses) = p
  - prob(gagal) = $q = 1 - p$

Distribusi Binomial atau Bukan?

Event	Binomial ? (True / False)	Why ?
hujan tak-hujan	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin warga desa	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin bayi yang baru lahir	T	prob tetap

Distribusi Binomial

- Ilustrasi
  - Peluang sukses (S) dalam suatu eksperimen adalah p → prob(S) = p
  - Peluang gagal (G) adalah $q = 1 - p$ → prob(G) = q
  - 1x eksperimen:
    - peluang sukses p
    - peluang gagal q
  - 2x eksperimen:
    - peluang sukses kmd sukses (S,S): pp
    - peluang sukses kmd gagal (S,G): pq
    - peluang gagal kmd sukses (G,S): qp
    - peluang gagal kmd gagal (G,G): qq

Sukses-Gagal dalam 2× Eksperimen

jumlah kesuksesan	cara sukses	jumlah cara sukses	probabilitas	
2	SS	1	pp	$1\ p^2q^0$
1	SG atau GS	2	$pq + qp$	$2\ p^1q^1$
0	GG	1	qq	$1\ p^0q^2$

Sukses-Gagal dalam 3× Eksperimen

jumlah sukses	cara sukses	jumlah cara sukses	probabilitas	
3	SSS	1	1 *ppp*	1 p^3q^0
2	SSG, SGS, GSS	3	3 *ppq*	3 p^2q^1
1	SGG, GSG, GGS	3	3 *pqq*	3 p^1q^2
0	GGG	1	1 *qqq*	1 p^0q^3

Sukses-Gagal dalam 3× atau 5× Eksperimen

- 3× eksperimen:
  - peluang sukses pada experimen ke-3: *qqp*
  - peluang sukses di salah satu experimen: *pqq* + *qpq* + *qqp*
- 5× eksperimen:
  - peluang sukses 2×: *ppqqq* + *pqpqq* + ... + *qqqpp*

$$\binom{5}{2} p^2 q^3 = 10 p^2 q^3$$

Banjir

- Peluang debit melampaui 100 m^3/s dalam satu tahun adalah *p* → *p* = *probability of exceedence* (*success*)
- maka, peluang debit melampaui 100 m^3/s
  - terjadi pada tahun ke-3, tetapi tidak terjadi pada tahun ke-2 dan ke-1 adalah qqp
  - terjadi satu kali pada salah satu tahun dalam periode 3 tahun adalah $pqq + qpq + qqp = 3pq^2$
  - terjadi 2 kali dalam periode 5 tahun adalah $ppqqq + pqpqq + \ldots + qqqpp = 10p^2q^3$

Distribusi Binomial

- Jika
  - peluang sukses p dan peluang gagal $q = 1 - p$
  - probabilitas sukses p tidak berubah apapun hasil eksperimen yang lain
- Maka
  - peluang mendapatkan x kali sukses dalam n kali eksperimen adalah

$$f_X(x;n,p) = \underbrace{\binom{n}{x}}_{\text{koefisien binomial}} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Distribusi Binomial

- Distribusi binomial kumulatif

$$F_X(x;n,p) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

- Nilai rata-rata dan varian

$$E(X) = n\,p$$

$$\mathrm{Var}(X) = n\,p\,q$$

- Skewness coefficient

$$c_s = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$p = q$ → simetris

$q > p$ → negative skew

$q < p$ → positive skew

Distribusi Binomial

- Contoh #1
  - Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A,B,C,D).
  - Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih (mendapatkan dana).
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 3×?
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 5×, 4×, 3×, 2×, 1×, 0×?

Distribusi Binomial

- Setiap kali pemilihan
  - prob(As) = probabilitas kegiatan A dipilih
    prob(As) = ¼ = 0.25 = *p*
  - prob(Ag) = probabilitas kegiatan A tak dipilih
    prob(Ag) = 1 – *p* = 0.75 = *q*
- Dalam 5 kali pemilihan
  - peluang dipilih (sukses) 3 kali adalah

$$f_X(x;n,p) = f_X(3;5,0.25) = \binom{5}{3} 0.25^3\, 0.75^2 = 0.088$$

Distribusi Binomial

- Dalam 5 kali pemilihan (*n* = 5)

koefisien binomial

jumlah sukses	jumlah kejadian	peluang terjadi
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
	∑ =	1.000

Distribusi Binomial

- Contoh #2
  - Diketahui probabilitas (risiko) muka air banjir dalam suatu tahun melebihi elevasi *h* m adalah 0.05. Apabila m.a. banjir melebihi *h* m, maka wilayah A akan tergenang.
  - Apabila setiap kejadian banjir adalah *independent* (banjir pada suatu tahun tak bergantung pada banjir pada tahun yang lain), maka kejadian banjir tersebut dapat dipandang sebagai proses Bernoulli.
  - Berapakah risiko (probabilitas) wilayah A tergenang 2 kali dalam periode 20 tahun?

