

UJIAN AKHIR SEMESTER STATISTIKA DAN PROBABILITAS

AMN – IST – ISI

Rabu, 15 Juni 2016 | 100 menit

[Boleh membuka buku | Tidak boleh memakai komputer]

SOAL 1 [30%]

Hasil sigi (survei) lalu lintas di suatu kawasan, yang dibagi menjadi delapan zona, menghasilkan data jumlah perjalanan dan jumlah mobil setiap hari seperti disajikan pada tabel di bawah ini.

zona	jumlah mobil	jumlah perjalanan
1	240	780
2	200	420
3	90	100
4	500	1340
5	440	1100
6	120	440
7	400	1000
8	330	900

(a) Temukanlah hubungan antara kedua variabel (jumlah perjalanan sebagai fungsi jumlah mobil) dengan teknik regresi linear, metode kuadrat terkecil. [Bobot 15%]

Catatan: kedua variabel adalah variabel diskrit, jumlah perjalanan dan jumlah mobil adalah bilangan bulat positif.

(b) Berapakah koefisien korelasi hubungan linear kedua variabel tersebut? [Bobot 15%]

PENYELESAIAN

(a) Regresi linear [bobot nilai 15%]

Jika jumlah perjalanan dinyatakan sebagai variabel Y dan jumlah mobil dalam perjalanan tersebut dinyatakan sebagai variabel X , maka hubungan antara kedua variabel, yang diperoleh dari regresi linear, dapat dinyatakan dalam persamaan di bawah ini:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X$$

Variabel \hat{Y} atau sering pula disimbolkan dengan Y_r adalah jumlah perjalanan sebagai fungsi jumlah mobil. Nilai a_0 dan a_1 dalam persamaan regresi dicari dengan persamaan berikut:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad \text{dan} \quad a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X}$$

Dalam persamaan di atas, n adalah ukuran sampel atau jumlah data, \bar{Y} dan \bar{X} adalah jumlah perjalanan rata-rata dan jumlah mobil rata-rata. Hitungan regresi linear dengan metode kuadrat terkecil disajikan pada Tabel 1 pada halaman setelah halaman ini. Dari Tabel 1, diperoleh informasi sebagai berikut:

- jumlah data, $n = 8$;
- jumlah perjalanan rata-rata, $\bar{Y} = (\sum_{i=1}^n y_i)/n = 6.080/8 = 760$;
- jumlah mobil rata-rata, $\bar{X} = (\sum_{i=1}^n x_i)/n = 2.320/8 = 290$.

Koefisien a_1 dan a_0 pada persamaan garis regresi dihitung sebagai berikut:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{8 \times 2.184.000 - 2.320 \times 6.080}{8 \times 832.600 - 2.320^2} = 2.6333.$$

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X} = 760 - 2.6333 \times 290 = -3.6546.$$

Dengan demikian, hubungan antara jumlah perjalanan dan jumlah mobil yang diperoleh dari regresi linear antara kedua variabel adalah:

$$\hat{Y} = -3.6546 + 2.6333 X \text{ atau } \hat{y}_i = 2.6333 x_i - 3.6446.$$

TABEL 1 HITUNGAN REGRESI LINEAR HUBUNGAN ANTARA JUMLAH PERJALANAN DAN JUMLAH MOBIL DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	240	780	187.200	57.600
2	200	420	84.000	40.000
3	90	100	9.000	8.100
4	500	1.340	670.000	250.000
5	440	1.100	484.000	193.600
6	120	440	52.800	14.400
7	400	1.000	400.000	160.000
8	330	900	297.000	108.900
Σ	2.320	6.080	2.184.000	832.600

(b) Koefisien korelasi [bobot nilai 15%]

Koefisien korelasi, r , dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$r = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{Y})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}} \text{ atau}$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2}}$$

Hitungan untuk mendapatkan nilai S_t dan nilai S_r dilakukan secara tabulasi dalam Tabel 2 bawah ini. Hitungan mengacu kepada persamaan r di atas yang di sebelah kiri.

