

# UJIAN TENGAH SEMESTER

## STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Dr. Ir. Istiarto, M.Eng. | Rabu, 10 April 2013 | 100 menit  
[ Boleh Membuka Buku | Tidak Boleh Memakai Komputer ]

### SOAL A

Seorang mahasiswa menemukan fakta bahwa probabilitas aliran listrik di kos tempat tinggalnya terputus (listrik padam) per minggu adalah 7%. Apabila listrik padam adalah variabel random dan dengan memakai pendekatan distribusi binomial, hitunglah:

- 1) probabilitas terjadi 1 kali listrik padam dalam periode 4 minggu,
- 2) probabilitas listrik tidak pernah padam dalam periode 4 minggu,
- 3) probabilitas terjadi maksimum 2 kali listrik padam dalam periode 4 minggu.

### PENYELESAIAN

Probabilitas suatu variabel random berdistribusi binomial dinyatakan dengan persamaan:

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Diketahui bahwa  $p = 0.07$  dan  $n = 4$ .

Probabilitas terjadi 1 kali listrik padam dalam periode 4 minggu =  $f_X(1; 4, 0.07)$

$$f_X(1; 4, 0.07) = \binom{4}{1} 0.07^1 (1 - 0.07)^{4-1} = \frac{4!}{(4-1)! 1!} 0.07^1 \times 0.93^3 = 0.2252$$

Probabilitas listrik tidak pernah padam dalam periode 4 minggu =  $f_X(0; 4, 0.07)$

$$f_X(0; 4, 0.07) = \binom{4}{0} 0.07^0 (1 - 0.07)^{4-0} = 1 \times 1 \times 0.93^4 = 0.7481$$

Probabilitas terjadi maksimum 2 kali listrik padam dalam periode 4 minggu =  $F_X(2; 4, 0.07)$ , yaitu probabilitas kumulatif terjadi listrik padam sampai dengan 2 kali (0, 1, dan 2 kali)

$$F_X(x; n, p) = \sum_{i=0}^x f_X(i; n, p)$$

$$\begin{aligned} F_X(2; 4, 0.07) &= \sum_{i=0}^2 f_X(i; 4, 0.07) = f_X(0; 4, 0.07) + f_X(1; 4, 0.07) + f_X(2; 4, 0.07) \\ &= 0.7481 + 0.2252 + \frac{4!}{(4-2)! 2!} 0.07^2 (1 - 0.07)^{4-2} \\ &= 0.7481 + 0.2252 + 0.0254 = 0.9987 \end{aligned}$$

### SOAL B

Mahasiswa pada Soal A di atas juga mencatat volum pemakaian air bulanan ( $Q$ ) di kos tempat tinggalnya dan mendapati bahwa volum air rerata yang dipakai adalah  $100 \text{ m}^3$  dengan simpangan baku  $8 \text{ m}^3$ . Dengan asumsi bahwa volum air tersebut berdistribusi normal, hitunglah:

- 1) probabilitas volum pemakaian air kurang daripada  $110 \text{ m}^3$ ,  $\text{prob}(Q < 110 \text{ m}^3)$ ,
- 2) probabilitas volum pemakaian air antara  $94 \text{ s.d. } 102 \text{ m}^3$ ,  $\text{prob}(94 < Q [\text{m}^3] < 102)$ ,
- 3) probabilitas volum pemakaian air melebihi  $112 \text{ m}^3$ ,  $\text{prob}(Q > 112 \text{ m}^3)$ .

### PENYELESAIAN

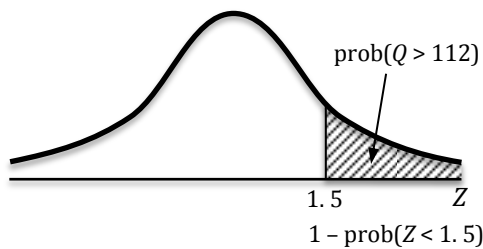
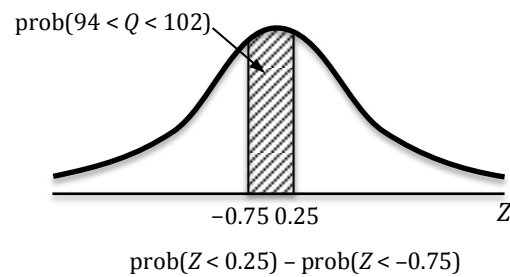
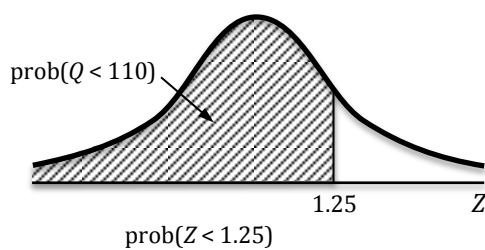
Diketahui bahwa  $Q$  berdistribusi normal dengan  $\bar{Q} = 100 \text{ m}^3/\text{s}$  dan  $s_Q = 8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Gunakan tabel distribusi normal standar untuk menghitung berbagai nilai probabilitas yang ditanyakan pada Soal

