Penyelesaian Soal Ujian Tengah Semester 2008

Soal A

Curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta disajikan pada tabel di bawah ini.

kedalaman hujan (mm)	frekuensi
45 – 65	3
65 – 85	8
85 – 105	12
105 – 125	6
125 – 145	1

Curah hujan harian maximum tahunan di atas dapat dikatakan berdistribusi normal.

1. Hitunglah frekuensi yang seharusnya (teoretik) menurut distribusi normal pada setiap rentang klas kedalaman hujan.
2. Tetapkan rentang keyakinan nilai rata-rata dengan tingkat keyakinan 90%.
3. Lakukan uji hipotesis yang menyatakan bahwa nilai rata-rata curah hujan harian maximum tahunan adalah 90 mm. Pakailah tingkat keyakinan 90%.
4. Hitunglah:
   a. peluang curah hujan harian maximum tahunan kurang dari 70 mm,
   b. peluang curah hujan harian maximum tahunan lebih dari 100 mm,
   c. peluang curah hujan harian maximum tahunan antara 70 s.d. 100 mm.

Penyelesaian

Langkah pertama yang harus dilakukan untuk melakukan butir-butir perintah pada soal ini adalah perhitungan nilai rata-rata dan simpangan baku data curah hujan. Hitungan dikerjakan dengan menyusun data curah hujan kedalam tabel frekuensi seperti disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta

rentang kedalaman hujan (mm)	nilai klas, h (m**m**)	frek, f	$f \times h$	$f \times h^2$
45 – 65	55	3	165	9075
65 – 85	75	8	600	45000
85 – 105	95	12	1140	108300
105 – 125	115	6	690	79350
125 – 145	135	1	135	18225
	Σ	30	2730	259950

Nilai rata-rata dan simpangan baku curah hujan harian maximum tahunan dapat diperoleh dengan mudah.

$$\bar{h} = \frac{\sum f \times h}{\sum f} = \frac{2730}{30} = 91\,\text{mm}$$

$$s_H = \sqrt{\frac{\sum f\left(h-\bar{h}\right)^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{\sum f\,h^2 - \left(\sum f\,h\right)^2 / \sum f}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{259950 - 91^2/30}{30-1}} = 19.93 \approx 20\,\text{mm}$$

Distribusi frekuensi curah hujan harian maximum tahunan hasil pengukuran vs teoretik

Frekuensi teoretik menurut distribusi normal teoretik diperoleh dengan bantuan tabel distribusi normal standar atau dengan bantuan MSExcel.

<u>Cara #1: dengan bantuan tabel cdf distribusi normal standar</u>

$$f_H(h) = \Delta h \cdot p_H(h)$$

$$p_H(h) = \frac{\mathrm{d}P_H(h)}{\mathrm{d}h} \approx \frac{P_H\left(h_{\text{batas atas}}\right) - P_H\left(h_{\text{batas bawah}}\right)}{\Delta h}$$

$$f_H(h) = P_H\left(h_{\text{batas atas}}\right) - P_H\left(h_{\text{batas bawah}}\right)$$

Dalam persamaan-persamaan di atas, $f_H(h)$ adalah frekuensi relatif, Δh adalah rentang klas, $p_H(h)$ adalah ordinat kurva normal, $P_H(h) = \text{prob}(H < h)$, $h_{\text{batas atas}}$ dan $t_{\text{batas bawah}}$ adalah batas atas dan batas bawah rentang klas. Curah hujan harian maximum tahunan *H* perlu diubah dulu menjadi nilai *Z*:

$$f_H(h) = f_Z(z) = P_Z\left(z_{\text{batas atas}}\right) - P_Z\left(z_{\text{batas bawah}}\right) = P_Z\left(\frac{h_{\text{batas atas}} - \bar{H}}{s_H}\right) - P_Z\left(\frac{h_{\text{batas bawah}} - \bar{H}}{s_H}\right)$$

Untuk klas ke-1, frekuensi relatif teoretik adalah:

$$f_H(h) = P_Z\left(\frac{65-91}{20}\right) - P_Z\left(\frac{45-91}{20}\right) = P_Z(-1.3) - P_Z(-2.3) = 0.0968 - 0.0107 = 0.0861$$

