Universitas Gadjah Mada
Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Magister Teknik Pengelolaan Bencana Alam

Teknik Pengolahan Data

Rentang Keyakinan

Rentang Keyakinan

- Estimasi Parameter
  - Distribusi probabilitas memiliki sejumlah parameter.
  - Parameter-parameter tsb umumnya tak diketahui.
  - Nilai parameter tersebut diperkirakan (di-estimasi-kan) berdasarkan nilai yang diperoleh dari pengolahan data.
  - Estimasi
    - Estimasi tunggal (*point estimates*)
    - Rentang keyakinan (*confidence intervals*)

Rentang Keyakinan

- Estimasi tunggal
  - Contoh
    - Nilai rata-rata sampel sbg estimasi nilai rata-rata populasi.

$$\bar{X} \rightarrow \mu$$

    - Nilai simpangan baku sampel sbg estimasi nilai simpangan baku populasi.

$$s_X \rightarrow \sigma_X$$

Rentang Keyakinan

- Estimasi parameter θ

$$\underbrace{\hat{\theta}}_{\text{estimasi}} \rightarrow \underbrace{\theta}_{\text{parameter}}$$

Dicari suatu interval [*L*,*U*] yang memiliki probabilitas $(1 - \alpha)$ bahwa interval tsb mengandung θ.

$$\boxed{\text{prob}(L < \theta < U) = (1 - \alpha)}$$ → Pers (1)

L = batas bawah rentang keyakinan.
U = batas atas rentang keyakinan.
$(1 - \alpha)$ = tingkat keyakinan (*confidence level*, *confidence coefficient*).
L dan *U* = variabel random

Rentang Keyakinan

- Contoh
  - Data debit Sungai A selama tahun 1981 s.d. 2000 menunjukkan bahwa debit rata-rata adalah 77 m^3/s.
    - Kita dapat memperkirakan debit rata-rata Sungai A adalah 77 m^3/s.
    - Kita menyadari bahwa perkiraan tsb dapat salah; bahkan dari sisi pengertian probabilitas, kita tahu bahwa debit rata-rata sama dengan 77 m^3/s adalah hampir tidak mungkin terjadi:

$$\text{prob}\left(\bar{Q} = 77\ \text{m}^3/\text{s}\right) = 0$$

Batas Bawah dan Batas Atas

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*
  - Dicari variabel random V yang merupakan fungsi parameter θ (θ = *unknown*), tetapi distribusi V ini tidak bergantung pada parameter yang tidak diketahui.
  - Ditentukan v_1 dan v_2 sedemikian hingga:

$$\boxed{\text{prob}\left(v_1 < V < v_2\right) = 1 - \alpha}$$ → Pers. (2)

Batas Bawah dan Batas Atas

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*

$$\text{prob}\left(v_1 < V < v_2\right) = 1 - \alpha$$

  - Persamaan di atas diubah kedalam bentuk prob($L < \theta < U$) = 1− α
  - L dan U adalah variabel random dan fungsi V, tetapi bukan fungsi θ.

Confidence Interval: μ suatu distribusi normal

- Mencari interval [*L*,*U*] yang mengandung μ, prob(L < μ < U) = 1 – α
- Misalkan variabel random *V*:

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$$

  - *V* berdistribusi *t* dengan (*n* – 1) *degrees of freedom*
  - *n* adalah jumlah sampel yang dipakai untuk menghitung nilai rata-rata sampel, $\bar{X}$

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$$ → berdistribusi t?

