



Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

PROBABILITAS

Statistika dan Probabilitas

Peluang (Probabilitas)

2

- ❑ Peluang/Probabilitas/Risiko
 - ❑ Peluang
 - ❑ Risiko
 - ❑ Probabilitas

Probabilitas

3

- ❑ Probabilitas – Peluang – Kemungkinan
- ❑ Mengapa probabilitas ?
 - ❑ Orang tidak dapat memastikan nilai suatu proses (misal erupsi gunung berapi) berdasarkan data erupsi selama waktu yang lalu sampai saat ini.
 - ❑ Sifat stokastik ataupun ketidak-pastian merupakan sifat yang melekat pada proses (yang melibatkan) alam.

Keterlambatan kedatangan bus

4

Keterlambatan (menit)	Frekuensi	Frekuensi relatif	Persentase
1	2	0.07	7%
2	3	0.10	10%
3	8	0.27	27%
4	4	0.13	13%
5	5	0.17	17%
6	3	0.10	10%
7	2	0.07	7%
8	0	0.00	0%
9	1	0.03	3%
10	2	0.07	7%
Jumlah =	30	1	100%

Dapatkah Sdr memperkirakan berapa menit keterlambatan kedatangan bus pada jadwal berikutnya?

Probabilitas

5

□ Definisi 1

- Andaikata suatu peristiwa random dapat terjadi dalam n cara yang masing-masing memiliki kemungkinan yang sama, dan apabila sejumlah n_a cara memberikan hasil A , maka probabilitas terjadinya peristiwa dengan hasil A adalah n_a/n

$$\text{prob}(A) = \frac{n_a}{n}$$

- Dalam definisi di atas, n adalah himpunan semua yang mungkin terjadi.
- Definisi di atas berasumsi bahwa n diketahui, padahal himpunan semua cara yang mungkin pada kenyataannya tidak selalu diketahui atau tidak terjadi atau tidak diamati atau tidak dihitung.

Probabilitas

6

□ Definisi 2

- Andaikata suatu peristiwa random terjadi berkali-kali dalam jumlah yang sangat besar, n kali, dan sejumlah n_a kali memiliki hasil A , maka probabilitas peristiwa dengan hasil A adalah

$$\text{prob}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_a}{n}$$

- Definisi di atas berbeda dengan definisi #1 dalam hal-hal berikut:
 - Probabilitas suatu kejadian “diperkirakan” (*can be estimated*) berdasarkan observasi sejumlah n kali.
 - n di sini tidak/bukan merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin; dalam hal ini, tidak diperlukan untuk mengetahui atau melakukan observasi terhadap semua kemungkinan
 - Setiap cara yang mungkin terjadi (dalam n tersebut) tidak harus memiliki kemungkinan yang sama untuk terjadi.

Probabilitas

7

- ❑ Definisi 2: butuh berapa n ?
 - ❑ Contoh
 - Pada 2 set pengamatan (sampel) yang tidak saling terkait/tergantung, perkiraan probabilitas kejadian A dapat ditetapkan berdasarkan masing-masing sampel tersebut.
 - Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama satu dengan yang lain.
 - Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama dengan perkiraan probabilitas A yang ditetapkan dengan pengamatan sejumlah tak-berhingga kali.
 - ❑ Problem: berapa jumlah pengamatan, n , yang diperlukan untuk mendapatkan estimasi probabilitas A yang dapat diterima?

Probabilitas

8

- ❑ Kisaran (*range*) probabilitas
 - ❑ Dari kedua definisi, kisaran probabilitas adalah 0 s.d. 1.
 - ❑ $\text{prob}(A) = 0$ “hampir” tidak mungkin terjadi
(nearly impossible)
 - ❑ $\text{prob}(A) = 1$ “hampir” pasti terjadi
(almost certain)

Probabilitas

9

- ❑ Misal suatu eksperimen (proses) menghasilkan sejumlah output yang berupa variabel random
 - ❑ Himpunan semua hasil yang mungkin didapat disebut *sample space*.
 - ❑ Setiap elemen di dalam *sample space* disebut *sample points* (elemen)
 - ❑ Setiap elemen di dalam *sample space* memiliki faktor/bobot/*weight* (positif) sedemikian hingga jumlah *weight* seluruh elemen bernilai 1.
 - ❑ Nilai bobot berbanding lurus dengan kemungkinan eksperimen akan memberikan hasil elemen tersebut.
 - ❑ Bobot tidak lain adalah probabilitas.