Distribusi Binomial

- Solusi
  - Misal: x = jumlah kejadian wilayah A tergenang
    n = periode (jumlah tahun) yang ditinjau
    p = risiko m.a. banjir melewati h m
    (risiko wilayah A tergenang)
  - Maka: $x = 2$; $n = 20$; $p = 0.05$
  - Jadi:

$$f_X(x;n,p) = f_X(2;20,0.05) = \binom{20}{2} 0.05^2\, 0.95^{18} = 0.1887$$

Distribusi Binomial

- Contoh #3
  - Agar 90% yakin bahwa debit banjir rancangan yang akan dipilih tidak terlampaui selama periode 10 tahun, berapakah kala ulang debit banjir rancangan tersebut?
- Contoh #4
  - Memperhatikan contoh #3, tariklah kesimpulan mengenai risiko debit banjir kala-ulang *T* tahun terlampaui paling sedikit 1 kali dalam periode *T* tahun.

Distribusi Binomial

- Solusi
  - Misal
    - Q_d = debit banjir rancangan
    - p = probabilitas bahwa debit banjir rancangan terlampaui
    - n = 10 tahun
    - x = jumlah tahun debit banjir rancangan terlampaui
  - Probabilitas debit banjir rancangan tak terlampaui adalah

$$\text{prob}\left(Q < Q_d\right) = 90\%$$

Distribusi Binomial

$$f_X\left(0;10,p\right)=\binom{10}{0}p^0\left(1-p\right)^{10}$$

$$0.90=1\times 1\times\left(1-p\right)^{10}$$

$$p=1-0.90^{0.10}$$

$$p=0.0105 \quad \Rightarrow \quad \text{Kala ulang } T=1/p=95 \text{ tahun}$$

- Jadi untuk memperoleh keyakinan 90% bahwa debit banjir rancangan tak terlampaui dalam 10 tahun, maka diperlukan debit banjir rancangan kala ulang 95 tahun.

Distribusi Binomial

- Apabila dipilih debit banjir kala ulang 10 tahun (p = 10%), maka kemungkinan debit ini dilampaui adalah

$$\text{prob}\left(Q > Q_{10}\right) = 1 - f_X\left(0;10,0.10\right) = 0.651$$

Distribusi Binomial

- Secara umum dapat ditetapkan bahwa risiko debit banjir rancangan kala ulang *T* tahun terlampaui paling sedikit 1× dalam periode *T* tahun adalah:

$$\text{prob}\left(Q > Q_{10}\right) = 1 - f_X\left(0;10,0.10\right) = 0.651$$

atau

$$1 - 1/e \approx 0.63$$

- Jadi terdapat 63% kemungkinan bahwa debit kala ulang *T* tahun terlampaui paling sedikit 1× dalam periode *T* tahun.
- Jika umur rancangan bangunan dan kala ulang rancangan sama, maka sangat besar risiko bahwa debit rancangan tersebut akan dilampaui dalam periode umur rancangan.

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Bernoulli Processes:
Distribusi Geometrik

Distribusi Geometrik

- Situasi
  - Suatu *sequence* proses Bernoulli, namun ingin diketahui probabilitas sukses yang pertama kali terjadi
  - Jika pada pengamatan (eksperimen) ke-x diperoleh sukses pertama kali, maka haruslah dimiliki (x – 1) kali gagal sebelumnya dan diikuti oleh sekali pengamatan dengan hasil sukses

probabilitas → $p^1\ q^{x-1}$

Distribusi Geometrik

- Probabilitas distribusi geometrik

$$f_X(x;p) = pq^{x-1}, \; x = 1,2,3,\ldots$$

- Distribusi geometrik kumulatif

$$F_X(x;p) = \sum_{i=1}^{x} pq^{i-1} = \text{prob}(X \le x), \; x = 1,2,3,\ldots$$

$$\text{berlaku untuk } x \ge 1$$

$$\text{jika } x < 1 \text{ maka } F_X(x;p) = 0$$

Distribusi Geometrik

- Nilai rata-rata

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Varian

$$\mathrm{var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribusi Geometrik

$$E\left(X\right)=\sum_{x=1}^{\infty} x\,p\,q^{x-1},\quad x=1,2,3,\ldots$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty} x\,p\left(1-p\right)^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty} x\left(1-p\right)^{x-1}$$

$$=p\sum_{x=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial p}\left(1-p\right)^{x}=-p\,\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{p}=\frac{1}{p}$$

Distribusi Geometrik

- Contoh
  - Berapakah probability suatu banjir 10-tahunan akan terjadi pertama kali dalam 5 tahun pertama setelah proyek selesai?
  - Berapakah probability banjir tersebut akan terjadi pertama kali secepat-cepatnya pada tahun ke-5 setelah proyek selesai?