- Bukti

Distribusi *t*: $X = Y \dfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}}$, $\nu =$ degree of freedom

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s_x^2 / n}} = \frac{\left(\bar{X} - \mu\right)/\sigma}{\sqrt{s_x^2} / \sigma\sqrt{n}} = \frac{\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma / \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s_X^2 / \sigma^2}}$$

$$= \frac{\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma / \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2 / \sigma^2}} = Y \cdot \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}}$$

$$\boxed{\rightarrow Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\nu / \sqrt{n}},\ U = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2},\ \nu = n - 1}$$

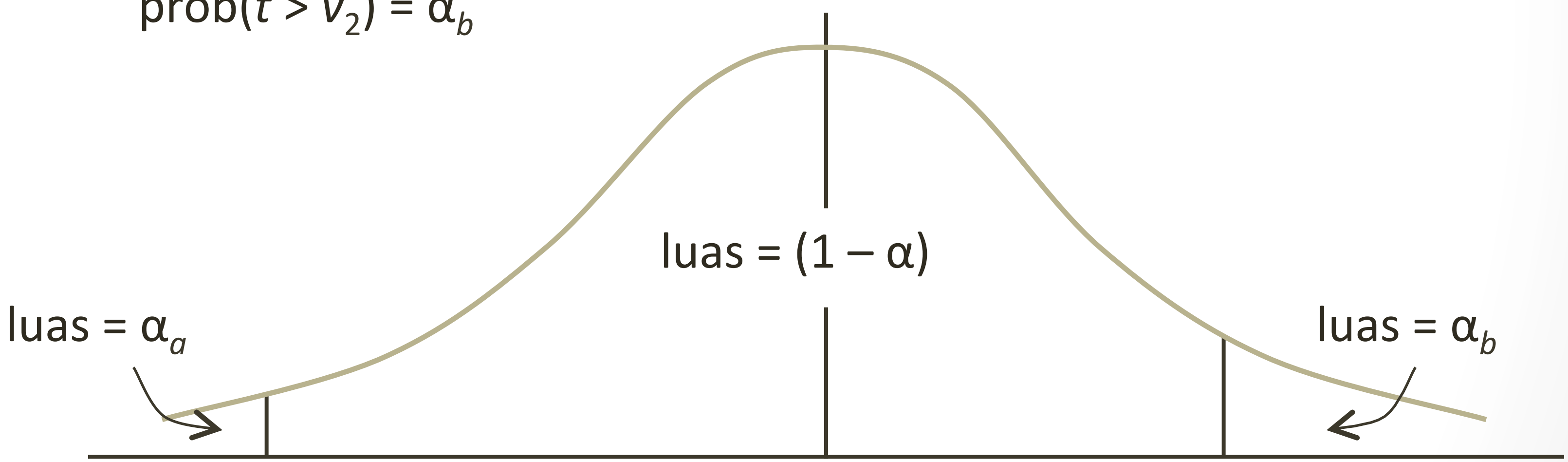
- Pers (2):

$$\text{prob}\left(v_1 < V < v_2\right) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$\alpha_a + \alpha_b = \alpha$

$\text{prob}(t < v_1) = \alpha_a$ dengan $(n - 1)$ *degrees of freedom*

$\text{prob}(t > v_2) = \alpha_b$



$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1-\alpha$$

$$\text{prob}\left(t_{\alpha_a,n-1} < \frac{\bar{X}-\mu}{s_{\bar{X}}} < t_{\alpha_b,n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$\text{prob}\left(\underbrace{\bar{X}+t_{\alpha_a,n-1}\cdot s_{\bar{X}}}_{\ell} < \mu < \underbrace{\bar{X}+t_{\alpha_b,n-1}\cdot s_{\bar{X}}}_{u}\right) = 1-\alpha$$

