



Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

VARIABEL RANDOM

Statistika dan Probabilitas

Pengertian

2

- ❑ Random variable (variabel acak)
 - ❑ suatu fungsi yang didefinisikan pada *sample space*
- ❑ Jenis
 - ❑ *Discrete random variables*
 - ❑ *Continuous random variables*
- ❑ Contoh
 - ❑ jumlah hari hujan selama 1 tahun → diskrit
 - ❑ jumlah (volume) hujan selama 1 tahun → kontinu

Variabel Random

3

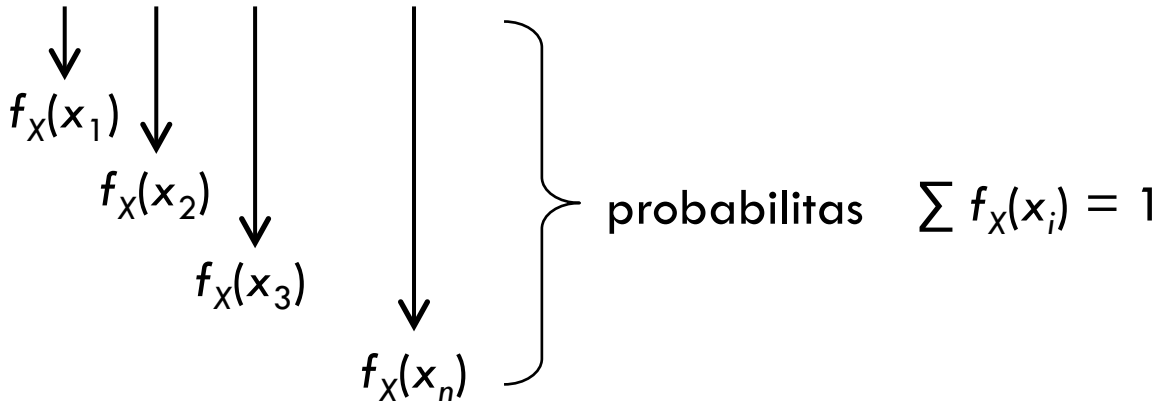
- ❑ Notasi
 - ❑ $X \rightarrow$ variabel random
 - ❑ $x \rightarrow$ nilai variabel random
- ❑ Fungsi
 - ❑ Suatu fungsi variabel random adalah variabel random pula
 - ❑ Jika X adalah variabel random, maka $Z = f(X)$ adalah juga variabel random