Dengan demikian, frekuensi teoretik klas ke-1 adalah:

$$F_H(h) = f_H(h) \times \Sigma f = 0.0861 \times 30 \approx 3$$

<u>Cara #2: dengan bantuan tabel pdf distribusi normal standar</u>

$$f_H(h) = \Delta h \times p_H(h) = \Delta h \times p_Z(z) \times \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}h}\right| = \Delta h \times \frac{p_Z(z)}{s_H}$$

Nilai $p_Z(z)$ diperoleh dari tabel ordinat kurva normal standar. Untuk klas ke-1, frekuensi relatif teoretik adalah:

$$f_H(h=55) = \Delta h \cdot \frac{p_Z\left(\frac{55-91}{20}\right)}{s_H} = \Delta h \cdot \frac{p_Z(-1.8)}{s_H} = 20 \cdot \frac{0.0789}{20} = 0.0789$$

dan frekuensi relatif klas ke-1 adalah:

$$F_H(h=55) = f_H(h) \times \Sigma f = 0.0789 \times 30 \approx 2$$

Cara #3: dengan bantuan MSExcel untuk menghitung cdf

Cara ini mirip dengan Cara #1, hanya saja tidak diperlukan pembacaan tabel distribusi normal standar untuk mencari nilai cdf. MSExcel menyediakan fungsi untuk keperluaan ini. Frekuensi relatif dan frekuensi klas ke-1 diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$f_H(h) = P_H(65) - P_H(45) = \mathrm{NORMDIST}(65{,}91{,}20{,}\mathrm{TRUE}) - \mathrm{NORMDIST}(45{,}91{,}20{,}\mathrm{TRUE}) = 0.0861$$

$$F_H(h) = f_H(h) \times \Sigma f = 0.0861 \times 30 \approx 3$$

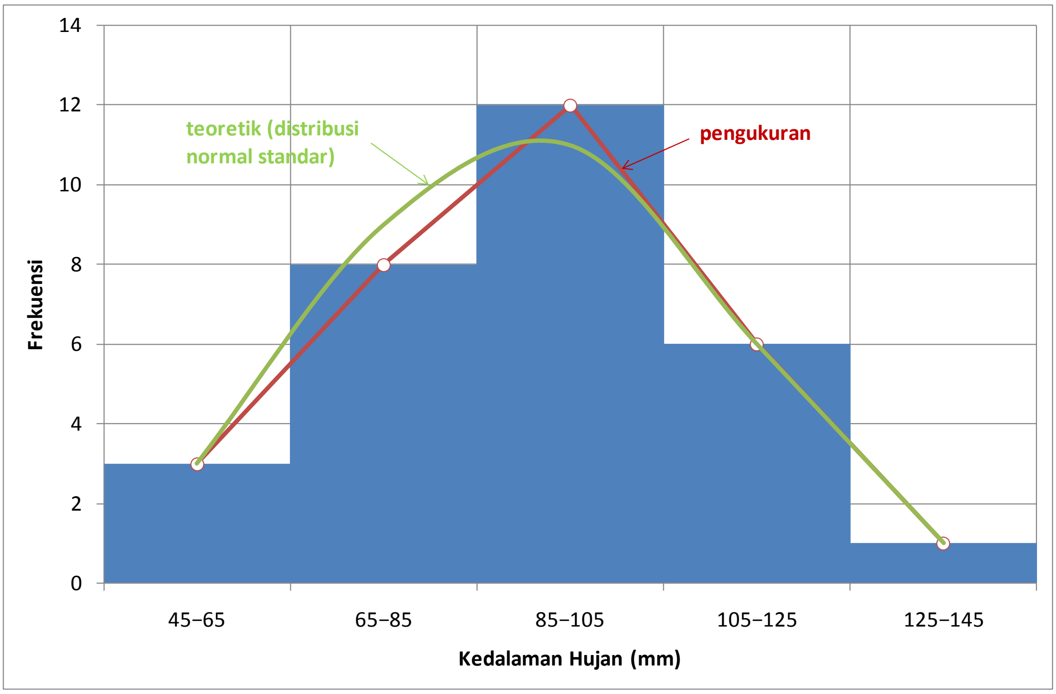
Cara #4: dengan bantuan MSExcel untuk menghitung pdf

MSExcel juga menyediakan fungsi untuk menghitung pdf suatu distribusi normal. Dengan cara ini, frekuensi relatif dan frekuensi klas ke-1 adalah sebagai berikut:

$$f_H(h=55) = \Delta h \times p_H(55) = 20 \times \mathrm{NORMDIST}(55{,}91{,}20{,}\mathrm{FALSE}) = 20 \times 0.0039 = 0.0789$$

$$F_H(h) = f_H(h) \times \Sigma f = 0.0789 \times 30 \approx 2$$

Hasil hitungan frekuensi teoretik menurut distribusi normal selengkapnya disajikan pada Tabel 2. Perbandingan antara frekuensi curah hujan harian maximum tahunan hasil pengukuran dan hasil hitungan (teoretik) disajikan secara grafis pada Gambar 1.