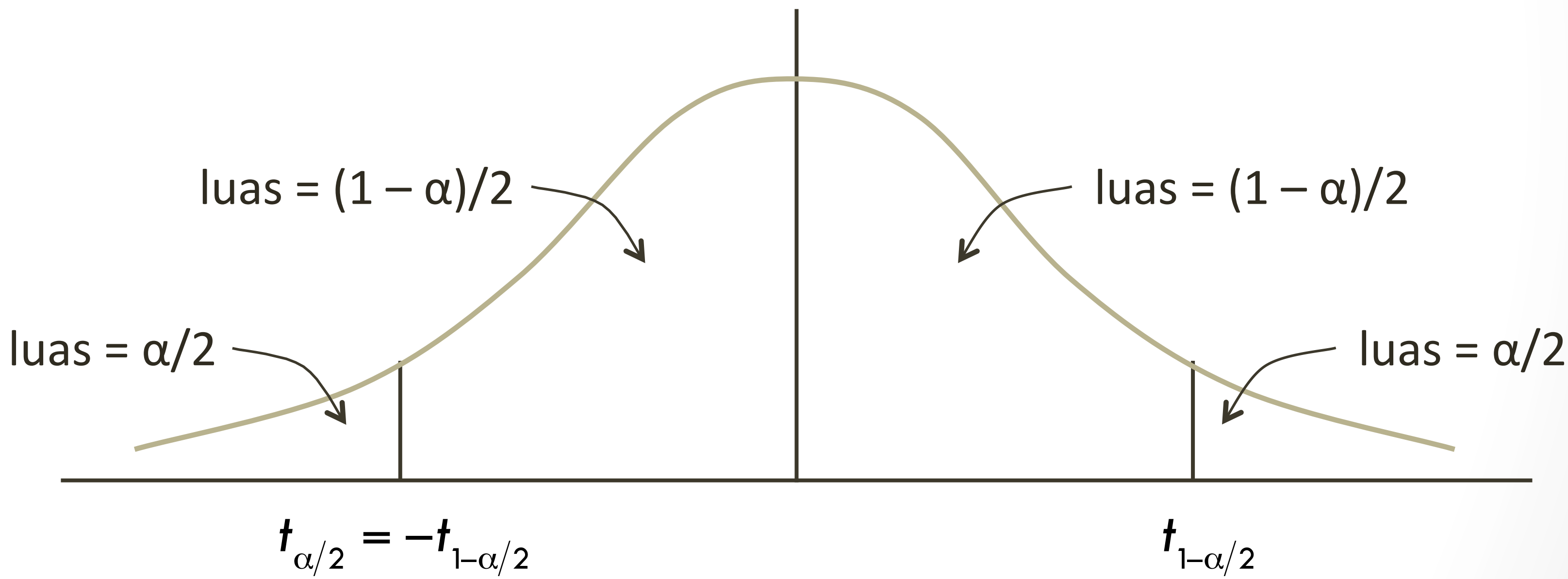
Jadi, confidence limits:

$$\boxed{\begin{aligned}\ell &= \bar{X}+t_{\alpha_a,n-1}\cdot s_{\bar{X}}\\ u &= \bar{X}+t_{\alpha_b,n-1}\cdot s_{\bar{X}}\end{aligned}}$$

