Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

MODEL HIDRODINAMIKA

CFD di Bidang Hidraulika Saluran Terbuka
Istiarto – JTSL FT UGM

Pendahuluan

Model matematik hidraulika (model hidrodinamika) pada tiga dasawarsa terakhir ini telah memainkan peran penting dalam berbagai disiplin ilmu mekanika fluida, baik dalam penelitian, enjinering, maupun industri. Tidak ketinggalan, dalam bidang hidraulika, model matematik hidraulik (untuk selanjutnya disebut model matematik) pun semakin menampakkan eksistensinya yang ditunjukkan dengan semakin seringnya model matematik dipakai dalam pekerjaan enjiniring, dalam tahap studi maupun perancangan. Tingkat penerimaan dan keyakinan orang terhadap model matematik sebagai alat utama dalam pekerjaan enjiniring cukup tinggi. Hal ini dibarengi dengan tingkat penerimaan dan keyakinan yang sama yang ditujukan terhadap produk pekerjaan enjiniring dimana model matematik merupakan alat utama. Tidak jarang, bahkan, model matematik justru disyaratkan pemakaiaannya.

Ketersediaan paket program komersial model matematik saat ini cukup terjamin, baik model satu dimensi (1D) maupun dua dimensi (2D). Bahkan, model tiga dimensi (3D) pun sudah mulai banyak dijumpai, walaupun sebagian besar tidak secara spesifik dibuat untuk pemakaian di bidang hidraulika, namun lebih ditujukan untuk pemakaian di bidang dinamika fluida (lebih dikenal dengan CFD, *computational fluid dynamics*). Berbagai paket program komersial tersebut pun dikemas sedemikian rupa sehingga mudah dipakai (*user friendly*) dan hasilnya mudah dibaca (walaupun belum tentu mudah dicerna) karena umumnya dikemas dengan tampilan grafik aneka warna.

Di sisi pendidikan, model matematik juga semakin banyak diminati. Sebagian besar topik penelitian yang dilakukan oleh dosen dan topik tugas akhir mahasiswa (sarjana, pasca sarjana, doktoral) berkaitan dengan model matematik.

Faktor pendorong berkembangnya model matematik adalah perkembangan sangat cepat analisis numerik, teknologi komputer, dan teknik visualisasi. Dari ketiga faktor tersebut, teknologi komputerlah yang memiliki kontribusi terbesar dalam mendorong perkembangan model matematik. Walau demikian, perlu diakui bahwa perkembangan model matematik di bidang hidraulik langsung ataupun tidak langsung mengikuti kemajuan di bidang CFD. Teori dan teknik yang dipakai dalam model matematik hidraulik banyak yang merupakan hasil penelitian dan pengembangan di bidang CFD. Hal ini terasa sekali terutama pada model 3D. [***Catatan***: sebenarnya, bidang CFD pun menerima banyak input dari hasil penelitian dan pengembangan model matematik di bidang aerodynamics.]

Model matematik (hidraulik) adalah simulasi numerik suatu aliran air yang didasarkan pada formulasi persamaan-persamaan matematik yang menggambarkan prinsip hidraulika, atau yang menggambarkan fenomena fisik aliran, dan penyelesaian persamaan-persamaan tersebut secara numeris (umumnya dilakukan dengan dan didalam komputer). Akan tetapi harus diingat bahwa pembuatan dan pemakaian model matematik yang baik harus didukung pula dengan pengetahuan yang kuat tentang proses

fisik aliran air. Simulasi aliran tidak berhenti hanya pada deretan angka numerik hasil penyelesaian persamaan matematik dan tidak pula berhenti hanya pada tampilan grafis aneka warna dari hasil hitungan numerik. Suatu model matematik yang baik harus dibuat dengan berlandaskan pada formulasi matematik yang secara benar menggambarkan proses fisik yang terjadi, berlandaskan pada metode penyelesaian yang tepat terhadap formulasi tersebut dan sesuai dengan proses fisik yang dimodelkan, dan hasil model tersebut tidak menimbulkan ambiguitas interpretasi.