Probabilitas – Tabel Frekuensi

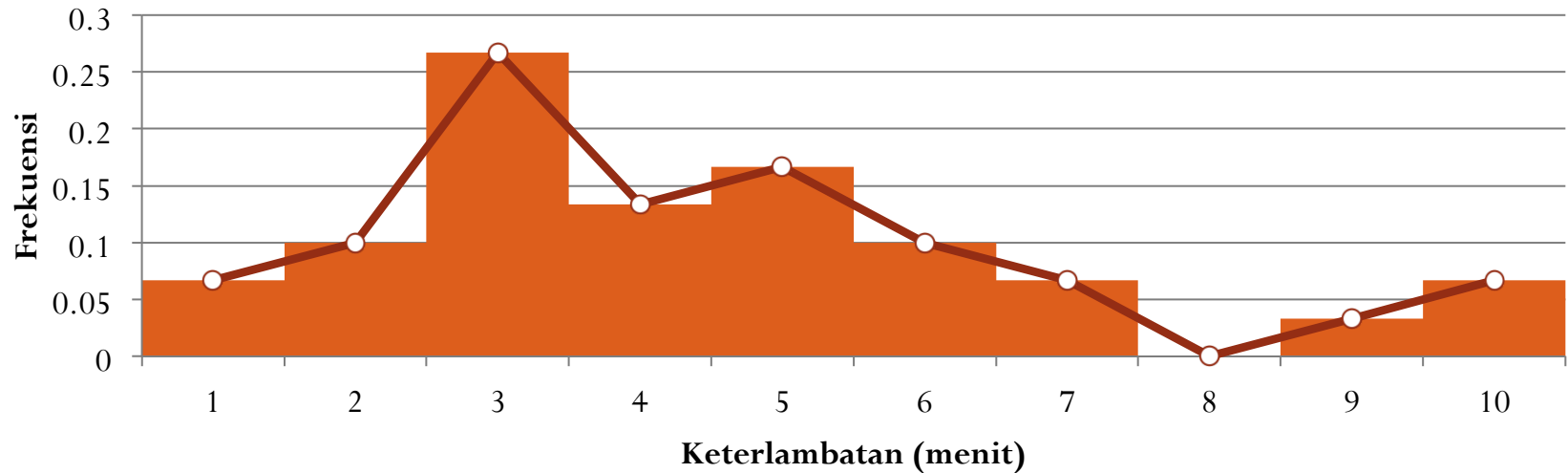
10

Nomor	Keterlambatan (menit)	Frekuensi	Frekuensi Relatif
1	10	2	0.07
2	9	1	0.03
3	8	0	0.00
4	7	2	0.07
5	6	3	0.10
6	5	5	0.17
7	4	4	0.13
8	3	8	0.27
9	2	3	0.10
10	1	2	0.07
Jumlah =		30	1.00

Probabilitas - Histogram

11

**Keterlambatan Kedatangan Bus di Suatu Perhentian Selama 30 Jadwal
Kedatangan**



12

Probabilitas

Sample Space

Sample Elements

Sample Space & Sample Elements

13

□ Contoh #1:

- Suatu DAS memiliki 3 stasiun: Sta-1, Sta-2, Sta-3.
- Experimen: meneliti setiap stasiun perlu/tidak untuk dilakukan penggantian alat
- Output: (y,n,y)
 - Sta-1 perlu penggantian alat ($y = \text{yes}$)
 - Sta-2 tak perlu penggantian alat ($n = \text{no}$)
 - Sta-3 perlu penggantian alat ($y = \text{yes}$)

Sample Space & Sample Elements

14

□ Sample space: Alternatif 1

$$\blacksquare S_1 = \{(y,y,y), (y,y,n), (y,n,y), (n,y,y), \\ (y,n,n), (n,y,n), (n,n,y), (n,n,n)\}$$

- S_1 adalah discrete sample space: jumlah elemen di dalam S_1 dapat dihitung.
- Apabila eksperimen dilakukan satu kali saja, maka salah satu elemen S_1 pasti terjadi.