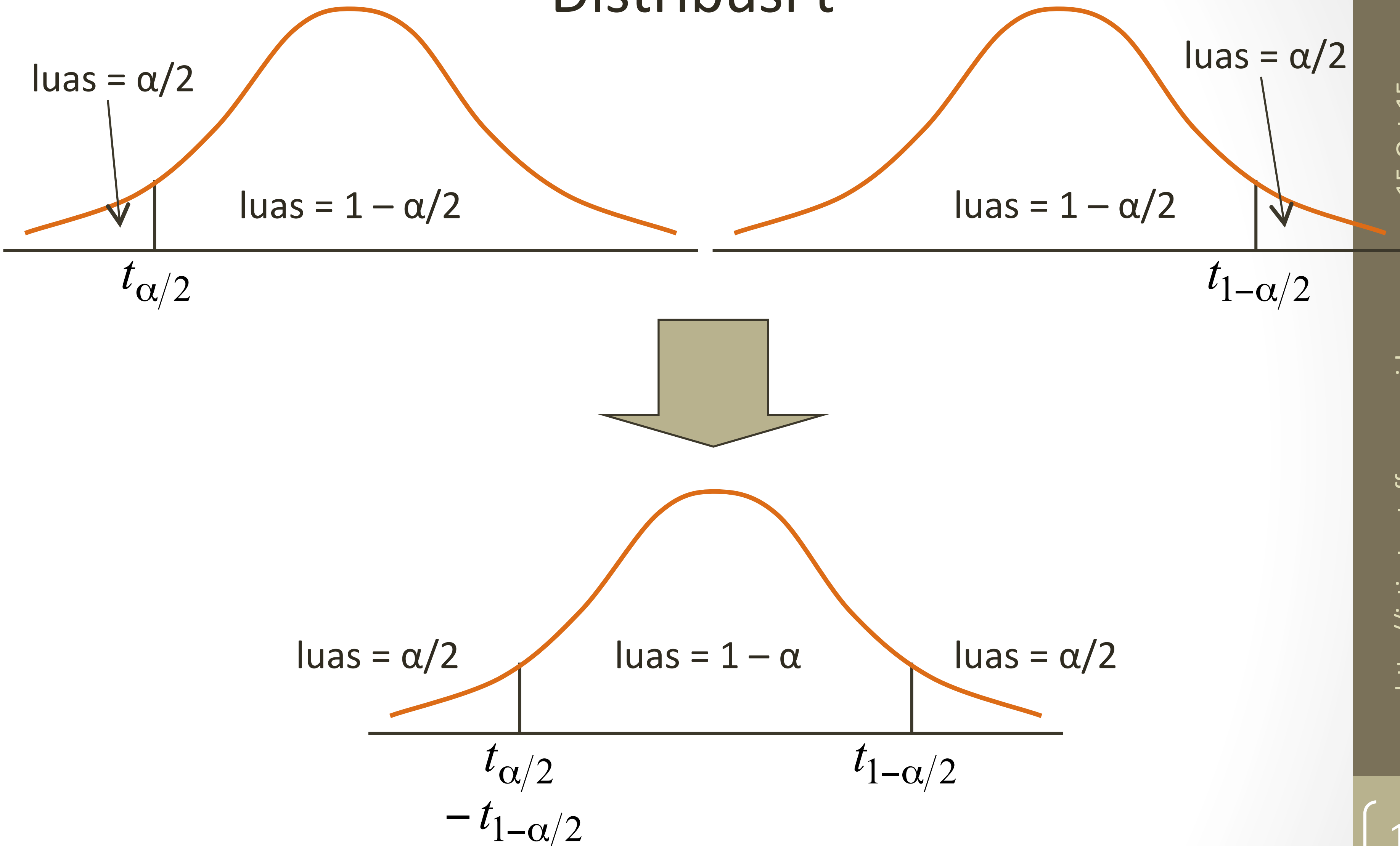
$$s_{\bar{X}} = s_X \big/ \sqrt{n}$$

$t_{\alpha_a,n-1} \longrightarrow$ tabel distribusi t

- Jika dikehendaki probabilitas confidence interval simetris, maka v_1 dan v_2 dipilih sedemikian hingga prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$).
- Karena simetri, maka $\alpha_a = \alpha_b = \alpha/2$
- Yang dicari adalah $(1 - \alpha) = 100(1 - \alpha)\%$ confidence interval → maka: prob($t < v_1$) = $\alpha/2$ = prob($t > v_2$)



Distribusi t



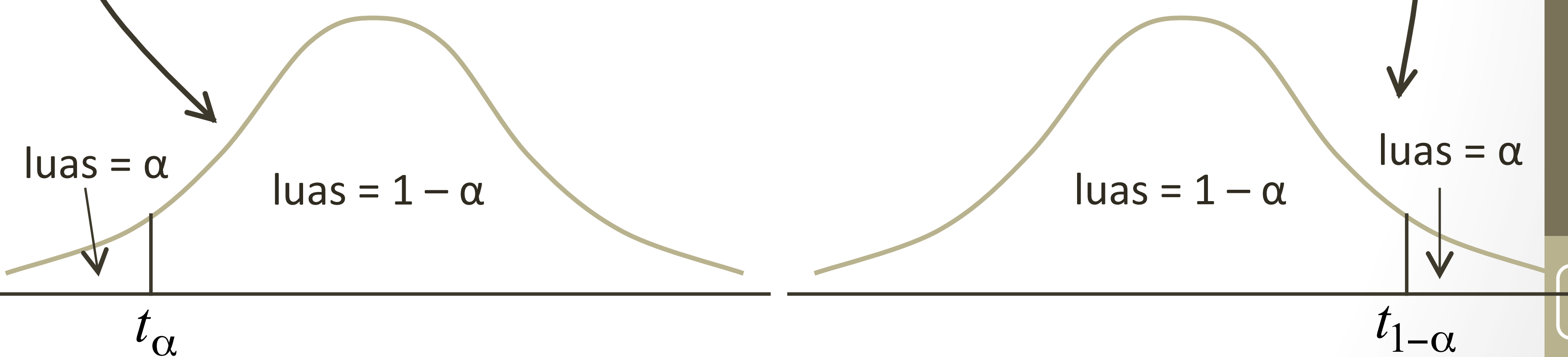
- Dengan demikian, confidence limits jika probabilitas confidence interval simetri adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} \ell &= \overline{X} - t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot s_{\overline{X}} \\ u &= \overline{X} + t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot s_{\overline{X}} \end{aligned}}$$