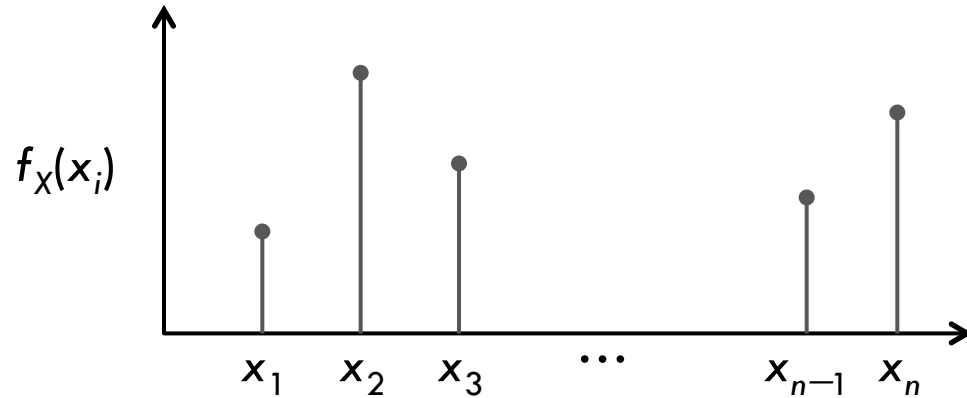
Variabel Random Diskrit

4

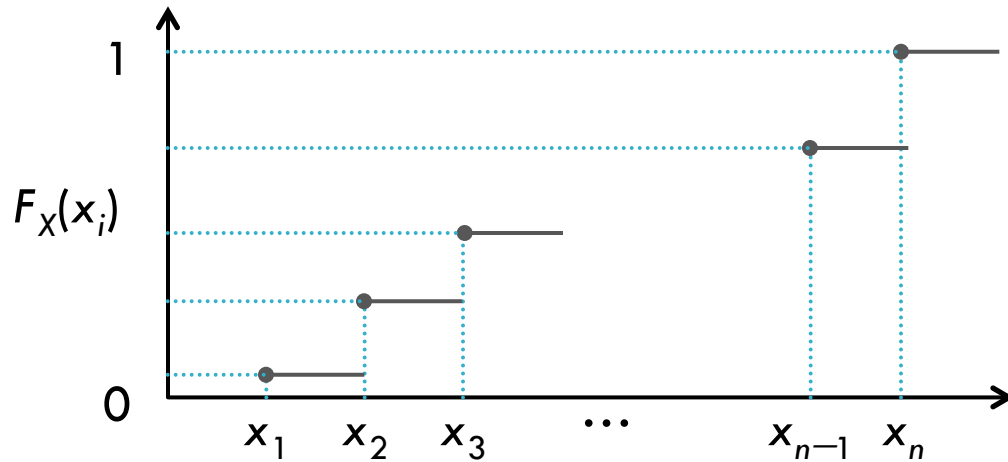
□ X = discrete random variables

□ = $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$





distribusi probabilitas diskrit

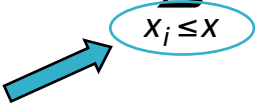


distribusi probabilitas kumulatif diskrit



probabilitas
 $x \leq x_i$

- Distribusi probabilitas kumulatif
suatu variabel random X untuk $X = x$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$


- Distribusi probabilitas
suatu variabel random X untuk $X = x$

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

- Frekuensi relatif

$$f_{x_i} = F_{x_i} - F_{x_{i-1}}$$



- Probabilitas

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

- Frekuensi relatif kumulatif

$$F_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^i f_{x_j}$$



$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} f_X(x_j)$$

Variabel Random Kontinu

8

□ Probabilitas

$$\text{prob}(A) = \frac{n_i}{n} = f_{x_i}$$

n_i = jumlah data di klas ke- i

n = jumlah seluruh data

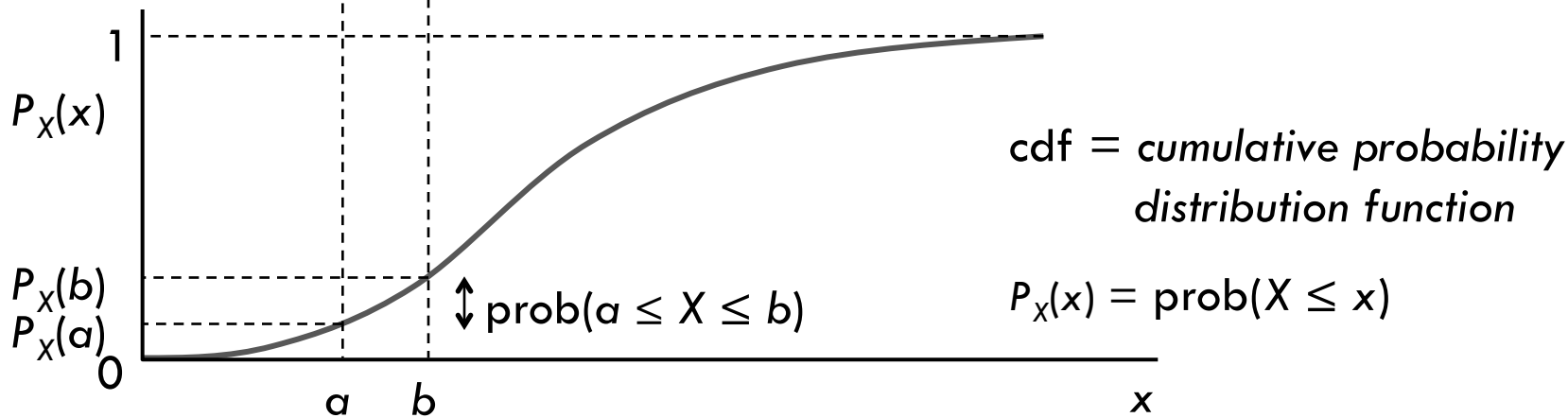
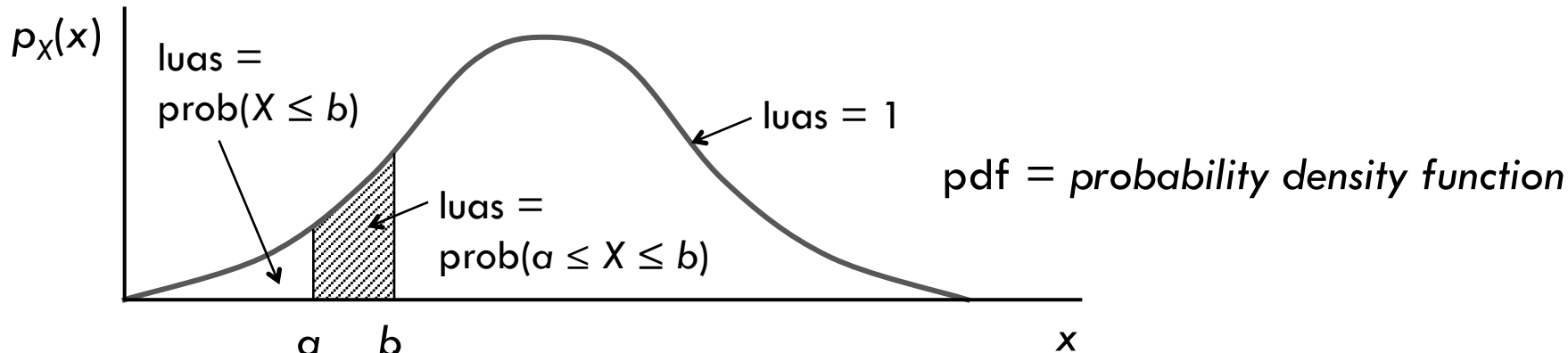
□ Dengan demikian f_{x_i} dapat dipandang sebagai nilai estimasi probabilitas