□ Sample space: Alternatif 2

$$\blacksquare S_2 = \{0,1,2,3\}$$

- S_2 adalah discrete sample space.
- Hanya ingin diketahui jumlah stasiun yang perlu dikalibrasi.
- Tidak diperlukan untuk mengetahui stasiun mana yang perlu dikalibrasi.
- Informasi yang diperoleh lebih sedikit daripada S_1 .

Sample Space & Sample Elements

15

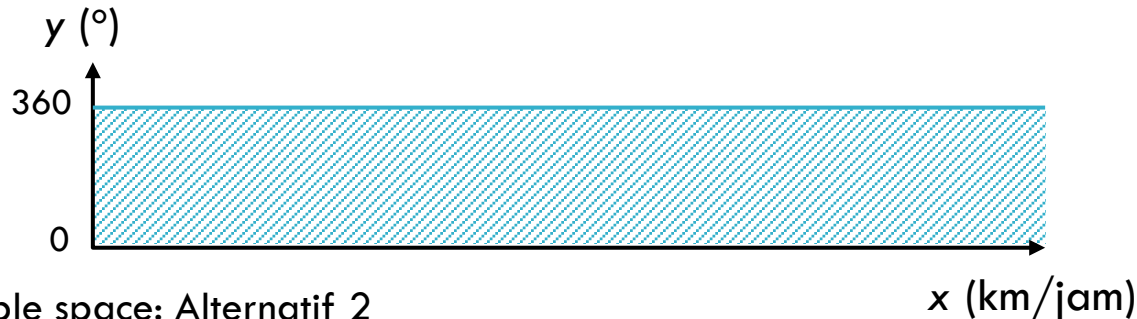
- ❑ Contoh #2:
 - ❑ Pengukuran angin: kecepatan (km/jam) dan arah ($^{\circ}$).
 - ❑ Output: (x,y)
 - $x = \text{kecepatan (km/jam)}$
 - $y = \text{arah } (^{\circ})$

Sample Space & Sample Elements

16

- Sample space: Alternatif 1

$$\Omega_1 = \{(x, y): x \geq 0, 0 \leq y \leq 360\} \text{ continuous sample space}$$



- Sample space: Alternatif 2

$$\Omega_2 = \{+, -\} \text{ discrete sample space}$$

- + = kecepatan > 60 (km/jam)
- - = kecepatan < 60 (km/jam)

Events

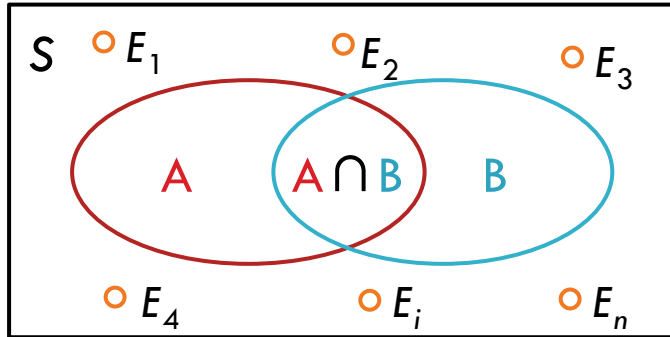
17

- ❑ *Event* adalah suatu himpunan bagian (*subset*) dari *sample space*
- ❑ Suatu *event* terjadi jika dan hanya jika hasil dari eksperimen adalah anggota *event* tersebut
- ❑ Contoh: Penggantian alat di Sta-1, Sta-2, Sta-3
 - ❑ *Event* A: paling sedikit 2 stasiun perlu penggantian alat
 $A = \{(y,y,y), (y,y,n), (y,n,y), (n,y,y)\}$
 - ❑ *Event* B: tak ada stasiun yang perlu penggantian alat
 $B = \{(n,n,n)\}$
 - ❑ *Event* C: 2 stasiun perlu penggantian alat
 $C = \{(y,y,n), (y,n,y), (n,y,y)\}$

