PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2009

SOAL A

Pengolahan data debit, Q m^3/s, di suatu sungai menunjukkan bahwa sebaran peluang terjadinya suatu besaran debit, $p_Q(q)$, dapat dinyatakan dengan suatu fungsi (pdf) berikut:

$$
\begin{aligned}
p_Q(q) &= \frac{1}{100} a q && \text{jika} \quad 0 \le q < 50 \\
&= \frac{1}{2} a && \text{jika} \quad 50 \le q < 150 \\
&= \frac{1}{300} a(300 - q) && \text{jika} \quad 150 \le q < 300 \\
&= 0 && \text{untuk nilai } q \text{ yang lain}
\end{aligned}
$$

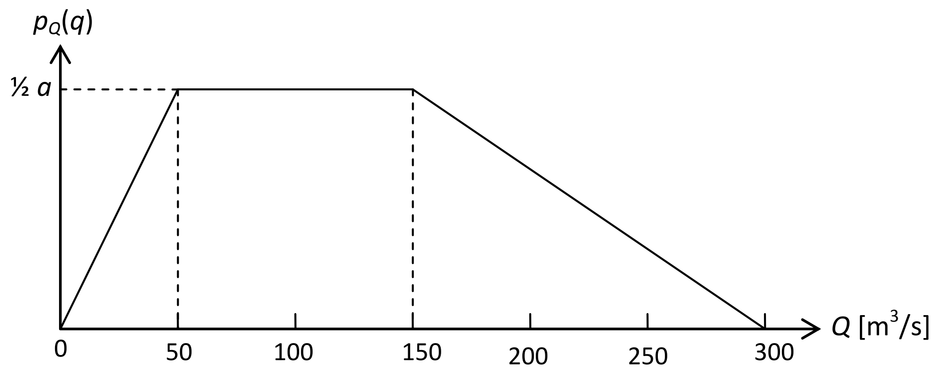
Dalam persamaan pdf di atas, satuan debit adalah m^3/s.

1. Gambar pdf debit sungai tersebut.
2. Hitung konstanta a.
3. Cari dan gambarkan fungsi distribusi kumulatif (cdf) debit Q.
4. Hitung debit rata-rata, $\overline{Q}$, sungai tersebut.
5. Hitung probabilitas debit antara 100 s.d. 200 m^3/s, prob(100 < Q (m^3/s) < 200).

PENYELESAIAN

Sketsa pdf

Probability density function, pdf, data debit sungai dalam soal tersebut dapat lebih mudah difahami dengan menampilkannya dalam bentuk grafik.



Konstanta *a*

Nilai kontanta a dicari dari definisi bahwa luas di bawah kurva pdf merupakan probabilitas (peluang) seluruh debit yang mungkin lewat di penggal sungai tersebut; jadi luas di bawah kurva pdf sama dengan satu.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_Q(q)\,\mathrm{d}q = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}q + \int_{0}^{50} \frac{1}{100} aq\,\mathrm{d}q + \int_{50}^{150} \frac{1}{2} a\,\mathrm{d}q + \int_{150}^{300} \frac{1}{300} a(300-q)\,\mathrm{d}q + \int_{0}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}q = 1$$

$$0 + \frac{1}{200} a\left(50^2 - 0\right) + \frac{1}{2} a(150-50) + \frac{1}{300} a\left[300(300-150) - \frac{1}{2}\left(300^2 - 150^2\right)\right] + 0 = 1$$

$$\left(\frac{25+100+75}{2}\right) a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{100}$$

Tentu saja, luas di bawah kurva pdf di atas dapat dihitung lebih mudah dengan memperhatikan trapesium yang dibentuk oleh salib sumbu dan kurva pdf.

Luas trapesium = 1

$$\frac{(300+100)}{2} \times \frac{1}{2} a = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{100}$$

Fungsi distribusi kumulatif, cdf

$$P_Q(q) = \mathrm{prob}(Q < q) = \int p_Q(q)\,\mathrm{d}q$$

<u>Interval $q \le 0$</u>

$$P_Q(q) = 0$$

<u>Interval $0 \le q \le 50$ m³/s</u>

$$P_Q(q) = \int \frac{q}{10^4}\,\mathrm{d}q = \frac{q^2}{2\times 10^4} + C_1$$

Syarat batas: $P_Q(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$P_Q(q) = \frac{q^2}{2\times 10^4}$$

$$P_Q(50) = \frac{50^2}{2\times 10^4} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