TABEL 2 HITUNGAN KOEFISIEN KORELASI ANTARA JUMLAH PERJALANAN DAN JUMLAH MOBIL

i	x_i	y_i	$(y_i - \bar{Y})^2$	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	240	780	400	628	23.104
2	200	420	115.600	523	10.609
3	90	100	435.600	233	17.689
4	500	1.340	336.400	1.313	729
5	440	1.100	115.600	1.155	3.025
6	120	440	102.400	312	16.384
7	400	1.000	57.600	1.050	2.500
8	330	900	19.600	865	1.225
		$S_t =$	1.183.200	$S_r =$	75.265

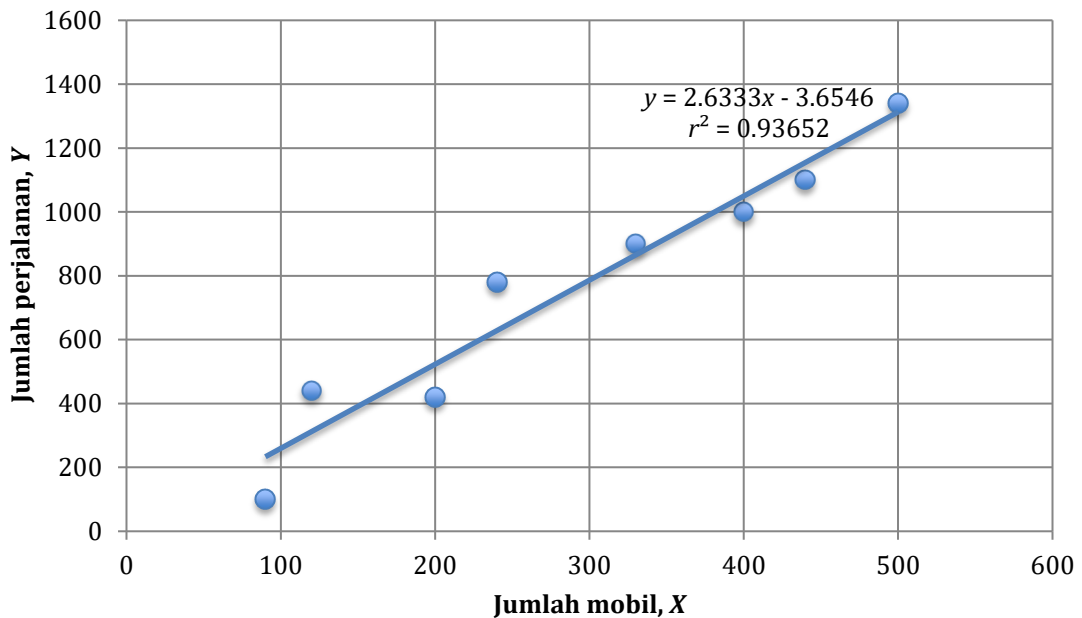
Catatan: \hat{y}_i adalah jumlah perjalanan, variabel diskrit, bilangan bulat.

Koefisien korelasi:

$$r = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{1.183.200 - 75.265}{1.183.200} = 0.9677.$$

Akar kuadrat dapat bernilai positif atau negatif. Koefisien korelasi dapat bernilai positif atau negatif. Karena gradien garis regresi, a_1 , bernilai positif, atau dengan kata lain jumlah perjalanan

berbanding lurus dengan jumlah mobil, maka koefisien korelasi pun bernilai positif, $r = 0.9677$. Gambar 1 menyajikan data secara grafis. Gambar ini tidak wajib dibuat karena soal tidak memintanya.



GAMBAR 1 HUBUNGAN LINEAR ANTARA JUMLAH PERJALANAN DAN JUMLAH MOBIL

SOAL 2 [70%]

Angka-angka di bawah ini adalah kuat desak beton dalam satuan MPa yang diperoleh dari uji laboratorium terhadap 36 buah sampel.

28	26	30	28	29	32
34	26	28	34	31	28
33	32	30	30	30	32
26	28	30	30	26	24
34	28	32	32	28	30
34	32	37	30	30	32

- Buatlah tabel frekuensi dengan rentang kelas 2 MPa, batas bawah rentang kelas pertama adalah 23 MPa (rentang kelas pertama 23-25 MPa). [Bobot 15%]
- Hitunglah nilai rata-rata, median, dan modus (*mode*) kuat desak beton dengan memakai tabel frekuensi. [Bobot 15%]
- Hitunglah nilai simpangan baku kuat desak beton dengan memakai tabel frekuensi. [Bobot 10%]
- Hitunglah rentang keyakinan kuat desak rata-rata dengan tingkat keyakinan 90%. [Bobot 15%]
- Ujilah hipotesis yang menyatakan bahwa kuat desak rata-rata beton tersebut adalah 32 MPa dengan tingkat keyakinan 95%. [Bobot 15%]

PENYELESAIAN

(a) Tabel frekuensi [bobot nilai 15%]