Diagram Venn

18

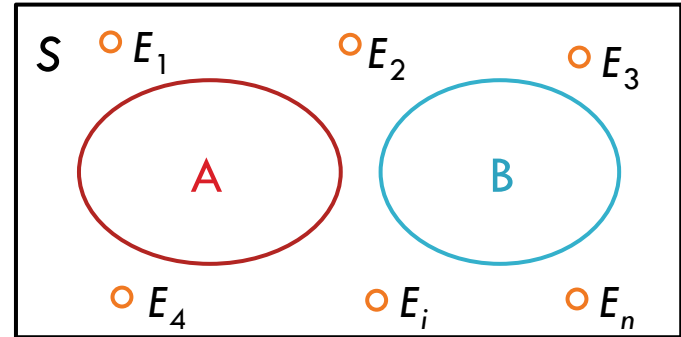
- Notasi:
 S = sample space
 E_i = elemen di dalam S
 A, B = events di dalam S
 $\text{prob}(E_i)$ = probabilitas elemen E_i



$$0 \leq \text{prob}(E_i) \leq 1$$

$$S = \bigcup_i E_i$$

$$\text{prob}(S) = \sum \text{prob}(E_i) = 1$$



Probabilitas suatu Event

19

- Event A

$$A = \bigcup_{i=m}^n E_i$$

$$0 \leq \text{prob}(A) = \sum_{i=m}^n \text{prob}(E_i) \leq 1$$

- Event A dan B

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}(B) - \text{prob}(A \cap B)$$

- Apabila A dan B tak bergantung satu dengan yang lainnya (*independent*), maka

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}(B)$$

Probabilitas suatu Event

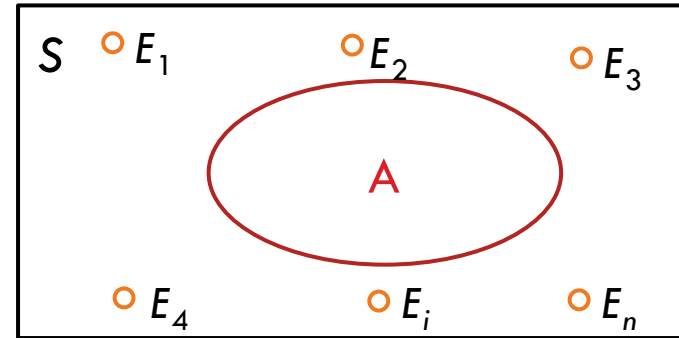
20

- Event A^c (= komplemen event A)

$$\text{prob}(A \cap A^c) = 0$$

$$\text{prob}(A \cup A^c) = \text{prob}(A) + \text{prob}(A^c) = 1$$

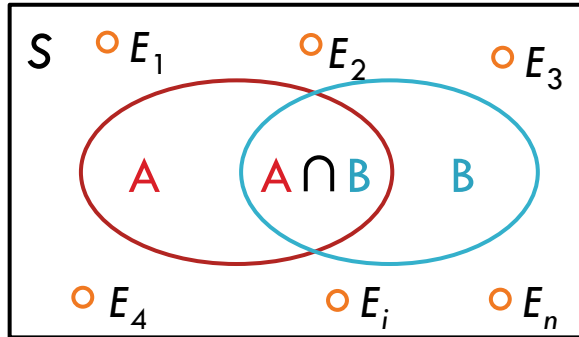
$$\text{prob}(A) = 1 - \text{prob}(A^c)$$



Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

21

- Probabilitas suatu event (event B) bergantung pada terjadinya event lain (event A).



$\text{prob}(B|A) = \text{prob}(B)$ dengan syarat event A terjadi

- » sample space berubah dari S menjadi A,
- » event diwakili oleh $A \cap B$

$$\text{prob}(B|A) = \frac{\text{prob}(A \cap B)}{\text{prob}(A)}, \text{ prob}(A) \neq 0$$

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A)$$

Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

22

- Apabila event B tak bergantung pada event A (keduanya merupakan *independent events*), maka
 - $\text{prob}(B | A) = \text{prob}(B)$, dan
 - $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B)$

Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

23

□ Contoh

- Data pengamatan hari hujan di suatu wilayah menunjukkan probabilitas hari hujan sbb.