Gambar 1. Distribusi curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta

Tabel 2. Distribusi teoretik menurut distribusi normal curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta

Pengukuran			Teoretik Cara #1			Teoretik Cara #2				Teoretik Cara #3		Teoretik Cara #4		
rentang kedalaman hujan (mm)	frek	h (mm)	z_H	frek rel	frek	z_H	$p_Z(z_H)$	frek rel	frek	frek rel	frek	$p_H(h)$	frek rel	frek
45 – 65	3	55	-2.3 – -1.3	0.0861	3	-1.8	0.0790	0.0790	2	0.0861	3	0.0039	0.0790	2
65 – 85	8	75	-1.3 – -0.3	0.2853	9	-0.8	0.2897	0.2897	9	0.2853	9	0.0145	0.2897	9
85 – 105	12	95	-0.3 – 0.7	0.3759	11	0.2	0.3910	0.3910	12	0.3759	11	0.0196	0.3910	12
105 – 125	6	115	0.7 – 1.7	0.1974	6	1.2	0.1942	0.1942	6	0.1974	6	0.0097	0.1942	6
125 – 145	1	135	1.7 – 2.7	0.0411	1	2.2	0.0355	0.0355	1	0.0411	1	0.0018	0.0355	1
	30			0.9858	30			0.9893	30		30		0.9893	30

Rentang keyakinan nilai rata-rata

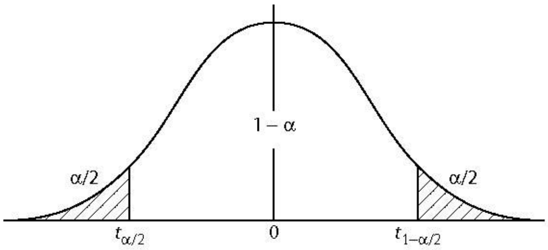
Rentang keyakinan (*confidence interval*) curah hujan harian maximum tahunan rata-rata adalah rentang curah hujan dengan batas bawah L dan batas atas U sedemikian hingga dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha)$, atau dengan probabilitas $(1 - \alpha)$, nilai curah hujan harian maximum tahunan rata-rata, μ_H, berada di dalam rentang tersebut:

$$\text{prob}(L < \mu_H < U) = (1 - \alpha)$$

Mengingat curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta berdistribusi normal, maka suatu variabel random V yang didefinisikan sebagai $V = (\overline{H} - \mu_H)/s_{\overline{H}}$ berdistribusi t. Dengan demikian, rentang keyakinan curah hujan harian maximum tahunan rata-rata dapat dicari dari:

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\overline{H} - \mu_H}{s_{\overline{H}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

Jika nilai v_1 dan v_2 ditetapkan sedemikian sehingga prob($T < v_1$) = prob($T > v_2$), dan dengan demikian prob($T < v_1$) = prob($T > v_2$) = $\alpha/2$ (lihat sketsa di bawah), maka batas bawah dan batas atas rentang keyakinan curah hujan harian maximum tahunan rata-rata dapat diperoleh dari:



$$\text{prob}\left(t_{\alpha/2,n-1} < \frac{\overline{H} - \mu_H}{s_{\overline{H}}} < t_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(\overline{H} + t_{\alpha/2,n-1}\, s_{\overline{H}} < \mu_H < \overline{H} + t_{1-\alpha/2,n-1}\, s_{\overline{H}}\right) = 1 - \alpha$$

Dalam persamaan di atas, n adalah jumlah data ($n = \Sigma f$), $t_{\alpha/2}$ dan $t_{1-\alpha/2}$ masing-masing adalah nilai T sedemikian hingga prob($T < t_{\alpha/2}$) = $\alpha/2$ dan prob($T < t_{1-\alpha/2}$) = $1 - \alpha/2$ untuk $\nu = n - 1$ *degrees of freedom*, serta $s_{\overline{H}} = s_H/\sqrt{n}$. Nilai batas bawah dan atas rentang keyakinan curah hujan harian maximum tahunan rata-rata dengan demikian adalah:

$$\ell = \overline{H} + t_{\alpha/2}\left(s_H/\sqrt{n}\right) \text{ dan } u = \overline{H} + t_{1-\alpha/2}\left(s_H/\sqrt{n}\right).$$