- Kadang dikehendaki probabilitas confidence interval satu sisi
  - batas bawah → prob($t < v_1$) = α
  - batas atas → prob($t > v_2$) = α

$$\mathrm{prob}\left(V > v_1\right) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} > v_1\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{prob}\left(V < v_2\right) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$



Distribusi t

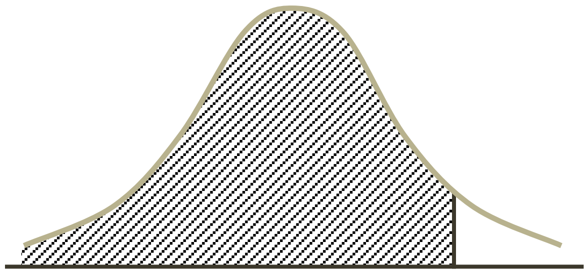
- Notasi
  - $t_{\gamma,n}$ = nilai t sedemikian hingga probabilitas variabel random t dengan n *degrees of freedom* adalah lebih kecil daripada γ.
  - misalkan:
    $t_{0.95,50}$ = nilai t sedemikian hingga prob($t < t_{0.95,50}$) = 0.95 untuk t yang memiliki 50 *degrees of freedom*.

Distribusi *t*

- Dapat dibaca di tabel distribusi *t*
  - Tabel Distribusi *t*
- Dapat dihitung dengan perintah/fungsi MSExcel
  - T.DIST(t,ν,true)
    - menghitung nilai prob($T < t$)
    - untuk menghitung nilai prob($T > t$) → 1 – T.DIST(t,ν,true)
    - t = nilai yang diinginkan untuk dicari distribusinya
    - ν = *degree of freedom*
    - *one-tailed distribution*
  - T.INV(p,ν)
    - mencari nilai t jika nilai p = prob($T < t$) diketahui
    - *one-tailed distribution*

Distribusi *t*

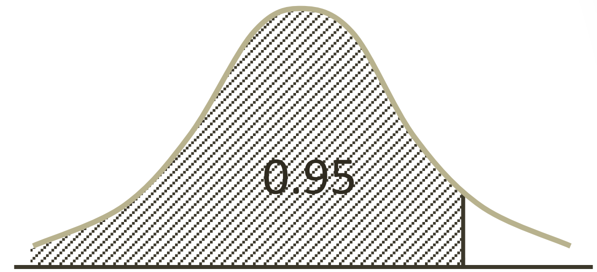
untuk 50 degrees of freedom



$t = 1.6$

prob(T < 1.6) = T.DIST(1.6,50,TRUE) = 0.942

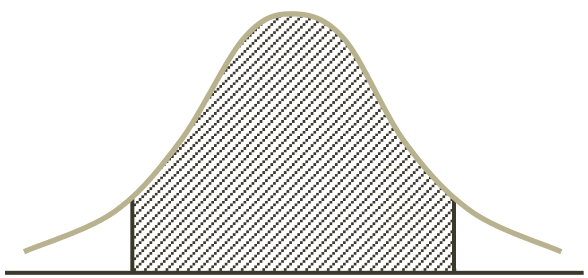
prob(T < 1.6) = 1 – T.DIST.RT(1.6,50) = 0.942