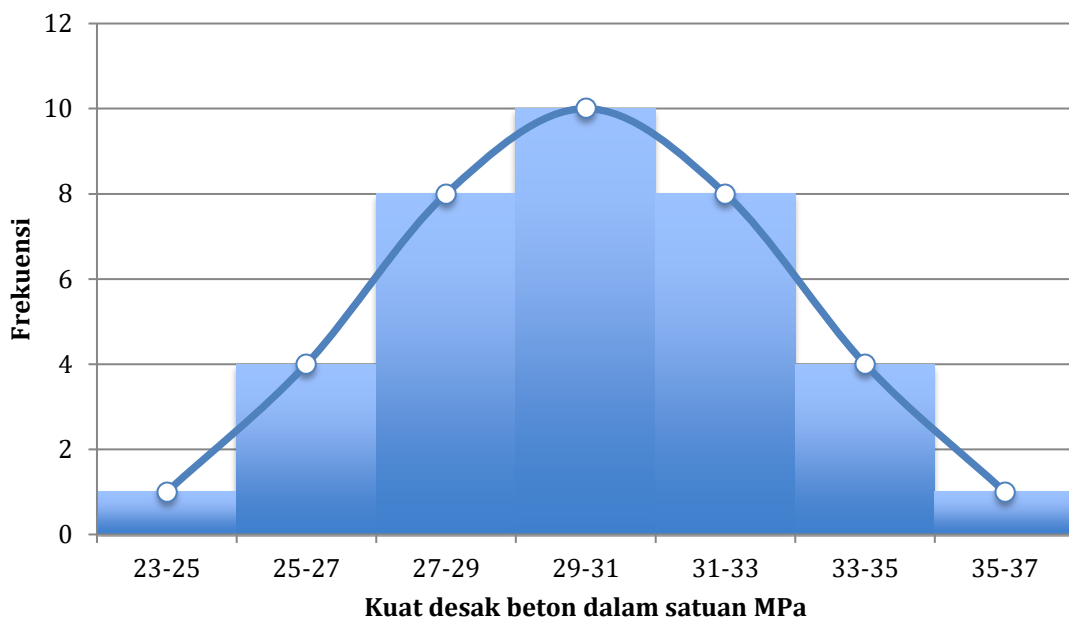
Tabel frekuensi adalah salah satu cara penyajian data. Kuat desak beton adalah variabel random kontinu. Data di atas diperoleh dari uji laboratorium. Data kuat desak tersebut adalah data sampel, bukan data populasi. Tabel frekuensi disajikan pada Tabel 3 di bawah ini.

TABEL 3 KUAT DESAK BETON HASIL UJI LABORATORIUM

<i>i</i>	Kuat desak, <i>X</i> [MPa]		Frekuensi <i>f_i</i>	<i>f_ix_i</i>	<i>f_ix_i²</i>
	Kelas	<i>x_i</i>			
1	23 - 25	24	1	24	576
2	25 - 27	26	4	104	2704
3	27 - 29	28	8	224	6272
4	29 - 31	30	10	300	9000
5	31 - 33	32	8	256	8192
6	33 - 35	34	4	136	4624
7	35 - 37	36	1	36	1296
		Σ =	36	1080	32664

Ukuran sampel atau jumlah data dalam sampel uji kuat desak beton adalah $\sum f_i = 36$. Operator penjumlahan $\sum f_i$ dibaca $\sum_{i=1}^7 f_i$. Indeks pada operator penjumlahan tidak dituliskan untuk menyederhanakan penulisan.

Data dapat pula disajikan dalam bentuk grafik batang atau histogram seperti disajikan pada Gambar 2. Grafik ini tidak wajib dibuat karena soal tidak memintanya. Perhatikan bentuk kurva pada gambar tersebut. Tampak jelas bahwa bentuk kurva mengindikasikan bahwa sampel kuat desak beton berdistribusi normal.



GAMBAR 2 KUAT DESAK BETON HASIL UJI LABORATORIUM

(b) Nilai rata-rata, median, modus [bobot nilai 15%]

Nilai rata-rata dihitung dengan bantuan tabel frekuensi, yaitu dengan menambahkan satu kolom yang berisi nilai frekuensi dikalikan dengan nilai data, $f_i x_i$.

Kuat desak rata-rata adalah:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1080}{36} = 30 \text{ MPa.}$$

Nilai median dan nilai modus dapat dilihat langsung pada tabel frekuensi di atas:

- median kuat desak adalah 30 MPa atau 29-31 MPa,
- modus kuat desak adalah 30 MPa atau 29-31 MPa.