$f_{x_i} \rightarrow$ estimasi prob (A)

histogram frekuensi \rightarrow pendekatan distribusi probabilitas

frekuensi kumulatif \rightarrow pendekatan distribusi probabilitas kumulatif

variabel random
kontinu diperlakukan
seolah-olah variabel
random diskrit



$p_X(x)$ = *probability density function of a continuous random variable*

$P_X(x)$ = *cumulative probability distribution function*

$$\Rightarrow P_X(x) = \text{prob}(X \leq x) \Rightarrow dP_X(x) = p_X(x) dx \Rightarrow P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Beberapa Sifat Probabilitas

11

$$(1) \quad p_X(x) \geq 0, \quad \forall x$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$$

$$(3) \quad P_X(-\infty) = 0$$

$$(4) \quad P_X(+\infty) = 1$$

$$(5) \quad \text{prob}(a \leq X \leq b) = \int_a^b p_X(t) dt = P_X(b) - P_X(a)$$

$$(6) \quad \text{prob}(X = c) = \int_c^c p_X(t) dt = P_X(c) - P_X(c) = 0$$



$$\text{prob}(a \leq X \leq b) = \text{prob}(a < X \leq b) = \text{prob}(a \leq X < b) = \text{prob}(a < X < b)$$

Kala Ulang (*Return Period*)

12

$$\text{prob}(X \geq a) = \text{prob}(X > a)$$

- Jadi dalam definisi kala ulang
 - a. suatu kejadian yang menyamai atau melampaui suatu nilai tertentu
 - b. suatu kejadian yang melampaui suatu nilai tertentu
- Kedua definisi, **a** dan **b**, adalah sama mengingat probabilitas suatu kejadian (*event*) menyamai suatu nilai tertentu bernilai nol

Contoh #1

13

- Diketahui suatu variabel random X memiliki fungsi kerapatan probabilitas (pdf) sbb.

$$p_X(x) = \begin{cases} x/2 & \text{untuk } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{untuk nilai } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

- Gambarlah pdf tersebut
- Tunjukkan bahwa $\text{prob}(0 < X < 2) = 1$
- Hitunglah $\text{prob}(X < 1.5) = P_X(1.5)$
- Hitunglah $\text{prob}(0.5 < X < 1.5)$

Contoh #2

14

- Pengolahan data *annual series* curah hujan harian maksimum, H mm, di suatu stasiun ARR (*Automatic Rainfall Recorder*) menunjukkan bahwa sebaran probabilitas suatu besaran curah hujan, $p_H(h)$, dapat dinyatakan dengan suatu fungsi (pdf) sbb.

$$p_H(h) = \begin{cases} \frac{1}{75} & \text{untuk } 0 < h < 50 \\ \frac{1}{3750}(100 - h) & \text{untuk } 50 < h < 100 \\ 0 & \text{untuk nilai } h \text{ yang lain} \end{cases}$$

- Gambarlah pdf tsb.
- Carilah fungsi cdf berdasarkan pdf tsb.
- Hitunglah $\text{prob}(40 \text{ mm} < H < 60 \text{ mm})$