<u>Interval $50 \le q \le 150$ m³/s</u>

$$P_Q(q) = \int \frac{1}{200}\,\mathrm{d}q = \frac{1}{200}(q + C_2)$$

Syarat batas: $P_Q(50) = 25/200 \Rightarrow C_2 = -25$

$$P_Q(q) = \frac{1}{200}(q - 25)$$

$$P_Q(150)=\frac{1}{200}(150-25)=\frac{125}{200}=\frac{5}{8}$$

<u>Interval $150 \le q \le 300$ m³/s</u>

$$P_Q(q)=\int\frac{1}{3\times10^4}(300-q)\,dq=\frac{1}{3\times10^4}\left(300q-\frac{1}{2}q^2+C_3\right)$$

Syarat batas: $P_Q(300)$ = 1 $\Rightarrow$

$$1=\frac{1}{3\times10^4}\left(300^2-\frac{1}{2}300^2+C_3\right)$$

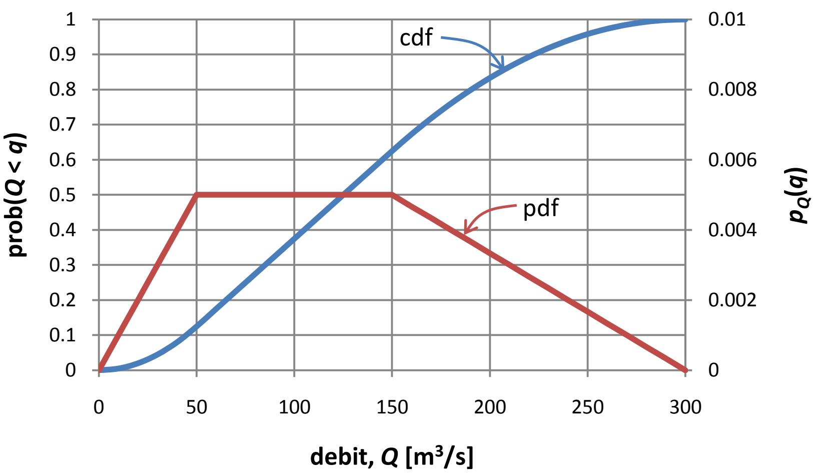
$$C_3=3\times10^4-\frac{1}{2}300^2=-50\times300=-15000$$

$$P_Q(q)=\frac{1}{3\times10^4}\left(300q-\frac{1}{2}q^2-15000\right)$$

<u>Interval $q \ge 300$ m³/s</u>

$$P_Q(q)=1$$

Debit, *Q* [m³/s]	**pdf**	**cdf**
$q \le 0$	$p_Q(q)=0$	$P_Q(q)=0$
$0 \le q \le 50$	$p_Q(q)=\frac{q}{10^4}$	$P_Q(q)=\frac{q^2}{2\times10^4}$
$50 \le q \le 150$	$p_Q(q)=\frac{1}{200}$	$P_Q(q)=\frac{1}{200}(q-25)$
$150 \le q \le 300$	$p_Q(q)=\frac{1}{3\times10^4}(300-q)$	$P_Q(q)=\frac{1}{3\times10^4}\left(300q-\frac{1}{2}q^2-15000\right)$
$q \ge 300$	$p_Q(q)=0$	$P_Q(q)=1$



Debit rata-rata

Elevasi muka air rata-rata merupakan nilai expektasi elevasi muka air, E(q), yang merupakan momen pertama terhadap sumbu ordinat pada pdf.

$$\mathrm{E}(q) = \int q\, p_Q(q)\,\mathrm{d}q = \int_0^{50} \frac{1}{10^4} q^2\,\mathrm{d}q + \int_{50}^{150} \frac{1}{200} q\,\mathrm{d}q + \int_{150}^{300} \frac{1}{3\times10^4}\left(300q - q^2\right)\mathrm{d}q$$

$$= \left[\frac{1}{3\times10^4}\left(50^3 - 0\right)\right] + \left[\frac{1}{400}\left(150^2 - 50^2\right)\right] + \left[\frac{1}{3\times10^4}\left(\frac{300^3 - 300\cdot150^2}{2} - \frac{300^3 - 150^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{125\times10^3}{3\times10^4} + \frac{3^2\cdot50^2 - 50^2}{400} + \frac{1}{3\times10^4}\left(\frac{4\cdot300\cdot150^2}{2} - \frac{7\cdot150^3}{3}\right)$$

$$= \frac{125}{30} + 50 + 75$$

$$= 129\tfrac{1}{6}$$

$$\approx 129\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Probabilitas debit antara 100 s.d. 200 m³/s