hari hujan setelah hari hujan = 0.444

hari tak hujan setelah hari hujan = 0.556

hari tak hujan setelah hari tak hujan = 0.724

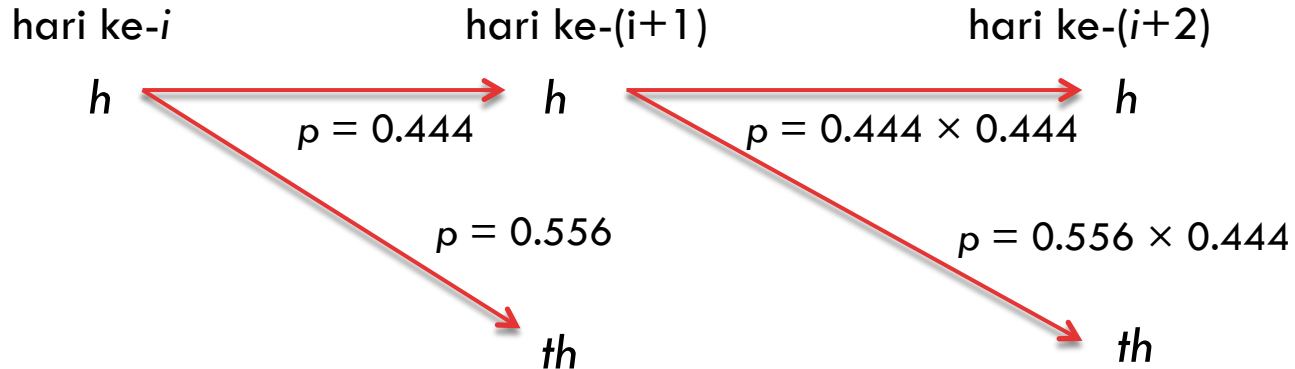
hari hujan setelah hari tak hujan = 0.276

- Apabila dijumpai bahwa suatu hari terjadi hujan, berapakah probabilitas bahwa 2 hari berikutnya juga hujan?

Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

24

- ❑ Cara penyelesaian yang lain
 - ❑ Probabilitas hujan pada suatu hari adalah $p = 0.444$
 - ❑ Suatu hari (hari ke-0) terjadi hujan
 - ❑ Probabilitas hujan saat itu adalah $p = 0.444$



Probabilitas Total (*Total Probability*)

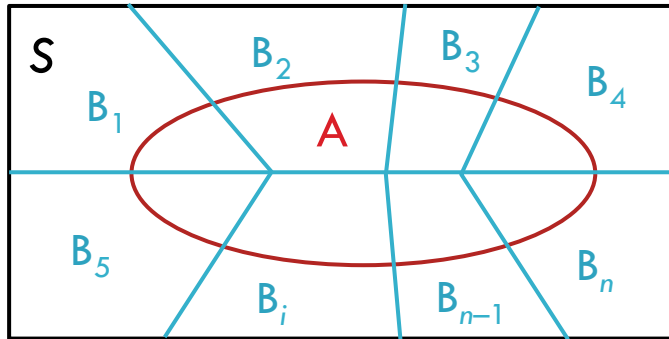
25

- Apabila B_1, B_2, \dots, B_n adalah serangkaian events yang tidak saling berkaitan (*mutually exclusive events*) dan masing-masing memiliki probabilitas tidak sama dengan nol, $\text{prob}(B_i) \neq 0, \forall i$, maka
 - $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$
 - $B_i \cap B_j = 0, \forall i, j (i \neq j)$
 - $\text{prob}(B_i) > 0, \forall i$

Probabilitas Total (*Total Probability*)

26

- Probabilitas suatu event A dapat dituliskan sbb.



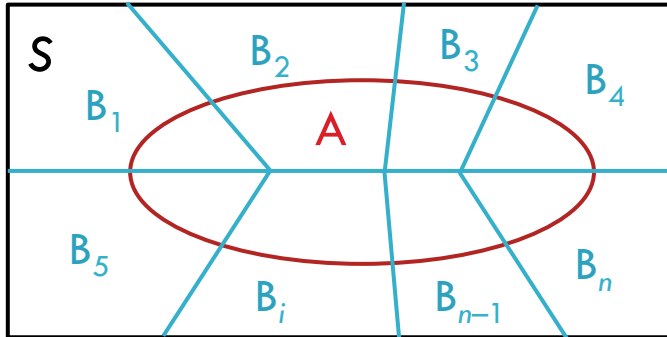
$$\begin{aligned}\text{prob}(A) &= \text{prob}[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)] \\ &= \text{prob}(A \cap B_1) + \text{prob}(A \cap B_2) + \dots + \text{prob}(A \cap B_n)\end{aligned}$$

