Universitas Gadjah Mada
Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Pengelolaan Bencana Alam

Teknik Pengolahan Data

DISTRIBUSI BINOMIAL

Contoh Ilustrasi

- Investigasi thd suatu populasi
  - karakteristik populasi → variabel
  - nilai variabel
    - nilai ujian: 0 s.d. 100
    - status perkawinan: tidak kawin, kawin, cerai, duda/janda
    - usia: 0 s.d. ...
    - cuaca: cerah, berawan, hujan

Contoh Ilustrasi

- Contoh lain
  - Jawaban pertanyaan:
    - ya / tidak
    - benar / salah
    - menang / kalah
    - lulus / tak-lulus
    - sukses / gagal

SUKSES
vs GAGAL

Distribusi Binomial

- Jika
  - variabel hanya memiliki 2 kemungkinan hasil
  - probabilitas (peluang) kedua hasil tersebut tidak berubah (tetap) apapun hasil experimen sebelumnya

→ **Distribusi Binomial**

- Probabilitas hasil suatu distribusi binomial
  - prob(sukses) = p
  - probabilitas(gagal) = $q = 1 - p$

Distribusi Binomial atau Bukan?

Event	Binomial? (True / False)	Mengapa?
hujan tak-hujan	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin warga desa	F	prob kejadian berubah
jenis kelamin bayi yang baru lahir	T	prob tetap

Permutasi dan Kombinasi

- Cara mendapatkan sampel yang terdiri dari *r* elemen dari suatu *sample space* yang memiliki *n* elemen ($n \geq r$) → 1 elemen per pengambilan
  - urutan elemen diperhatikan dan setelah tiap pengambilan, elemen dikembalikan ke dalam sample space (*ordered with replacement*)
  - urutan elemen diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*ordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan dlakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered with replacement*)

Permutasi dan Kombinasi

- Contoh ilustrasi
  - Dilakukan pemilihan 2 stasiun AWLR dari
    4 stasiun yang ada (A, B, C, D) untuk diberi dana.
  - Berapa jumlah pasang stasiun yang mungkin mendapatkan dana?

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun dapat memperoleh dana 2x
- Pasangan 2 stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,A) (B,B) (B,C) (B,D)
    (C,A) (C,B) (C,C) (C,D)
    (D,A) (D,B) (D,C) (D,D)

$$16 \rightarrow n^r = 4^2 = 16$$

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  -

	(A,B)	(A,C)	(A,D)
(B,A)		(B,C)	(B,D)
(C,A)	(C,B)		(C,D)
(D,A)	(D,B)	(D,C)	

- Identik dengan pengambilan 2 elemen sekaligus dari 4 elemen dalam *sample space*

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

permutasi

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,C) (B,D)
    (C,D)

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$$

kombinasi
koefisien binomial

- Identik dengan pengambilan 2 elemen sekaligus dari 4 elemen dalam *sample space*

Permutasi dan Kombinasi

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun (r = 2, n = 4) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 2x
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,B) (B,C) (B,D)
    (C,C) (C,D)
    (D,D)

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!\,2!} = 10$$

- Memilih r elemen dari n elemen dengan pengembalian adalah sama dengan memilih r elemen dari n elemen tanpa pengembalian

Resume

	Dengan pengembalian	Tanpa pengembalian
Urutan diperhatikan	n^r	$\left(n_r\right) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
Urutan tidak diperhatikan	$\binom{n+r-1}{r} = \dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$	$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

Persamaan Sterling: $n! = \sqrt{2\pi}\; e^{-n}\; n^{n+\frac{1}{2}}$

Perintah (Fungsi) MSExcel

- FACT(*n*)
  - menghitung faktorial, *n*!
  - *n* bilangan positif (bilangan cacah)
- PERMUT(*n*,*r*)
  - menghitung permutasi,
  - *n* dan *r* integer, $n \geq r$
- COMBIN(*n*,*r*)
  - menghitung kombinasi,
  - *n* dan *r* integer, $n \geq r$

Distribusi Binomial

- Ilustrasi
  - Peluang sukses (*S*) dalam suatu eksperimen adalah $p \rightarrow$ prob(*S*) = *p*
  - Peluang gagal (*G*) adalah $q = 1 - p \rightarrow$ prob(*G*) = *q*
  - 1x eksperimen:
    - peluang sukses *p*
    - peluang gagal *q*
  - 2x eksperimen:
    - peluang sukses kemudian sukses (*S*,*S*): *pp*
    - peluang sukses kemudian gagal (*S*,*G*): *pq*
    - peluang gagal kemudian sukses (*G*,*S*): *qp*
    - peluang gagal kemudian gagal (*G*,*G*): *qq*