Tulisan ini, secara sengaja, tidak langsung membahas peran model matematik, namun lebih banyak menguraikan formula/persamaan matematik yang menjadi dasar pemodelan yang disertai dengan penjelasan mengenai aspek fisik setiap suku dalam persamaan-persamaan tersebut. Dengan sengaja pula, persamaan-persamaan matematik yang ditampilkan, selain persamaan-persamaan untuk model matematik dua dimensi (2D), juga untuk model matematik tiga dimensi (3D). Dari sisi aspek fisik, persamaan 3D sering kali lebih mudah difahami daripada persamaan 2D.

Pembahasan akan diawali dengan persamaan untuk model hidraulik 3D dan diteruskan dengan persamaan untuk dua dimensi horizontal (2DH). Dengan paparan model 3D, yang merupakan model paling dekat dengan aliran nyata (prototipe), penulis berharap para peserta kursus mendapat pemahaman yang lengkap terlebih dulu terhadap esensi dan arti fisik persamaan-persamaan yang mendasari model matematik. Dengan bekal tersebut, persamaan 2DH, yang merupakan integrasi persamaan 3D terhadap kedalaman (sehingga model 2DH dikenal juga dengan 2D *depth-averaged model*), akan lebih mudah difahami.

Governing Equations

Semua model matematik didasarkan pada tiga persamaan dasar dinamika fluida: persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Ketiga persamaan tersebut menggambarkan fenomena fisik; ketiganya merupakan ekspresi matematik dari tiga prinsip fundamental fisika, yaitu:

1) kekekalan massa,
2) hukum Newton II: gaya = massa × percepatan, dan
3) kekekalan energi.

Namun demikian, tidak selamanya ada kebutuhan untuk menyelesaikan ketiga persamaan dasar tersebut. Pada sebagian besar permasalahan aliran air, sebagai contoh, tidak diperlukan penyelesaian persamaan kekekalan energi; interaksi antara energi kinetik aliran dan panas (*heat transfer*) tidak menjadi fokus perhatian. Perilaku aliran, yang berkaitan terutama dengan perubahan kecepatan dan kedalaman aliran, merupakan variabel yang ingin diketahui. Dalam hal ini, hanya persamaan-persamaan yang didasarkan pada kedua prinsip pertama yang dipakai: persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

Pada bagian selanjutnya dari makalah ini, akan dipaparkan secara rinci dan mendalam persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Persamaan-persamaan tersebut akan dibahas suku-per-suku disertai dengan arti fisiknya. Para peserta kuliah topik spesial mungkin akan berpendapat bahwa uraian yang disampaikan terlalu teoretis, sangat "matematis", dan sulit dicerna. Namun demikian, penulis berpendapat bahwa pemahaman yang kuat terhadap persamaan-persamaan tersebut beserta arti fisik setiap persamaan merupakan modal dasar dan esensial untuk dapat memahami dan

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

menginterpretasikan hasil model matematik. Tanpa hal itu, hasil model matematik hanya akan berupa deretan angka dan grafik tanpa arti fisik di baliknya. Di samping itu, pemahaman persamaan dasar dan arti fisik akan membantu mengetahui dan mengapresiasi peran model matematik: kemampuan dan keterbatasan model matematik, apa yang dapat dan tidak dapat dilakukan dengan model matematik, kapan dan untuk kasus apa saja model matematik dapat dan sebaiknya dipakai, serta sebaliknya, kapan dan untuk kasus apa saja model matematik sebaiknya tidak dipakai.

Persamaan Kontinuitas dan Persamaan Momentum (Navier-Stokes Equations, Reynolds Equations)

Air merupakan fluida tak mampat, artinya rapat massanya (*density*, ρ), konstan. [***Catatan***: sebenarnya yang lebih tepat adalah rapat massa air tidak berubah terhadap perubahan tekanan, namun masih dapat berubah terhadap perubahan temperatur.] Persamaan kontinuitas dan momentum untuk aliran air jika ditulis dalam koordinat Cartesius adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+g_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial ww}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+g_z \tag{4}$$

dalam persamaan di atas t adalah waktu, x, y, dan z adalah sumbu koordinat arah longitudinal, transversal, dan vertikal, u, v, dan w adalah kecepatan sesaat aliran arah x, y, dan z, p adalah tekanan, τ_{ij} ($i,j = x,y,z$) adalah tegangan geser (merupakan fungsi kecepatan dan kekentalan air) arah j yang bekerja pada bidang tegak lurus sumbu i, dan g_x, g_y, dan g_z adalah percepatan gravitasi arah x, y, dan z.