Bivariate Distributions

15

- ❑ Pada bahasan sebelumnya, variabel random adalah variabel tunggal (*univariate distribution*)
- ❑ Pada bahasan berikut ini, variabel random terdiri dari dua variabel (*bivariate distributions*)
 - ❑ Apabila kita ingin mempelajari perilaku dua atau lebih variabel random, maka kita perlu menghitung probabilitas gabungan atau probabilitas bersama (*joint probabilities*)
 - ❑ Probabilitas gabungan \rightarrow pdf gabungan

Bivariate Distributions

16

- Probabilitas gabungan, probabilitas bersama

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} P_{X,Y}(x,y) \quad \text{pdf}$$

$$P_{X,Y}(x,y) = \text{prob}(X \leq x \wedge Y \leq y) \quad \text{cdf}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(s,t) dt ds$$

Bivariate Distributions

17

- Beberapa sifat bivariate distribution

$P_{X,Y}(x, \infty)$ \longrightarrow cdf variabel random X saja (*univariate*)

$P_{X,Y}(\infty, y)$ \longrightarrow cdf variabel random Y saja (*univariate*)

$$p_{X,Y}(x, y) \geq 0$$

$$P_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$$

$$P_{X,Y}(-\infty, y) = P_{X,Y}(x, -\infty) = 0$$

Distribusi Marginal

18

- Dua variabel random X dan Y
 - Ingin diketahui perilaku variabel X tanpa mempertimbangkan nilai variabel Y
 - Densitas marginal (pdf) dan distribusi kumulatif marginal (cdf)

$$p_{X,Y}(x,y) \rightarrow p_X(x)$$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,t) dt$$

pdf

$$P_{X,Y}(x,y) \rightarrow P_X(x)$$

$$P_X(x) = P_X(x, \infty) = \text{prob}(X \leq x \wedge Y \leq \infty) = \text{prob}(X \leq x)$$
$$= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(s,t) dt ds = \int_{-\infty}^x p_X(s) ds$$

cdf

Distribusi Marginal

19

- Dua variabel random X dan Y
 - Untuk variabel Y

$$p_{X,Y}(x,y) \rightarrow p_Y(y)$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(s,y) ds$$

pdf

$$P_{X,Y}(x,y) \rightarrow P_Y(y)$$

$$P_Y(y) = P_Y(\infty, y) = \text{prob}(X \leq \infty \wedge Y \leq y) = \text{prob}(Y \leq y)$$
$$= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(s,t) ds dt = \int_{-\infty}^y p_Y(t) dt$$

cdf

Distribusi Bersyarat (*Conditional Distributions*)

20

- ❑ Dua variabel random X dan Y
 - ❑ Ingin diketahui perilaku variabel X yang bergantung pada variabel Y
 - Distribusi X jika $Y = y_0$
 - Distribusi Y jika $x_1 \leq X \leq x_2$

Distribusi Bersyarat (*Conditional Distributions*)

$$p_{X,Y}(x_i|y \text{ di dalam } S) = \frac{\int_S p_{X,Y}(x,t) dt}{\int_S p_Y(t) dt}$$

$$\text{prob}(x \text{ di dalam } R|y \text{ di dalam } S) = \int_R p_{X|Y}(x|y \text{ di dalam } S) dx$$

$$p_{X|Y}(x|y = y_0) = \frac{p_{X,Y}(x, y_0)}{p_Y(y_0)} \text{ yang lebih sering dituliskan}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Independence

22

- ❑ Variabel random X dan Y
 - ❑ X dan Y independence jika

$p_{X|Y}(x|y)$ bukan fungsi y

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$$

- ❑ *Joint probabilities*
 - Perkalian densitas marginal kedua variabel

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

Contoh

23

Data jumlah hari yang memiliki temperatur udara rerata ($T^{\circ}\text{C}$) dan kelembaban udara relatif ($H\%$) di suatu stasiun klimatologi

		Temperatur udara, $T^{\circ}\text{C}$					
		22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34
Kelembaban relatif, $H\%$	0 – 20	2	4	6	2	2	1
	20 – 40	4	8	12	30	6	9
	40 – 60	5	15	30	60	30	20
	60 - 80	3	7	9	25	17	11
	80 - 100	1	0	2	12	8	3

Contoh

24

- ❑ Dari tabel temperatur udara dan kelembaban udara tsb.
 - ❑ pdf (gabungan)
 - ❑ pdf marginal dan cdf marginal temperatur udara rerata
 - ❑ pdf marginal dan cdf marginal kelembaban udara relatif
 - ❑ probabilitas temperatur udara berkisar pada 28°C s.d. 30°C
 - ❑ probabilitas temperatur udara berkisar pada 28°C s.d. 30°C pada saat kelembaban udara relatif 60% s.d. 80%

Terima kasih