Sukses-Gagal dalam 2× Eksperimen

Jumlah sukses	Cara sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas sukses	
2	SS	1	pp	1 p^2q^0
1	SG atau GS	2	pq + qp	2 p^1q^1
0	GG	1	qq	1 p^0q^2

Sukses-Gagal dalam 3× Eksperimen

Jumlah sukses	Cara sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas sukses	
3	SSS	1	1 ppp	1 p^3q^0
2	SSG, SGS, GSS	3	3 ppq	3 p^2q^1
1	SGG, GSG, GGS	3	3 pqq	3 p^1q^2
0	GGG	1	1 qqq	1 p^0q^3

Sukses-Gagal dalam 3× atau 5× Eksperimen

- 3x eksperimen:
  - peluang sukses pada eksperimen ke-3: *qqp*
  - peluang sukses di salah satu eksperimen: *pqq* + *qpq* + *qqp*
- 5x eksperimen:
  - peluang sukses 2x: *ppqqq* + *pqpqq* + ... + *qqqpp*

$$\binom{5}{2} p^2 q^3 = 10 p^2 q^3$$

Distribusi Binomial

- Jika
  - peluang sukses p dan peluang gagal $q = 1 - p$
  - probabilitas sukses p tidak berubah apapun hasil eksperimen yang lain
- Maka
  - peluang mendapatkan x kali sukses dari n kali eksperimen adalah

$$f_X(x; n, p) = \underbrace{\binom{n}{x}}_{\text{koefisien binomial}} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Distribusi Binomial

- Contoh #1
  - Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A,B,C,D).
  - Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih (mendapatkan dana).
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 3x?
  - Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 5x, 4x, 3x, 2x, 1x, 0x?

Distribusi Binomial

- Setiap kali pemilihan
  - prob(As) = probabilitas kegiatan A terpilih
    prob(As) = ¼ = 0.25 = *p*
  - prob(Ag) = probabilitas kegiatan A tak terpilih
    prob(Ag) = 1 – *p* = 0.75 = *q*
- Dalam 5 kali pemilihan
  - peluang terpilih (sukses) 3 kali adalah

$$f_X\left(x;n,p\right) = f_X\left(3;5,0.25\right) = \binom{5}{3} 0.25^3 \, 0.75^2 = 0.088$$

Distribusi Binomial

koefisien binomial

Dalam 5 kali pemilihan (*n* = 5)

Jumlah sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas sukses
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
	∑ =	**1.000**

Distribusi Binomial

- Contoh #2
  - Diketahui probabilitas (risiko) muka air banjir dalam suatu tahun melebihi elevasi *h* m adalah 0.05. Apabila m.a. banjir melebihi *h* m, maka wilayah A akan tergenang.
  - Apabila setiap kejadian banjir adalah *independent* (banjir pada suatu tahun tak bergantung pada banjir pada tahun yang lain), maka kejadian banjir tersebut dapat dipandang sebagai proses Bernoulli.
  - Berapa risiko (probabilitas) wilayah A tergenang 2 kali dalam periode 20 tahun?

Distribusi Binomial

- Solusi
  - Misal: x = jumlah kejadian wilayah A tergenang
    n = periode (jumlah tahun) yang ditinjau
    p = risiko m.a. banjir melewati h m
    (risiko wilayah A tergenang)
  - Maka: $x = 2$; $n = 20$; $p = 0.05$
  - Jadi:

$$f_X(x;n,p) = f_X(2;20,0.05) = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} 0.05^2\ 0.95^{18} = 0.1887$$

Distribusi Binomial

- Contoh #3
  - Agar 90% yakin bahwa debit banjir rancangan yang akan dipilih tidak terlampaui selama periode 10 tahun, berapakah kala ulang debit banjir rancangan tersebut?
- Contoh #4
  - Memperhatikan contoh #3, tariklah kesimpulan mengenai risiko debit banjir kala-ulang *T* tahun terlampaui paling sedikit 1 kali dalam periode *T* tahun.

Terima kasih