Persamaan-persamaan di atas, persamaan kontinuitas (Pers. 1) dan persamaan momentum (Pers. 2, 3, 4), dikenal sebagai Persamaan Navier-Stokes. Sebenarnya, secara historis yang disebut dengan **persamaan Navier-Stokes** adalah persamaan momentum saja. Namun, dalam literatur CFD modern, terminologi persamaan Navier-Stokes diperluas cakupannya, tidak hanya mencakup persamaan momentum, tetapi juga persamaan kontinuitas dan persamaan energi.

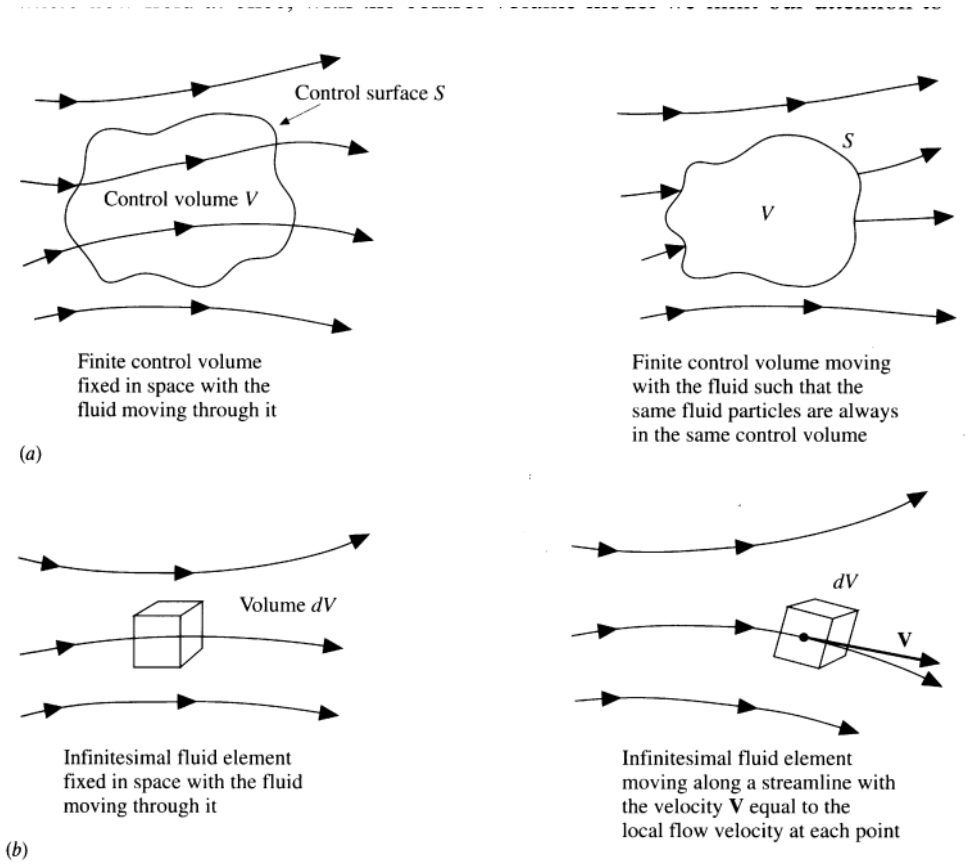
Bentuk persamaan Navier-Stokes seperti disajikan pada Pers. 1 s.d. 4 di atas hanya merupakan salah satu dari empat bentuk yang biasa dijumpai; keempat bentuk tersebut adalah:

1) persamaan diferensial konservatif,
2) persamaan diferensial non-konservatif,
3) persamaan integral konservatif, dan
4) persamaan integral non-konservatif.