Distribusi Geometrik

- Solusi
  - Probabilitas banjir terjadi pertama kali pada tahun ke-5 adalah:

$$f_X(5;0.10) = 0.10 \times (1 - 0.10)^4$$
$$= 0.0656$$

Distribusi Geometrik

- Solusi
  - Probability banjir terjadi pertama kali paling cepat pada tahun ke-5 (jadi dapat terjadi pada tahun ke-5, 6, 7, 8, 9, atau 10) dapat dicari dengan memperhatikan bahwa banjir tidak datang selama periode 4 tahun pertama.
  - Dengan demikian probability banjir terjadi pertama kali paling cepat pada tahun ke-5 adalah:

$$q^4 = (1 - 0.10)^4$$

$$= 0.6561$$

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Bernoulli Processes:
Distribusi Binomial Negatif

Distribusi Binomial Negatif

- Situasi
  - Ingin diketahui probabilitas diperolehnya sukses ke-*k* terjadi pada eksperimen ke-*x* (tentu saja $x \geq k$).
  - Dalam hal ini, pastilah terdapat $(k - 1)$ sukses pada $(x - 1)$ eksperimen, yang mendahului sukses ke-*k* pada eksperimen ke-*x*.
  - Probabilitas $(k - 1)$ sukses dalam $(x - 1)$ eksperimen adalah:

$$\binom{x-1}{k-1} p^{k-1} q^{x-k}$$

→ distribusi binomial

Distribusi Binomial Negatif

- Sedangkan probabilitas sukses pada eksperimen ke-*x* adalah *p*.
- Jadi probabilitas sukses ke-*k* pada pengamatan ke-*x* adalah:

$$f_X(x;k,p)=\binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k},\quad x=k,k+1,\ldots$$

- Nilai rata-rata dan varian

$$E(X)=\frac{k}{p} \qquad \mathrm{var}(X)=\frac{k\,q}{p^2}$$

Distribusi Binomial Negatif

- Contoh
  - Berapakah probabilitas banjir 10-tahunan akan terjadi keempat kalinya pada tahun ke-40?
- Solusi

$$f_X(40;4,0.10) = \binom{40-1}{4-1} 0.10^4 (1-0.10)^{40-4}$$

$$= \binom{39}{3} 0.10^4\, 0.90^{36}$$

$$= 0.0206$$

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Poisson Processes:
Distribusi Poisson

Distribusi Poisson

- Situasi
  - Proses Bernoulli dalam suatu interval waktu → *p* adalah probabilitas terjadinya suatu event dalam interval waktu tersebut.
  - Jika interval waktu *t* sangat pendek sedemikian hingga probabilitas *p* menjadi kecil dan jumlah pengamatan (eksperimen) *n* bertambah sedemikian hingga *np* konstan, maka
    - ekspektasi jumlah kejadian dalam interval waktu total → tetap

Distribusi Poisson

- Sifat
  - Proses Poisson adalah suatu proses diskrit pada skala waktu kontinu.
  - Oleh karena itu, distribusi probabilitas jumlah *event* dalam suatu waktu *T* adalah sebuah distribusi diskrit, akan tetapi distribusi probabilitas waktu antar *events* serta waktu sampai ke *event* ke-*n* adalah distribusi kontinu.