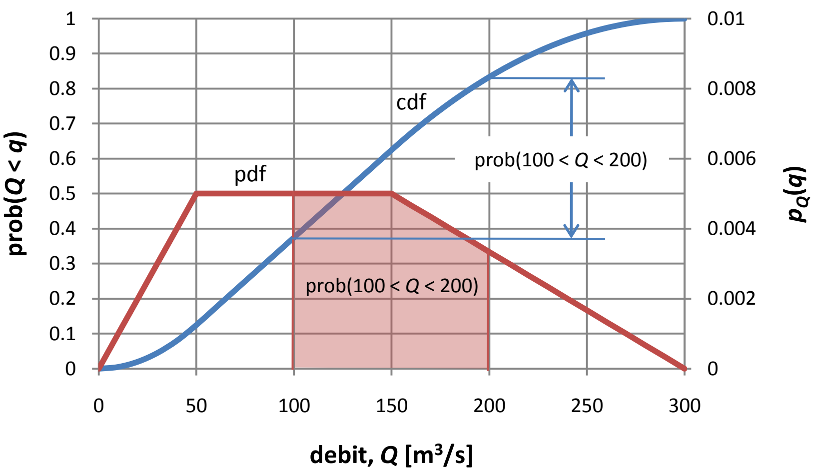
$$\mathrm{prob}\left(100 < Q\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}] < 200\right) = \mathrm{prob}(Q < 200) - \mathrm{prob}(Q < 100)$$

$$= P_Q(200) - P_Q(100)$$

$$= \frac{1}{3\times10^4}\left(300\cdot200 - \frac{1}{2}\cdot200^2 - 15000\right) - \frac{1}{200}(100 - 25)$$

$$= \frac{11}{24}$$

$$\approx 0.46$$



SOAL B

Pengukuran evaporasi harian (dalam mm) selama 30 hari dari suatu stasiun menunjukkan nilai evaporasi harian sebagai berikut:

9	9	10	10	12	9	6	7	14	11
12	8	7	11	8	13	6	5	8	4
12	7	8	13	14	11	4	11	8	11

1. Buatlah tabel frekuensi dan histogram (frekuensi, bukan frekuensi relatif) data evaporasi harian tersebut. Lebar klas 2 mm dengan batas bawah klas pertama 3 mm (rentang klas pertama 3 - 5 mm).
2. Hitunglah nilai rata-rata dan simpangan baku evaporasi harian tersebut. ***Bulatkan kedua nilai kedalam milimeter terdekat***.
3. Hitunglah frekuensi (bukan frekuensi relatif) data evaporasi harian dalam setiap klas data menurut distribusi normal.
4. Buatlah gambar perbandingan antara frekuensi data dan frekuensi teoretik menurut distribusi normal (bukan frekuensi relatif).
5. Hitunglah rentang keyakinan nilai rata-rata evaporasi harian dengan tingkat keyakinan 95%.

PENYELESAIAN

Penyelesaian soal ini dapat dilakukan dengan cepat dengan menggunakan bantuan MSExcel. Namun demikian, waktu yang disediakan cukup longgar pula apabila penyelesaian dilakukan dengan hanya menggunakan bantuan kalkulator. Hitungan disajikan dalam bentuk tabel frekuensi.

Tabel 1. Distribusi frekuensi evaporasi harian (dalam mm) di suatu stasiun klimatologi.

Evaporasi harian E [mm]		Frekuensi f	$f\,E$ [mm]	$f\,E^2$ [mm^2]
3 – 5	4	3	12	48
5 – 7	6	5	30	180
7 – 9	8	8	64	512
9 – 11	10	7	70	700
11 – 13	12	5	60	720
13 – 15	14	2	28	392
	∑	30	264	2552

Evaporasi harian rata-rata

$$\bar{E} = \frac{\sum fE}{\sum f} = \frac{264}{30} = 8.8 \approx 9\,\text{mm}$$

Simpangan baku evaporasi harian

$$s_E = \sqrt{\frac{\sum\left(fE^2\right) - \sum f \cdot \left(\bar{E}\right)^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{2552 - 30 \cdot 8.8^2}{30 - 1}} = 2.81 \approx 3\,\text{mm}$$