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Pers. 1 s.d. 4 merupakan bentuk persamaan diferensial konservatif. Perbedaan bentuk persamaan berasal dari cara persamaan-persamaan tersebut diturunkan dari penerapan prinsip fundamental fisika: dengan memakai konsep volume kontrol (*control volume*) yang akan menghasilkan bentuk persamaan integral, atau konsep elemen kecil tak berhingga (*infinitesimal fluid element*) yang akan menghasilkan bentuk persamaan diferensial. Bentuk persamaan konservatif didapat apabila volume kontrol atau elemen infinit tetap (tidak berpindah tempat), sedang bentuk persamaan non-konservatif diperoleh apabila volume kontrol atau elemen infinit tersebut bergerak mengikuti aliran searah garis alir (*streamline*). Ilustrasi yang diberikan pada Gambar 1 menunjukkan keempat jenis pendekatan tersebut. Keempat bentuk persamaan tersebut dapat diubah dari suatu bentuk ke bentuk lainnya; pada dasarnya keempatnya merupakan satu jenis persamaan. Uraian dan penjelasan rinci mengenai keempat bentuk persamaan ini diberikan dengan sangat rinci dan jelas dalam buku "*Computational Fluid Dynamic, The Basics with Applications*" (Anderson, 1995).



Gambar 1. Model aliran: (a) volume kontrol (*control volume)*, (b) elemen kecil tak-berhingga (*infinitesimal fluid element*).

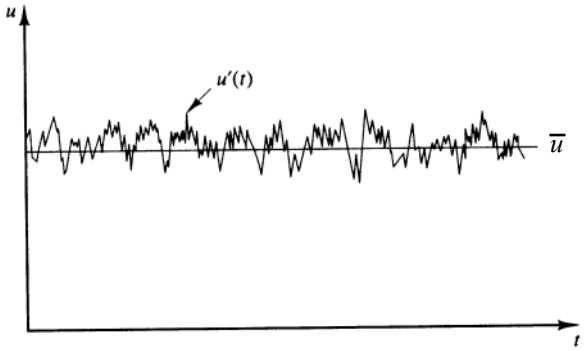
Di atas disebutkan bahwa variabel kecepatan u, v, w adalah kecepatan sesaat (*instantaneous velocity*). Hal ini berarti bahwa persamaan Navier-Stokes tersebut menyatakan nilai kecepatan (dan nilai variabel hidraulik lainnya) pada saat tinjauan. Padahal, kita ketahui bahwa kecepatan aliran, utamanya pada aliran turbulen yang merupakan sebagian besar kasus yang terjadi pada aliran di saluran terbuka (*open channel flows*), berfluktuasi terhadap waktu. Menyelesaikan persamaan Navier-Stokes untuk memperoleh nilai kecepatan sesaat memerlukan usaha yang sangat mahal ditinjau

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

dari sisi biaya hitungan. Sebaliknya, dalam banyak hal, yang dibutuhkan adalah cukup nilai rata-rata untuk waktu tertentu. Oleh karena itu, diperlukan persamaan kontinuitas dan momentum yang berlaku untuk nilai rata-rata (terhadap waktu: *time-averaged values*). Hubungan antara nilai sesaat dan nilai rata-rata, misalnya untuk kecepatan longitudinal, dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$u = \overline{u} + u' \tag{5}$$

yang memisahkan kecepatan sesaat kedalam komponen rata-rata (ditulis dengan tanda garis atas) dan fluktuasi kecepatan (dinyatakan dengan simbol aksen). Cara pemisahan seperti ini dikenal dengan cara Reynolds. Ilustrasi yang ditunjukkan pada Gambar 2 menunjukkan sketsa grafis hubungan antara kecepatan sesaat, kecepatan rata-rata, dan fluktuasi kecepatan.



Gambar 2. Pemisahan kecepatan sesaat kedalam komponen kecepatan rata-rata dan fluktuasi kecepatan.