Probabilitas Total (*Total Probability*)

27

- Dari probabilitas bersyarat (*conditional probability*)

$$\left. \begin{array}{l} \text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(A) \text{prob}(B_1|A) \\ \text{prob}(B_1 \cap A) = \text{prob}(B_1) \text{prob}(A|B_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(B_1 \cap A) \Rightarrow \\ \text{prob}(A) \text{prob}(B_1|A) = \text{prob}(B_1) \text{prob}(A|B_1) \end{array}$$



$$\begin{aligned} \text{prob}(A) &= \text{prob}(A \cap B_1) + \text{prob}(A \cap B_2) + \dots + \text{prob}(A \cap B_n) \\ &= \text{prob}(B_1) \text{prob}(A|B_1) + \dots + \text{prob}(B_n) \text{prob}(A|B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \text{prob}(A|B_i) \end{aligned}$$

Probabilitas Total (*Total Probability*)

28

□ Contoh

- Data genangan di suatu wilayah permukiman menunjukkan bahwa probabilitas terjadinya genangan adalah 0.80 saat hari hujan dan 0.25 saat tak hujan.
- Diketahui bahwa probabilitas hari hujan adalah 0.36.
- Berapakah probabilitas terjadinya genangan di wilayah tersebut?

Probabilitas Total (*Total Probability*)

29

□ Penyelesaian

- event G = terjadi genangan
event H = hari hujan
event H^c = hari tak hujan

$$\begin{aligned}\text{prob}(G) &= \text{prob}(H)\text{prob}(G|H) + \text{prob}(H^c)\text{prob}(G|H^c) \\ &= 0.36 \times 0.82 + (1 - 0.36) \times 0.25 \\ &= 0.448\end{aligned}$$

Teorema Bayes

30

- Dari *conditional probability*

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) \quad \text{..... (1)}$$

$$\text{prob}(B \cap A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \text{..... (2)}$$

- Karena $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(B \cap A)$, maka

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \text{..... (3)}$$

- Untuk event A dan event B_i , persamaan di atas menjadi

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B_i|A) = \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i) \quad \text{..... (4)}$$

Teorema Bayes

31

- Dari *total probability*

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i) \quad \text{..... (5)}$$

- Dengan (5) \rightarrow (4)

$$\text{prob}(B_i|A) = \frac{\text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i)} \quad \text{..... (6)}$$

Teorema Bayes

32

□ Pemakaian

- Untuk mencari probabilitas event B_j apabila diketahui event A telah terjadi.
- Untuk mencari (memperkirakan) probabilitas suatu event (B_j) dengan mengamati event kedua (A).

Teorema Bayes

33

□ Contoh

- Informasi ramalan cuaca biasa dikirimkan melalui 4 saluran:
 R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) adalah event dimana informasi tsb dikirimkan melalui saluran i .
- Probabilitas masing-masing event R_i adalah: 0.1, 0.2, 0.3, dan 0.4.
- Diketahui juga bahwa probabilitas terjadinya kesalahan pengiriman (event E) melalui masing-masing saluran adalah: 0.10, 0.15, 0.20, dan 0.25.
- Suatu saat diketahui bahwa suatu kesalahan pengiriman telah terjadi.
- Berapakah probabilitas bahwa kesalahan tersebut terjadi melalui saluran ke-2?

Teorema Bayes

34

□ Penyelesaian

□ Diketahui

$$\text{prob}(R_1) = 0.1$$

$$\text{prob}(E | R_1) = 0.10$$

$$\text{prob}(R_2) = 0.2$$

$$\text{prob}(E | R_2) = 0.15$$

$$\text{prob}(R_3) = 0.3$$

$$\text{prob}(E | R_3) = 0.20$$

$$\text{prob}(R_4) = 0.4$$

$$\text{prob}(E | R_4) = 0.25$$

- Probabilitas bahwa pengiriman dilakukan melalui saluran ke-2 dengan melihat kenyataan bahwa telah terjadi kesalahan

$$\text{prob}(R_2 | E) = \frac{\text{prob}(R_2) \cdot \text{prob}(E | R_2)}{\sum_{i=1}^n \text{prob}(R_i) \cdot \text{prob}(E | R_i)} = \frac{0.2 \times 0.15}{0.1 \times 0.10 + 0.2 \times 0.15 + 0.3 \times 0.20 + 0.4 \times 0.25} = 0.15$$