Distribusi frekuensi evaporasi harian teoretis menurut distribusi normal dapat dicari dengan menggunakan bantuan tabel cdf atau tabel pdf distribusi normal, atau dengan menggunakan bantuan MSExcel. Frekuensi teoretik suatu variabel random yang berdistribusi normal dihitung dengan memakai persamaan berikut:

$$f_E(e) = \Delta e \cdot p_E(e)$$

$$p_E(e) = \frac{\mathrm{d}P_E(e)}{\mathrm{d}e} \approx \frac{P_E(e_{\text{batas atas}}) - P_E(e_{\text{batas bawah}})}{\Delta e}$$

$$f_E(e) = P_E(e_{\text{batas atas}}) - P_E(e_{\text{batas bawah}})$$

Dalam persamaan di atas, $f_E(e)$ adalah frekuensi relatif, Δe adalah rentang klas, $p_E(e)$ adalah ordinat kurva normal standar, $P_E(e) = \text{prob}(E < e)$, $e_{\text{batas atas}}$ dan $e_{\text{batas bawah}}$ adalah batas atas dan batas bawah rentang klas evaporasi harian. Dalam MSExcel, nilai $P_E(e)$ dicari dengan perintah =NORMDIST(…): $P_E(5)$ = NORMDIST(5,9,2,TRUE). Nilai 9 dan 2 berturut-turut adalah nilai rata-rata dan simpangan baku evaporasi harian.

Apabila menggunakan tabel distribusi normal standar, nilai $P_E(e)$ harus diubah dulu kedalam nilai normal standar.

$$\begin{aligned} f_E(e) &= P_Z(z_{\text{batas atas}}) - P_Z(z_{\text{batas bawah}}) \\ &= P_Z\left(\frac{e_{\text{batas atas}} - \bar{E}}{s_E}\right) - P_Z\left(\frac{e_{\text{batas bawah}} - \bar{E}}{s_E}\right) \end{aligned}$$

Untuk klas pertama 3 < E < 5, frekuensi teoretik menurut distribusi normal adalah:

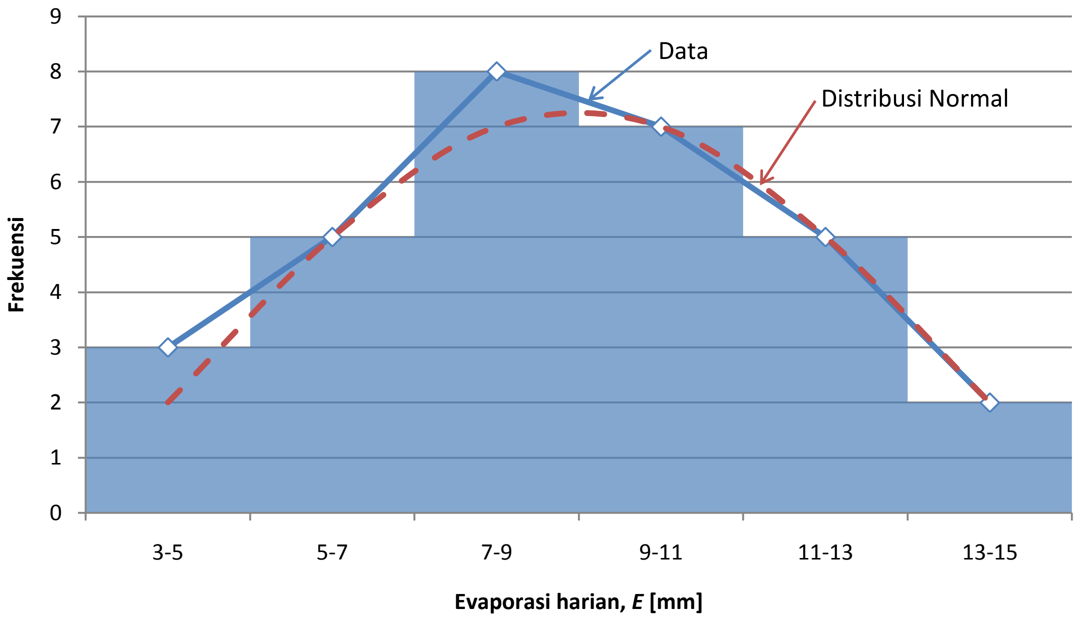
$$\begin{aligned} f_E(e) &= P_Z\left(\frac{5-9}{2}\right) - P_Z\left(\frac{3-9}{2}\right) \\ &= P_Z(-2) - P_Z(-3) \\ &= 0.02275 - 0.00135 \\ &= 0.0214 \end{aligned}$$

Nilai $P_Z(z)$ selain dapat diperoleh dari tabel distribusi normal standar, dapat pula diperoleh dengan perintah =NORMSDIST(…) dalam MSExcel: $P_Z(-2)$ = NORMSDIST(−2).

Dengan ukuran sampel 30 buah, maka frekuensi teoretik pada klas pertama adalah 0.0214 × 30 ≈ 1. Frekuensi teoretik untuk seluruh klas interval disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Distribusi frekuensi evaporasi harian di suatu stasiun menurut distribusi normal.