Dengan nilai *degrees of freedom* ν = 29 dan tingkat keyakinan $1 - \alpha$ = 0.90 ($\alpha/2$ = 0.05 dan $1 - \alpha/2$ = 0.95), maka dengan memakai tabel distribusi t, diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

prob($T < t_{0.95}$) = 0.95 → $t_{0.95}$ = 1.6991 dan

prob($T < t_{0.05}$) = 0.05 → $t_{0.05} = -t_{0.95} = -1.6991$.

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang keyakinan curah hujan harian maximum tahunan rata-rata adalah:

$$\ell = 91 - 1.6991\left(20/\sqrt{30}\right) \approx 85\text{mm dan } u = 91 + 1.6991\left(20/\sqrt{30}\right) \approx 97\text{mm}$$

atau $\text{prob}(85\text{mm} \le \mu_H \le 97\text{mm}) = 90\%$.

Uji hipotesis nilai rata-rata curah hujan harian maximum tahunan

Uji hipotesis bahwa nilai rata-rata curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta adalah 90 mm dengan tingkat keyakinan 90% pastilah diterima mengingat rentang keyakinan nilai rata-rata ini dengan tingkat keyakinan 90% adalah 85 s.d. 97 mm. Tentu saja uji hipotesis dapat juga dilakukan dengan prosedur lengkap seperti dipaparkan pada paragraf-paragraf di bawah ini.

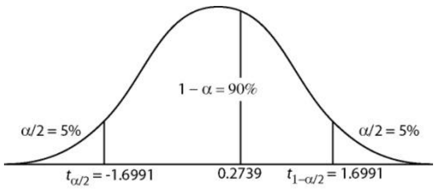
Null hipothesis dan hipotesis alternatif untuk keperluan uji hipotesis nilai rata-rata curah hujan harian maximum tahunan selama periode 1978 s.d. 2007 di Stasiun Godean Yogyakarta disusun sebagai berikut:

H_0: $\mu_H = 90$ mm
H_a: $\mu_H \neq 90$ mm

Karena nilai varian populasi tidak diketahui, maka statistik uji pada pengujian tersebut adalah:

$T = \frac{\sqrt{n}}{s_H}\left(\overline{H} - \mu_H\right) = \frac{\sqrt{30}}{20}\left(91 - 90\right) = 0.2739$ yang berdistribusi t.

Nilai statistik uji tersebut dibandingkan dengan nilai-nilai kritis. Dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.90$, maka:



$t_{1-\alpha/2,n-1} = t_{0.95,29} = 1.6991 > |0.2739| \Rightarrow$ dengan demikian hipotesis bahwa nilai rata-rata curah hujan harian maximum tahunan adalah 90 mm dapat diterima.

Berbagai peluang curah hujan harian maximum tahunan

Probabilitas berbagai besaran curah hujan dihitung dengan bantuan tabel distribusi normal standar atau dengan memakai fungsi yang ada di MSExcel. Apabila memakai tabel distribusi normal standar, maka nilai-nilai curah hujan yang akan dicari probabilitas kejadiannya harus dinormalkan terlebih dulu:

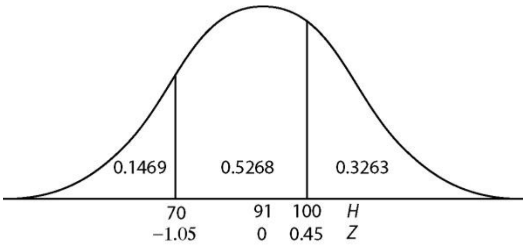
$$z_H = \frac{H - \overline{H}}{s_H}$$

Probabilitas dapat dihitung dengan memakai fungsi NORMDIST yang ada di dalam MSExcel.

prob(H < 70 mm) = NORMDIST(70,91,20,TRUE) = 0.1469

prob(H > 100 mm) = 1 – prob(H < 100 mm)
= 1 – NORMDIST(100,91,20,TRUE)
= 1 – 0.6737
= 0.3263

prob(70 < H (mm) < 100) = prob(H < 100 mm) – prob(H < 70 mm)
= 0.6737 – 0.1469
= 0.5268



Sketsa di samping ini memberikan ilustrasi berbagai nilai probabilitas tersebut.