t

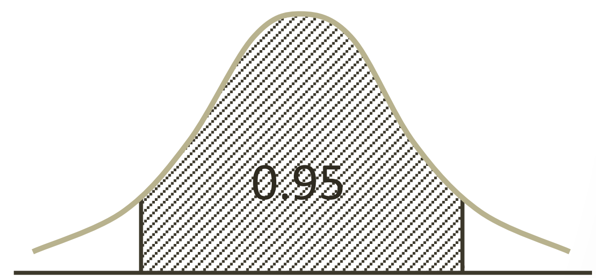
prob(T < t) = 0.95

t = T.INV(0.95,50) = 1.68



$t = -1.6$ $\quad$ $t = 1.6$

prob(–1.6 < T < 1.6) = 1 – T.DIST.2T(1.6,50) = 0.884



$-t$ $\quad$ t

prob(-t < T < t) = 0.95

t = T.INV.2T(1-0.95,50) = 2

Rentang Keyakinan:
μ suatu distribusi normal

- Apabila varian populasi diketahui, maka variabel random *V* didefinisikan sbb.:

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}, \quad \sigma_{\bar{X}} = \sigma_X \big/ \sqrt{n}$$

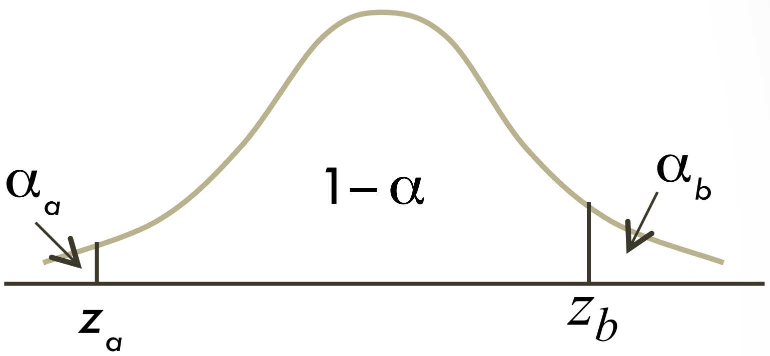
→ *V* berdistribusi normal

Rentang Keyakinan:
μ suatu distribusi normal, σ diketahui

- Rentang keyakinan

$$\ell = \bar{X} + z_a \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

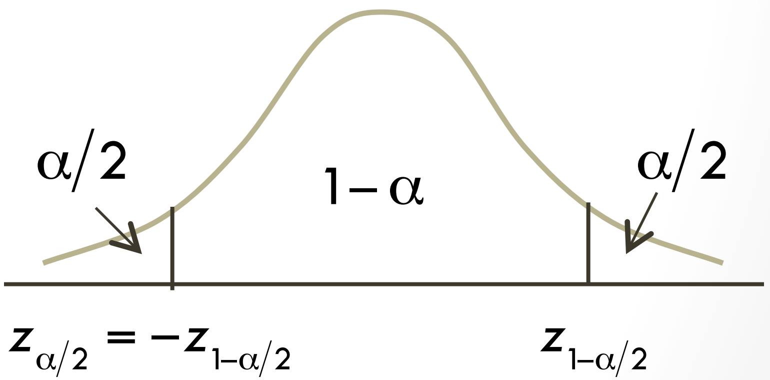
$$u = \bar{X} + z_b \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



- Jika probabiitas rentang keyakinan diinginkan simetris

$$\ell = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



Rentang Keyakinan: σ^2 suatu distribusi normal

- Mencari interval [*L*,*U*] yang mengandung σ^2 dengan peluang prob($L < \sigma^2 < U$) = 1 – α.
- Didefinisikan variabel random *V*:

$$V = \frac{(n-1)\,{s_X}^2}{{\sigma_X}^2}$$

- → *V* berdistribusi chi-kuadrat dengan (n – 1) *degrees of freedom*.

$$\text{prob}\left(v_1 < V < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{(n-1)\,s_X{}^2}{\sigma_X{}^2} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