B. Untuk menggunakan tabel distribusi normal standar, nilai  $Q$  perlu diubah menjadi nilai  $Z$  menurut persamaan transformasi berikut:

$$Z_Q = \frac{Q - \bar{Q}}{s_Q}$$

$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$			Tabel
94	-0.75	prob( $Q < 110$ m <sup>3</sup> /s)	prob( $Z < 1.25$ )	0.8944
102	0.25	prob( $94 < Q$ (m <sup>3</sup> /s) $< 102$ )	prob( $-0.75 < Z < 0.25$ )	0.3721
110	1.25	prob( $Q > 112$ m <sup>3</sup> /s)	prob( $Q > 1.5$ )	0.0668
112	1.5			

Dalam membaca tabel distribusi normal standar, akan lebih mudah apabila disertai dengan sketsa pdf distribusi normal standar.



### SOAL C

Data temperatur udara ( $T$  dalam °C) di suatu kota menunjukkan bahwa distribusi probabilitas temperatur udara dapat dinyatakan dengan persamaan pdf di bawah ini:

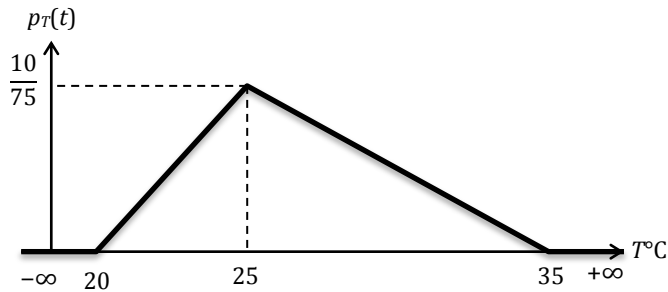
$$p_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{75}(t - 20) & \text{untuk } 20 < t < 25 \\ \frac{1}{75}(35 - t) & \text{untuk } 25 < t < 35 \\ 0 & \text{untuk nilai } t \text{ yang lain} \end{cases}$$

- 1) Buat sketsa grafik pdf tersebut.
- 2) Cari cdf.
- 3) Buat sketsa grafik cdf.
- 4) Hitung probabilitas temperatur udara kurang daripada 24°C,  $\text{prob}(T < 24^\circ\text{C})$ .
- 5) Hitung probabilitas temperatur udara lebih daripada 27°C,  $\text{prob}(T > 27^\circ\text{C})$ .
- 6) Hitung probabilitas temperatur udara antara 24°C s.d. 27°C,  $\text{prob}(24 < T [^\circ\text{C}] < 27)$ .

### PENYELESAIAN

Temperatur udara  $T$  adalah variabel random kontinu dan dapat bernilai dari  $-\infty$  s.d.  $+\infty$ . Dari pdf temperatur udara, dapat diketahui bahwa distribusi  $T$  didefinisikan pada empat rentang, yaitu pada

rentang kurang daripada 20°C, antara 20°C s.d. 25°C, antara 25°C s.d. 35°C, dan rentang lebih daripada 35°C. Sketsa pdf adalah sbb.



Kurva cdf dicari dengan mengintegalkan pdf pada keempat rentang  $T$ .