Soal B

Suatu tanggul yang dirancang berdasarkan debit banjir kala ulang 10 tahun (Q_{10} = 90 m^3/s) baru saja selesai dibangun. Hitunglah:

1. Risiko debit Q_{10} tersebut dilampaui dalam satu tahun ke depan.
2. Risiko terjadi banjir dua kali dengan debit lebih dari Q_{10} dalam waktu 5 tahun ke depan.
3. Peluang bahwa banjir dengan debit lebih dari Q_{10} tidak pernah terjadi dalam waktu 10 tahun ke depan.
4. Risiko terjadi 5 kali banjir dengan debit melampaui 90 m^3/s dalam 20 tahun ke depan.

Penyelesaian

Soal ini diselesaikan dengan asumsi bahwa probabilitas debit Q_{10} dilampaui dalam satu tahun konstan dan tidak berubah sehingga proses binomial berlaku. Dengan asumsi ini, maka:

probabilitas debit Q_{10} dilampaui = prob($Q > Q_{10}$) = p = 1/10 = 0.10

probabilitas debit Q_{10} tak dilampaui = prob($Q < Q_{10}$) = $q = 1 - p$ = 0.90

Risiko debit Q_{10} dilampaui dalam satu tahun ke depan = p = 0.10, atau dapat pula dihitung dengan persamaan distribusi binomial:

$$f_Q(1;1,0.1) = \binom{1}{1} \times 0.1^1 \times 0.9^0 = 0.1$$

Risiko terjadi banjir dua kali dengan debit lebih dari Q_{10} dalam waktu 5 tahun ke depan:

$$f_Q(2;5,0.1) = \binom{5}{2} \times 0.1^2 \times 0.9^3 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} \times 0.1^2 \times 0.9^3 = 0.0729$$

Peluang bahwa banjir dengan debit lebih dari Q_{10} tidak pernah terjadi dalam waktu 10 tahun ke depan:

$$f_Q(0;10,0.1) = \binom{10}{0} \times 0.1^0 \times 0.9^{10} = 1 \times 1 \times 0.9^{10} = 0.3487$$

Risiko terjadi 5 kali banjir dengan debit melampaui 90 m^3/s dalam 20 tahun ke depan:

$$f_Q(5;20,0.1) = \binom{20}{5} \times 0.1^5 \times 0.9^{15} = \frac{20!}{(20-5)!\,5!} \times 0.1^5 \times 0.9^{15} = 0.0319$$

Soal C

Elevasi muka air di suatu reservoir dinyatakan dengan variabel H m yang memiliki fungsi probabilitas (*probability density function*, pdf) menurut persamaan berikut:

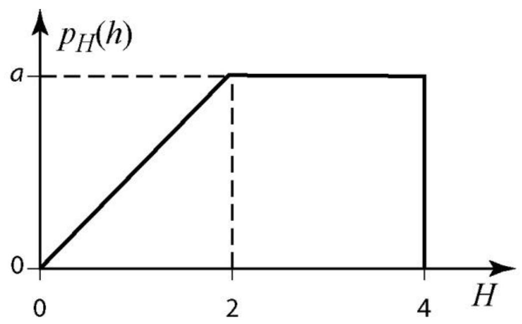
$p_H(h)$ = ½ ah jika $0 \le h \le 2$
= a jika $2 \le h \le 4$
= 0 untuk nilai h yang lain

1. Gambar pdf elevasi muka air di reservoir tersebut.
2. Hitung konstanta a.
3. Carilah fungsi distribusi kumulatif H.
4. Hitunglah probabilitas muka air melampaui elevasi 2 m.
5. Hitunglah elevasi muka air rata-rata di reservoir.

Penyelesaian

Gambar/sketsa pdf elevasi muka air di reservoir

Sketsa pdf elevasi muka air disajikan pada gambar di bawah ini.