Pilih: $v_1 = \chi^2_{\alpha/2,n-1}$

$v_2 = \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$

sehingga: $$\text{prob}\left(\chi^2_{\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)\,s_X{}^2}{\sigma_X{}^2} < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha$$

atau: $$\text{prob}\left(\frac{(n-1)\,s_X{}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} < \sigma_X{}^2 < \frac{(n-1)\,s_X{}^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

- Jadi batas bawah dan batas atas rentang yang mengandung σ_X^2 dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$ adalah:

  - batas bawah: $$\ell = \frac{(n-1)\, s_X^{\ 2}}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$
  - batas atas: $$u = \frac{(n-1)\, s_X^{\ 2}}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}$$

Catatan: X berdistribusi normal

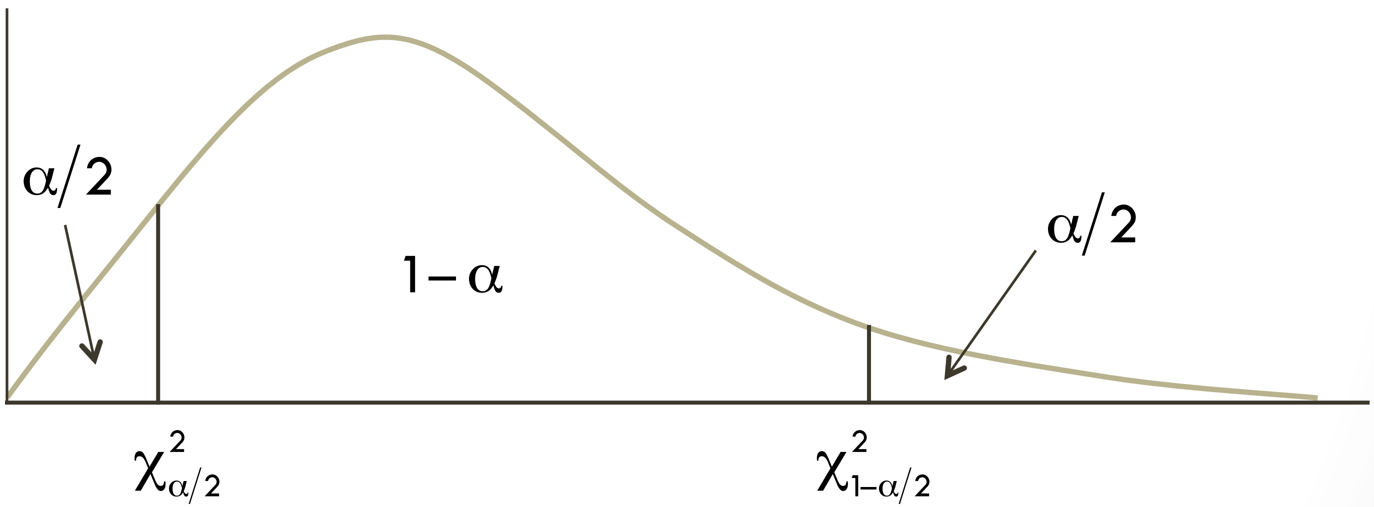
χ^2 berdistribusi chi-kuadrat

- Distribusi chi-kuadrat tidak simetris:

$$s_X^{\,2} - \ell \neq u - s_X^{\,2}$$

n » → $(n - 1)$ » → distribusi mendekati distribusi simetris,

s_X^2 berada kira-kira di tengah-tengah rentang $[L,U]$.



Rentang Keyakinan Satu Sisi

- Hanya diinginkan satu sisi rentang keyakinan saja
  - hanya batas bawah rentang keyakinan μ

$$\text{prob}\left(L < \theta\right) = 1 - \alpha \;\Rightarrow\; \ell = \bar{X} - t_{1-\alpha,n-1}$$

  - hanya batas atas saja rentang keyakinan μ

$$\text{prob}\left(\theta < U\right) = 1 - \alpha \;\Rightarrow\; u = \bar{X} + t_{1-\alpha,n-1}$$

Terima kasih