Distribusi Poisson

- Probabilitas distribusi poisson

$$f_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots \text{ dan } \lambda = np > 0$$

- Distribusi geometrik kumulatif

$$F_X(x;\lambda) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

Distribusi Poisson

- *Mean* dan *variance*

$$E(X) = \lambda \qquad \mathrm{var}(X) = \lambda$$

- *Skewness coefficient*

$$c_s = \lambda^{-1/2}$$

Distribusi Poisson

- Contoh #1
  - Probabilitas banjir 20-tahunan (kala ulang 20 tahun) akan terjadi dalam 10 tahun:
    - dengan memakai distribusi binomial

$$f_X(1;10,0.05) = \binom{10}{1} 0.05 \cdot 0.95^9 = 0.315$$

    - dengan memakai distribusi poisson

$$\lambda = np = 10 \cdot 0.05 = 0.5$$

$$f_X(1;0.05) = \frac{0.5 e^{-0.5}}{1!} = 0.303$$

Distribusi Poisson

- Contoh #2
  - Probabilitas 5 kejadian banjir 2-tahunan dalam 10 tahun adalah:
    - dengan memakai distribusi binomial

$$f_X(5;10,0.5) = \binom{10}{5} 0.5^5 \cdot 0.5^{10-5} = 0.246$$

    - dengan memakai distribusi poisson

$$\lambda = np = 10 \cdot 0.5 = 5$$

$$f_X(5;5) = \frac{5^5 e^{-5}}{5!} = 0.176$$

→ *n* tidak cukup besar untuk mendapatkan pendekatan yang baik dengan distribusi poisson

Distribusi Poisson

- Contoh #3
  - Probabilitas kurang daripada 5 kejadian (max. 4 kejadian) banjir 20-tahunan dalam 100 tahun adalah:

$$n \gg \Rightarrow \text{ distribusi poisson}$$

$$\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$$

$$\text{prob}\left(X < 5\right) = \text{prob}\left(X \le 4\right) = F_X\left(4;5\right)$$

$$F_X\left(4;5\right) = \sum_{i=0}^{4} \frac{5^i e^{-5}}{i!} = 0.44$$

CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Poisson Processes:
Distribusi Exponensial

Distribusi Eksponensial

- Distribusi probabilitas waktu (interval) T di antara kejadian-kejadian suatu event dapat dihitung sbb.

$$\text{prob}\left(T \le t\right) = 1 - \text{prob}\left(T > t\right)$$

$$\begin{aligned}\text{prob}\left(T > t\right) &= \text{probability tidak terjadi event dalam waktu } t\\ &= f_X\left(0;\lambda t\right)\\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Distribusi Eksponensial

- Distribusi eksponensial kumulatif

$$\mathrm{prob}\left(\mathrm{T} \le \mathrm{t}\right) = P_T\left(t;\lambda\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- *Probability density function*, pdf

$$p_T\left(t;\lambda\right) = \frac{\mathrm{d}P_T\left(t;\lambda\right)}{\mathrm{d}t} = \lambda\, e^{-\lambda t}$$

- *Mean* dan *variance*

$$E\left(T\right) = \lambda^{-1} \qquad \mathrm{var}\left(T\right) = \lambda^{-2}$$

CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Poisson Processes:
Distribusi Gamma

Distribusi Gamma

- Distribusi probabilitas waktu sampai terjadinya suatu *event* ke-*n* kalinya.
- pdf

$$p_T(t;n,\lambda) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \qquad \begin{array}{l} t > 0 \\ \lambda > 0 \\ n = 1,2,\ldots \end{array}$$

- *Mean* dan *variance*

$$E(T) = \frac{n}{\lambda} \qquad \mathrm{var}(T) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Distribusi Gamma

- Contoh
  - Berapakan risiko terjadi banjir ke-4 kalinya dalam waktu 10 tahun jika risiko banjir per tahun adalah 0.10?
- Solusi

$$t = 10, n = 4, \gamma = np = 4 \times 0.10 = 0.4$$

$$p_T\left(10;4,0.4\right) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{\left(n-1\right)!}$$

$$= \frac{0.4^4 \times 10^{4-3} \times e^{-0.4\left(10\right)}}{\left(4-1\right)!}$$

$$= 0.78$$

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Distribusi Multinomial

Distribusi Multinomial

- Distribusi binomial: sukses *vs* gagal, *yes vs no*
- Distribusi multinomial
  - hasil $x_1, x_2, \ldots, x_k$
  - prob $p_1, p_2, \ldots, p_k$

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_k;p_1,p_2,\ldots,p_k\right)=\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$$

Distribusi Multinomial

- atau

$$f_{\underline{X}}\left(\underline{x};n,\underline{p}\right)=n!\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\,x_i}}{x_i!}$$

dalam persamaan tsb

$\underline{X}, \underline{x},$ dan $\underline{p}$ adalah vektor $1 \times k$

Syarat $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ dan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

- *Mean* dan *variance*

$$E\left(X_i\right)=np_i \qquad \text{var}\left(X_i\right)=np_i\left(1-p_i\right)$$

Distribusi Multinomial

[Contoh multinomial distribution]

Terima kasih