Untuk  $t < 20^\circ\text{C}$ .

$$P_T(t) = \int p(t) dt = \int 0 dt = C$$

$$\text{Syarat batas: } P_T(20) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Untuk  $20^\circ\text{C} < t < 25^\circ\text{C}$ .

$$P_T(t) = \int p(t) dt = \int \frac{2}{75}(t - 20) dt = \frac{2}{75} \left( \frac{t^2}{2} - 20t + C \right)$$

$$\text{Syarat batas: } P_T(20) = 0.$$

$$P_T(20) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{75} \left( \frac{20^2}{2} - 20^2 + C \right) \Leftrightarrow C = 200$$

$$P_T(t) = \frac{2}{75} \left( \frac{t^2}{2} - 20t + 200 \right) = \frac{1}{75} (t^2 - 40t + 400)$$

Untuk  $25^\circ\text{C} < t < 35^\circ\text{C}$ .

$$P_T(t) = \int p(t) dt = \int \frac{1}{75}(35 - t) dt = \frac{1}{75} \left( 35t - \frac{t^2}{2} + C \right)$$

$$\text{Syarat batas: } P_T(35) = 1.$$

$$P_T(35) = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{75} \left( 35^2 - \frac{35^2}{2} + C \right) \Leftrightarrow C = -\frac{1075}{2}$$

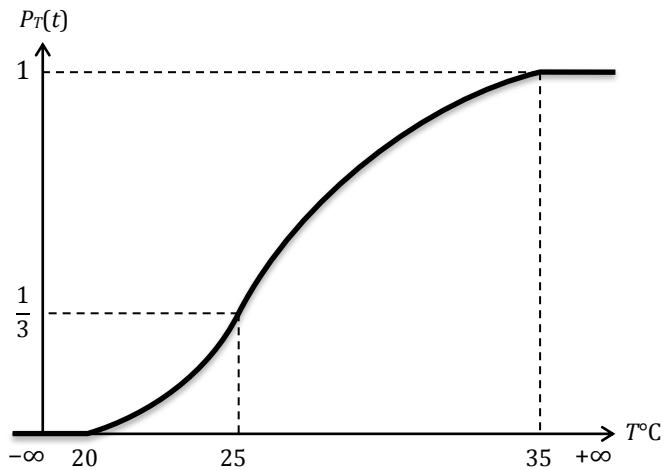
$$P_T(t) = \frac{1}{75} \left( 35t - \frac{t^2}{2} - \frac{1075}{2} \right) = -\frac{1}{150} (t^2 - 70t + 1075)$$

Untuk  $t > 35^\circ\text{C}$ , berlaku syarat batas:  $P_T(35) = 1 \Leftrightarrow P_T(t) = 1$ .

Dengan demikian, cdf temperatur udara adalah sbb.

$$P_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t < 20 \\ \frac{1}{75}(t^2 - 40t + 400) & \text{untuk } 20 < t < 25 \\ -\frac{1}{150}(t^2 - 70t + 1075) & \text{untuk } 25 < t < 35 \\ 1 & \text{untuk } t > 35 \end{cases}$$

Sketsa cdf.

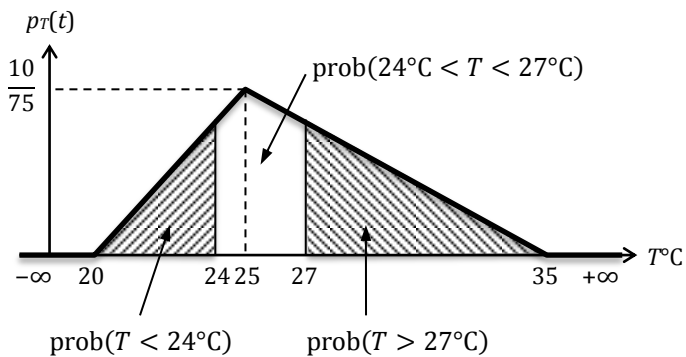


Nilai-nilai probabilitas dapat dihitung dengan cdf atau, karena bentuk kurva pdf sederhana, maka nilai probabilitas dapat pula diperoleh dari luas daerah di bawah kurva pada batas-batas yang diinginkan.

$$\text{prob}(T < 24^\circ\text{C}) = P_T(24) = \frac{1}{75}(24^2 - 40 \times 24 + 400) = 0.2133$$

$$\begin{aligned} \text{prob}(T > 27^\circ\text{C}) &= 1 - \text{prob}(T < 27^\circ\text{C}) = 1 - P(27) = 1 + \frac{1}{150}(27^2 - 70 \times 27 + 1075) \\ &= 1 - 0.5733 = 0.4267 \end{aligned}$$

$$\text{prob}(24^\circ\text{C} < T < 27^\circ\text{C}) = P_T(27) - P_T(24) = 0.5733 - 0.2133 = 0.36$$



-o0o-