Data								Distribusi Normal				
Klas *E* (mm)			Frek *f*	Klas *Z*			$P_Z(z)$			$f_Z(z)$	Frek *f*
3	–	5	3	-2.0000	–	-1.3333	0.0228	–	0.0912	0.0685	2
5	–	7	5	-1.3333	–	-0.6667	0.0912	–	0.2525	0.1613	5
7	–	9	8	-0.6667	–	0.0000	0.2525	–	0.5000	0.2475	7
9	–	11	7	0.0000	–	0.6667	0.5000	–	0.7475	0.2475	7
11	–	13	5	0.6667	–	1.3333	0.7475	–	0.9088	0.1613	5
13	–	15	2	1.3333	–	2.0000	0.9088	–	0.9772	0.0685	2
		∑	30							∑	28



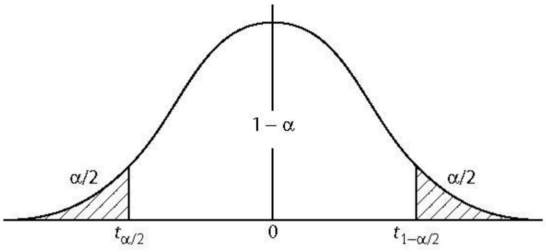
Memperhatikan perbandingan histogram data dan distribusi normal di atas, dapat disimpulkan bahwa evaporasi harian di stasiun tersebut berdistribusi normal.

Rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 95\%$ dihitung dengan cara sebagai berikut:

Rentang keyakinan nilai rata-rata adalah suatu rentang dengan batas bawah *L* dan batas atas *U* sedemikian hingga dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$, atau dengan probabilitas $(1-\alpha)$, nilai evaporasi harian rata-rata, μ_E, berada di dalam rentang tersebut adalah prob$(L < \mu_E < U)$ = $(1-\alpha)$. Jika *E* berdistribusi normal, maka suatu variabel random *V* yang didefinisikan sebagai $V = \left(\bar{E} - \mu_E\right) / s_{\bar{E}}$ berdistribusi t. Oleh karena itu, rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{E} - \mu_E}{s_{\bar{E}}} < v_2 \right) = 1 - \alpha$$

Jika nilai v_1 dan v_2 ditetapkan sedemikian sehingga prob$(t < v_1)$ = prob$(t > v_2)$, dan dengan demikian prob$(t < v_1)$ = prob$(t > v_2)$ = $\alpha/2$ (lihat sketsa di bawah), maka batas bawah dan atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dapat diperoleh dari:



$$\text{prob}\left(t_{\alpha/2,n-1} < \frac{\bar{E}-\mu_E}{s_{\bar{E}}} < t_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$\text{prob}\left(\bar{E} + t_{\alpha/2,n-1}\, s_{\bar{E}} < \mu_E < \bar{E} + t_{1-\alpha/2,n-1}\, s_{\bar{E}}\right) = 1-\alpha$$

Dalam persamaan di atas, n adalah jumlah data ($n = \Sigma f$), $t_{\alpha/2}$ dan $t_{1-\alpha/2}$ masing-masing adalah nilai T sedemikian hingga prob($T < t_{\alpha/2,\nu}$) = $\alpha/2$ dan prob($T < t_{1-\alpha/2,\nu}$) = $1 - \alpha/2$ untuk $\nu = n - 1$ *degrees of freedom*, serta $s_{\bar{E}} = s_E / \sqrt{n}$. Nilai batas bawah dan atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata dengan demikian adalah:

$\ell = \bar{E} + t_{\alpha/2}\left(s_E/\sqrt{n}\right)$ dan $u = \bar{E} + t_{1-\alpha/2}\left(s_E/\sqrt{n}\right)$.

Dengan nilai *degrees of freedom* $\nu = n - 1 = 29$ dan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.95$ ($\alpha/2 = 0.025$ dan $1 - \alpha/2 = 0.975$), maka dengan memakai tabel distribusi t atau fungsi =TINV(...), diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

prob($T < t_{0.025}$) = 0.025 → $t_{0.025} = -2.0452$ dan

prob($T < t_{0.975}$) = 0.975 → $t_{0.975} = 2.0452$.

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang keyakinan evaporasi harian rata-rata adalah:

$\ell = 9 - 2.0452\left(3/\sqrt{30}\right) = 8\text{mm}$ dan $u = 9 + 2.0452\left(3/\sqrt{30}\right) = 10\text{mm}$

sehingga: $8\,\text{mm} \le \mu_E \le 10\,\text{mm}$.

-o0o-