Dengan memakai definisi di atas untuk mengganti setiap nilai sesaat pada persamaan Navier-Stokes, dan dengan melalui beberapa manipulasi matematik, akan diperoleh persamaan kontinuitas dan persamaan momentum untuk nilai rata-rata seperti berikut ini:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{zx}}{\partial z} + g_x \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}\,\overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{zy}}{\partial z} + g_y \tag{8}$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{w}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}\,\overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{zz}}{\partial z} + g_z \tag{9}$$

yang dikenal sebagai **persamaan Reynolds**, berlaku untuk aliran turbulen. Tampak bahwa bentuk persamaan-persamaan tersebut di atas adalah sama dengan persamaan Navier-Stokes (Pers. 1 s.d. 4). Untuk menyederhanakan penulisan, tanda garis atas (*overbar*) pada variabel yang menunjukkan nilai rata-rata (terhadap waktu), untuk selanjutnya, tidak dicantumkan, kecuali apabila diperlukan untuk menghindari kerancuan.

Di dalam persamaan momentum, Pers. 7 s.d. 9, tegangan geser mencakup faktor kekentalan air dan faktor fluktuasi kecepatan, dan dinyatakan dalam persamaan berikut ini:

$$\tau_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{u_i' u_j'} \tag{10}$$

misalnya untuk tegangan geser (dan tegangan normal) arah longitudinal:

$$\tau_{xx} = \rho\nu 2\frac{\partial u}{\partial x} - \rho\overline{u'u'}$$

$$\tau_{yx} = \rho\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \rho\overline{u'v'}$$

$$\tau_{zx} = \rho\nu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \rho\overline{u'w'}$$

Suku pertama di sebelah kanan menunjukkan tegangan yang diakibatkan oleh kekentalan (viskositas) air, ν, sedang suku terakhir menunjukkan pengaruh fluktuasi kecepatan dan dikenal sebagai **tegangan Reynolds**. Pada aliran turbulen, tegangan yang diakibatkan oleh pengaruh fluktuasi kecepatan (turbulensi) jauh lebih besar daripada tegangan akibat kekentalan air. Yang terakhir ini umumnya diabaikan, sehingga untuk τ_{zx}, misalnya, praktis: $\tau_{zx} = -\rho\overline{u'w'}$. Tegangan Reynolds sering dinyatakan sebagai fungsi kecepatan, mengikuti pendekatan Boussinesq sebagai berikut:

$$-\rho\overline{u_i' u_j'} = \rho\nu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k \tag{11}$$

Variabel δ_{ij} disebut *Kronecker delta*: bernilai 1 jika $i = j$ dan bernilai 0 jika $i \neq j$; variabel k adalah energi kinetik aliran turbulen (*turbulent kinetic energy*), $k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right)$; variabel ν_t adalah viskositas turbulen (*turbulent eddy viscosity*). Perhatikan bahwa viskositas turbulen ini tidak sama dengan kekentalan (viskositas) air, ν. Viskositas air merupakan karakteristik air, sedang viskositas turbulen bergantung pada kecepatan aliran. Karena viskositas turbulen merupakan fungsi kecepatan aliran, yang merupakan variabel yang harus dihitung (*unknown*) dalam persamaan Reynolds, maka viskositas turbulen merupakan variabel yang juga harus dihitung. Umumnya, viskositas turbulen dihitung dengan suatu model; ini dikenal sebagai **model turbulen**. Beberapa jenis model turbulen yang biasa dipakai, antara lain *Reynolds stress model*, *algebraic model*, dan yang sangat populer adalah *k*-ε *model*.

Untuk mempelajari lebih dalam mengenai model turbulen ini, silakan membaca berbagai literatur CFD. Menurut hemat penulis, "*Turbulence Models and Their Application in Hydraulics*" (Rodi, 1993) dan "An *Introduction to Computational Fluid Dynamics*" (Versteeg and Malalasekera, 1997) merupakan awal yang baik.