Teorema Bayes

35

i	$\text{prob}(R_i)$	$\text{prob}(E R_i)$	$\text{prob}(R_i) \text{prob}(E R_i)$	$\text{prob}(R_i E)$
1	0.1	0.10	0.01	0.05
2	0.2	0.15	0.03	0.15
3	0.3	0.20	0.06	0.30
4	0.4	0.25	0.10	0.50
Σ	1.0		0.20	1.00

prob(E)

Probabilitas

Permutasi

Kombinasi

Permutasi dan Kombinasi

37

- ❑ Cara mendapatkan sampel yang terdiri dari r elemen dari suatu *sample space* yang memiliki n elemen ($n \geq r$) \rightarrow dipilih/diambil satu elemen pada setiap pemilihan/pengambilan
 - ❑ urutan elemen diperhatikan dan setelah tiap pengambilan, elemen dikembalikan ke dalam *sample space* (*ordered with replacement*)
 - ❑ urutan elemen diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*ordered without replacement*)
 - ❑ urutan elemen tidak diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered without replacement*)
 - ❑ urutan elemen tidak diperhatikan dan dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered with replacement*)

Permutasi dan Kombinasi

38

- ❑ Contoh ilustrasi
 - ❑ Dilakukan pemilihan 2 stasiun AWLR dari 4 stasiun yang ada (A, B, C, D) untuk diberi dana.
 - ❑ Berapa jumlah pasang stasiun yang mungkin mendapatkan dana?

Permutasi dan Kombinasi #1

39

- ❑ Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2, n = 4$) dengan
 - ❑ urutan diperhatikan \rightarrow memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
 - ❑ dengan pengembalian \rightarrow suatu stasiun dapat memperoleh dana $2 \times$
- ❑ Pasangan 2 stasiun yang mendapatkan dana
 - ❑ (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
 - (B,A) (B,B) (B,C) (B,D)
 - (C,A) (C,B) (C,C) (C,D)
 - (D,A) (D,B) (D,C) (D,D)

$$16 \rightarrow n^r = 4^2 = 16$$

Permutasi dan Kombinasi #2

40

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2, n = 4$) dengan
 - urutan diperhatikan \rightarrow memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
 - tanpa pengembalian \rightarrow suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana $1 \times$
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

---	(A,B)	(A,C)	(A,D)
(B,A)	---	(B,C)	(B,D)
(C,A)	(C,B)	---	(C,D)
(D,A)	(D,B)	(D,C)	---

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

permutasi

Permutasi dan Kombinasi #3

41

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2, n = 4$) dengan
 - urutan tidak diperhatikan \rightarrow memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
 - tanpa pengembalian \rightarrow suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1 \times
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

- | | | |
|-------|-------|-------|
| (A,B) | (A,C) | (A,D) |
| | (B,C) | (B,D) |
| | | (C,D) |

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

kombinasi
koefisien binomial

Permutasi dan Kombinasi #4

42

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2, n = 4$) dengan
 - urutan tidak diperhatikan \rightarrow memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
 - dengan pengembalian \rightarrow suatu stasiun dapat memperoleh dana $2 \times$
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
 - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
 (B,B) (B,C) (B,D) $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!} = \frac{(4+2-1)!}{(4-2)!2!} = 10$
 (C,C) (C,D)
 (D,D)

Resume

43

	Dengan pengembalian	Tanpa pengembalian
Urutan diperhatikan	n^r	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Urutan tidak diperhatikan	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

Persamaan Sterling : $n! \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}$

Perintah (Fungsi) MSExcel

44

- ❑ FACT(n)
 - ❑ menghitung faktorial, $n!$
 - ❑ n bilangan positif (bilangan cacah)

- ❑ PERMUT(n,r)
 - ❑ menghitung permutasi,
 - ❑ n dan r integer, $n \geq r$

$${}_{(n)}P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- ❑ COMBIN(n,r)
 - ❑ menghitung kombinasi,
 - ❑ n dan r integer, $n \geq r$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Terima kasih