Gambar 2. Sketsa pdf elevasi muka air di reservoir

Nilai konstanta a

Nilai konstanta a dapat diperoleh dengan memperhatikan bahwa luas kawasan di bawah kurva cdf antara −∞ s.d. +∞ sama dengan satu.

$$\int_{-\infty}^{0} p_H(h)\mathrm{d}h + \int_{0}^{2} p_H(h)\mathrm{d}h + \int_{2}^{4} p_H(h)\mathrm{d}h + \int_{4}^{+\infty} p_H(h)\mathrm{d}h = 1$$

Dari persamaan tersebut dan dengan memperhatikan sketsa pdf, maka:

$0 + (\frac{1}{2} \times 2 \times a) + (2 \times a) + 0 = 1$
$3a = 1$
$a = \frac{1}{3}$

Fungsi distribusi kumulatif, cdf

Dengan memperhatikan persamaan dan sketsa pdf, maka cdf harus ditetapkan pada empat rentang, yaitu $h < 0$, $0 < h < 2$, $2 < h < 4$, dan $h > 4$.

Untuk $h < 0$ m

$P_H(h) = \text{prob}(H < h) = 0$ untuk $h < 0$ m.

Untuk 0 m < h < 2 m

$$P_H(h) = \int \frac{h}{6}\,\mathrm{d}h = \frac{h^2}{12} + C$$

Syarat batas: di h = 0, $P_H(h)$ = 0 sehingga C = 0.

Dengan demikian:

$P_H(h) = \frac{1}{12}h^2$ untuk 0 m < h < 2 m.

Untuk 2 m < h < 4 m

$$P_H(h) = \int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}h = \frac{h}{3} + C$$

Syarat batas: di h = 4, $P_H(h)$ = 1 sehingga

$$1 = \frac{4}{3} + C \;\Rightarrow\; C = -\frac{1}{3}$$

Dengan demikian:

$P_H(h) = \frac{1}{3}(h-1)$ untuk 2 m < h < 4 m.

Untuk h > 4 m

$P_H(h)$ = prob(H < h) = 1 untuk h > 4 m.

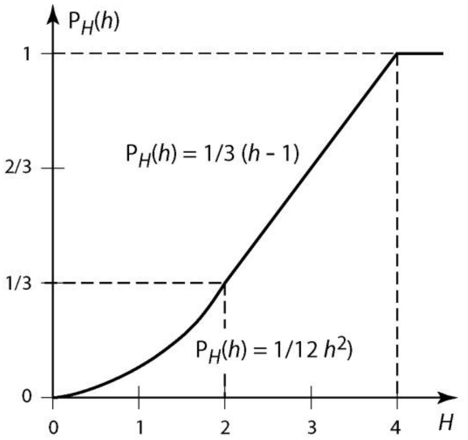
Jadi cdf elevasi muka air di reservoir tersebut adalah:

$$\begin{aligned} P_H(h) &= 0 && h < 0\,\text{m} \\ &= \tfrac{1}{12}h^2 && 0\,\text{m} < h < 2\,\text{m} \\ &= \tfrac{1}{3}(h-1) && 2\,\text{m} < h < 4\,\text{m} \\ &= 1 && h > 4\,\text{m} \end{aligned}$$

Tabel 3 merangkum pdf dan cdf elevasi muka air di reservoir, sedang Gambar 3 menyajikan ilustrasi grafis cdf elevasi muka air di reservoir.

Tabel 3. Probability density function dan cumulative distribution function elevasi muka air di reservoir

Elevasi muka air, h	pdf, $p_H(h)$	cdf, $P_H(h)$
h < 0 m	$p_H(h) = 0$	$P_H(h) = 0$
0 m < h < 2 m	$p_H(h) = h/6$	$P_H(h) = h^2/12$
2 m < h < 4 m	$p_H(h) = 1/3$	$P_H(h) = \frac{1}{3}(h-1)$
h > 4 m	$p_H(h) = 0$	$P_H(h) = 1$



Gambar 3. Sketsa cdf elevasi muka air di reservoir

Elevasi muka air rata-rata

Elevasi muka air rata-rata di reservoir diperoleh dengan persamaan momen pertama sebagai berikut:

$$\overline{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} h\, p_H(h) \mathrm{d}h = \int_0^2 \frac{h^2}{6} \mathrm{d}h + \int_2^4 \frac{h}{3} \mathrm{d}h$$

$$= \frac{1}{18} h^3 \Big|_0^2 + \frac{1}{6} h^2 \Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{18}\left(2^3 - 0^3\right) + \frac{1}{6}\left(4^2 - 2^2\right)$$

$$= \frac{8 - 0 + 48 - 12}{18} = \frac{44}{18} = 2\frac{2}{3}$$

Jadi elevasi muka air rata-rata di reservoir adalah 2.67 m.