Aspek Fisik Persamaan Kontinuitas dan Persamaan Momentum

Persamaan kontinuitas, Pers. 6:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

diperoleh dari prinsip kekekalan massa, yaitu keseimbangan massa suatu elemen air, yang menyatakan bahwa laju peningkatan (pengurangan) massa di dalam suatu elemen air sama dengan laju netto aliran massa ke dalam (keluar) elemen air tersebut. Pada aliran tak mampat, dimana rapat massa konstan, laju perubahan massa di dalam elemen adalah nol. Ketiga suku di sebelah kiri pada Pers. 6 adalah aliran massa netto keluar elemen melalui dinding elemen; disebut juga dengan suku konvektif. Pengertian terminologi "konvektif" ini akan diperjelas lagi pada uraian tentang aspek fisik persamaan momentum pada paragraf di bawah ini.

Persamaan momentum, Pers. 7 s.d. 9, diperoleh dari aplikasi Hukum Newton II yang menyatakan bahwa gaya (netto) yang bekerja pada elemen air yang bergerak sama dengan massa elemen dikalikan dengan percepatan gerak elemen tersebut, $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$. Gaya dan percepatan diberi notasi dengan simbol tebal, untuk menunjukkan bahwa kedua besaran tersebut adalah besaran vektor, sehingga dapat dinyatakan dengan tiga komponen besaran skalar arah x, y, dan z (perhatikan pula bahwa persamaan momentum ditulis dalam tiga komponen arah x, y, dan z).

Dalam arah x, hukum Newton II berbentuk: $F_x = m\,a_x$, yang menyatakan bahwa elemen air yang bergerak menderita gaya searah x. Gaya-gaya tersebut berasal dari dua sumber, yaitu:

1. Gaya volumetrik (*body forces*), yang bekerja pada massa volumetrik elemen. Contoh gaya berat adalah gaya gravitasi. Tidak ada kontak fisik langsung antara gaya-gaya *body forces* dengan elemen.

2. Gaya kontak (*surface forces*), yang bekerja pada permukaan elemen air. Gaya ini diakibatkan oleh dua sumber: (a) tekanan yang bekerja di seluruh permukaan elemen dan diakibatkan oleh air di sekitar elemen, dan (b) tegangan geser dan tegangan normal, diakibatkan oleh air di sekitar elemen, yang 'menarik' dan 'mendorong' permukaan elemen melalui friksi/gesekan (dengan kata lain, melalui viskositas). Berbeda dengan *body forces*, gaya-gaya *surface forces* bersumber dari adanya kontak antara elemen dengan elemen air di sekelilingnya.

Mengingat massa elemen air adalah:

$m = \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

Mengingat juga bahwa percepatan elemen air yang bergerak adalah laju perubahan kecepatan; dalam arah x:

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}$$

yang melalui beberapa manipulasi matematis (lihat Anderson, 1995, hlm. 64-65), persamaan di atas dapat dibawa ke dalam bentuk berikut:

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}$$

maka komponen x persamaan momentum, Pers. 7:

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} + g_x \qquad (7)$$

dapat dibaca menurut paragraf-paragraf di bawah ini.

1. Suku-suku di sebelah kiri adalah percepatan (total) pergerakan elemen, terdiri dari <u>percepatan lokal</u> (suku pertama), dan <u>percepatan konvektif</u> (tiga suku berikutnya). Ambil contoh sebuah elemen yang bergerak, katakanlah dari titik A ke titik B, di dalam suatu aliran tak-permanen (berubah terhadap waktu) dan tak-seragam (tak sama di suatu tempat dengan tempat lainnya). Kalau kita mengamati titik A, kita melihat adanya perubahan kecepatan, artinya terjadi percepatan, karena aliran tak-permanen. Kenyataan bahwa elemen melewati titik A (<u>titik tetap</u>), yang kecepatannya selalu berubah, maka kecepatan elemen tersebut pun berubah. Inilah yang disebut dengan percepatan lokal, $\partial u/\partial t$. Pada saat yang sama, kalau kita mengikuti elemen air yang bergerak, kita melihat terjadinya perubahan kecepatan selama elemen tersebut bergerak dari A ke B (karena aliran tak-seragam). Artinya, kecepatan elemen tersebut berubah karena dia <u>berpindah tempat</u>. Inilah yang disebut dengan percepatan konvektif, $\partial uu/\partial x + \partial uv/\partial y + \partial uw/\partial z$.