(c) Simpangan baku [bobot nilai 10%]

Simpangan baku kuat desak beton dihitung dengan bantuan tabel frekuensi, yaitu dengan menambahkan kolom yang berisi $f_i x_i^2$. Nilai simpangan baku adalah:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{(\sum f_i) - 1}} = \sqrt{\frac{\sum (f_i x_i^2) - (\sum f_i)(\bar{X})^2}{(\sum f_i) - 1}} = \sqrt{\frac{32664 - 36 \times 30^2}{36 - 1}} = 2.7464 \text{ MPa.}$$

(d) Rentang keyakinan kuat desak rata-rata [bobot nilai 15%]

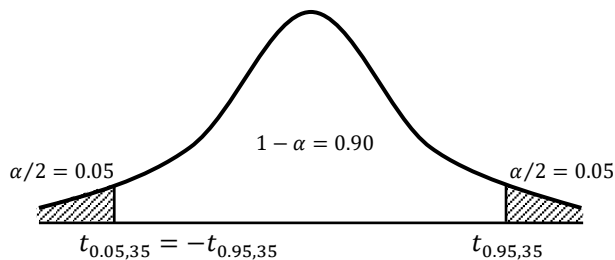
Rentang keyakinan kuat desak rata-rata, dengan asumsi bahwa kuat desak beton tersebut berdistribusi normal, dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\text{prob}(l \leq \mu_x \leq u) = 1 - \alpha$$

Dalam persamaan di atas, l adalah batas bawah rentang keyakinan, u adalah batas atas rentang keyakinan, dan $1 - \alpha$ adalah tingkat keyakinan. Batas bawah dan batas atas rentang keyakinan kuat desak beton rata-rata dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$l = \bar{X} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2, n-1} \quad \text{dan} \quad u = \bar{X} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2, n-1}$$

Nilai $t_{1-\alpha/2, n-1}$ adalah nilai t pada pdf distribusi t sedemikian hingga $\text{prob}(T < t) = 1 - \alpha/2$ pada nilai derajat kebebasan $\nu = n - 1$, dan n ukuran sampel (jumlah data). Karena tingkat keyakinan telah ditetapkan, yaitu $1 - \alpha = 90\%$, maka $1 - \alpha/2 = 95\%$. Nilai $t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0.95, 35}$ dibaca pada tabel distribusi t . Bacaan tabel menjadi mudah dilakukan dengan cara membuat sketsa pdf distribusi t .



Dari tabel distribusi t , diperoleh:

$$t_{0.95, 35} = 1.6896$$

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang adalah:

$$l = 30 - 1.6896 \frac{2.7464}{\sqrt{36}} = 29.23 \text{ MPa.}$$

$$u = 30 + 1.6896 \frac{2.7464}{\sqrt{36}} = 30.77 \text{ MPa.}$$

Dengan demikian, rentang keyakinan 90% kuat desak rata-rata adalah:

$$\text{prob}(29.33 \text{ MPa} \leq \mu_x \leq 30.77 \text{ MPa}) = 0.90.$$

(e) Uji hipotesis kuat desak rata-rata [bobot nilai 15%]

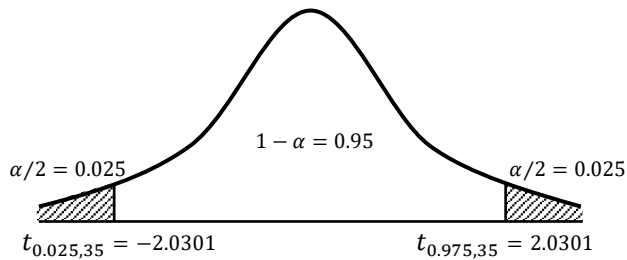
$$H_0: \mu_0 = 32 \text{ MPa}$$

$$H_1: \mu_0 \neq 32 \text{ MPa}$$

Karena varians populasi tidak diketahui (σ_x^2 tidak diketahui), maka statistika uji adalah:

$$T = \frac{\sqrt{n}}{s_x} (\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{36}}{2.7464} (30 - 32) = -4.3693.$$

Batas-batas penerimaan atau penolakan statistika uji dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 95\%$ dan jumlah sampel $n = 36$ adalah: $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 35}$ dan $t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0.975, 35}$.



Dari tabel distribusi t , diperoleh:

$$t_{0.975, 35} = 2.0301$$

$$t_{0.025, 35} = -2.0301$$

Dengan demikian, statistika uji $T = -4.3693$ berada di luar rentang penerimaan hipotesis H_0 ($|T| > t_{0.975, 35}$), sehingga hipotesis yang menyatakan bahwa kuat desak rata-

rata adalah 32 MPa tidak diterima atau ditolak.

-o0o-