2. Untuk lebih memahami arti fisik percepatan lokal dan percepatan konvektif, kita ambil sebuah kasus sederhana. Anda datang dari luar dan akan masuk ke dalam ruang kuliah ber-AC ini. Suhu udara di dalam ruang lebih sejuk daripada di luar. Saat melewati pintu dan melangkah masuk kedalam ruang, Anda merasai penurunan suhu; hal ini analog dengan percepatan konvektif dalam persamaan momentum, Pers. 7. Andaikan pada saat yang sama, seseorang menyiram Anda dengan air dingin dan mengenai Anda tepat pada saat Anda melewati pintu. Akibat siraman air dingin tersebut, Anda akan merasai pertambahan penurunan suhu, tetapi hanya sesaat; hal ini analog dengan percepatan lokal dalam Pers. 7. Penurunan suhu netto yang Anda rasai saat memasuki ruang, dengan demikian, adalah kombinasi dari pergerakan Anda memasuki ruang yang lebih sejuk dan tersiram air dingin pada saat yang sama. Penurunan suhu netto ini analog dengan percepatan total seperti dinyatakan dalam suku di sebelah kiri dari persamaan momentum, Pers. 7.

3. Suku-suku di sebelah kanan adalah gaya per satuan massa yang diderita oleh elemen. Suku pertama adalah tekanan, tiga suku berikutnya adalah tegangan normal dan geser, dan suku terakhir adalah gravitasi. Apabila sumbu koordinat dipilih sedemikian hingga sumbu z vertikal, maka komponen gaya gravitasi hanya searah sumbu z, g_z, sedang komponen lainnya sama dengan nol, $g_x = g_y = 0$; gaya gravitasi hanya muncul dalam komponen z persamaan momentum.

Tegangan normal dan geser, untuk fluida Newtonian (air adalah fluida Newtonian), berbanding lurus dengan gradien kecepatan menurut persamaan berikut:

$$\tau_{xx} = \rho\nu 2\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yx} = \rho\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

$$\tau_{zx} = \rho\nu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

dalam persamaan di atas ν adalah viskositas kinematik air. Hubungan di atas berlaku untuk aliran laminar. Sedang untuk aliran air turbulen (sebagian besar, bahkan boleh dikata hampir seluruh, aliran air di saluran terbuka merupakan aliran turbulen), pengaruh viskositas (kekentalan) air sangat kecil, tetapi sebaliknya, faktor turbulensi aliran sangat besar. Untuk aliran turbulen, pengaruh viskositas air diabaikan, seperti ditunjukkan pada Pers. 11; untuk arah *x*:

$$\tau_{xx} = \rho\nu_t 2\frac{\partial u}{\partial x} - \rho\frac{2}{3}k$$

$$\tau_{yx} = \rho\nu_t\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zx} = \rho\nu_t\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Seperti telah dipaparkan sebelumnya, ν_t adalah viskositas turbulen yang merupakan fungsi aliran dan dihitung dengan model turbulen, misalnya dengan model *k*-ε. Model *k*-ε merupakan model turbulen yang populer dan banyak dipakai dalam paket program model matematik komersial.

Apabila definisi tegangan geser di atas diterapkan pada persamaan momentum, Pers. 7, maka didapat:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}k + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial x}\right) + g_x \quad (12)$$

setelah dilakukan pemisahan suku-suku dalam definisi tegangan geser, yaitu dengan membawa suku-suku utama ke sisi kiri, sedang suku-suku derivatif silang (*cross derivative terms*) di sisi kanan. Pada banyak kasus, suku-suku derivatif silang sering kali bernilai sangat kecil dibandingkan dengan suku-suku derivatif utama. Jika ini ditemui, maka suku-suku derivatif silang dapat diabaikan; apalagi hitungan derivatif silang seringkali menimbulkan komplikasi tambahan. Dengan pengabaian ini, Pers. 12 menjadi:

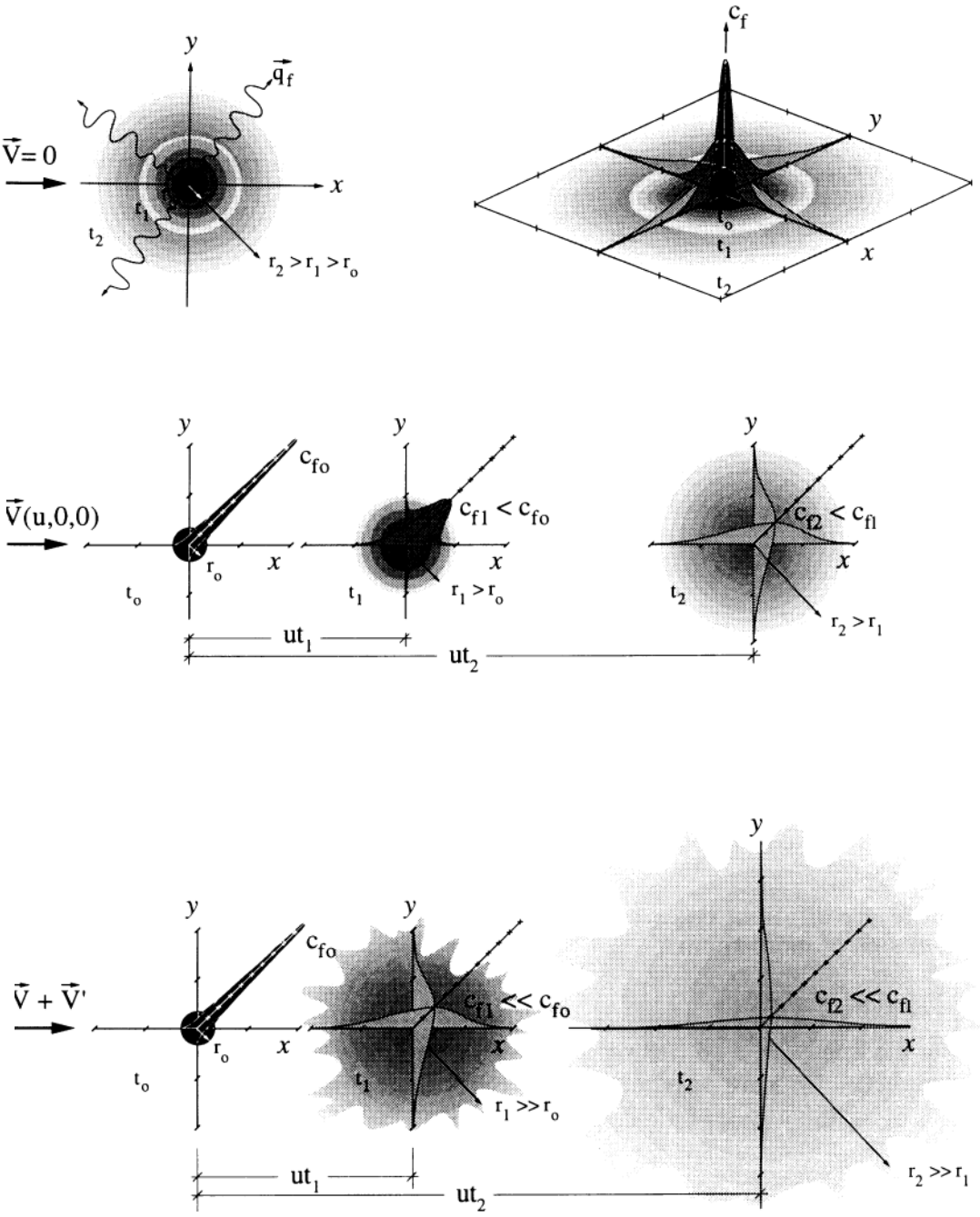
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}k + g_x \quad (13)$$

Persamaan 13 di atas dapat dibaca sebagai **persamaan transpor konvektif-difusif**. Empat suku pertama di sisi kiri adalah suku-suku konveksi dan tiga suku berikutnya adalah suku-suku difusi. Suku-suku di sisi kanan dapat dibaca sebagai *source*. Untuk memudahkan pemahaman arti fisik persamaan konveksi-difusi, Gambar 3 memberikan ilustrasi transpor konveksi-difusi (tanpa source) satu dimensi suatu besaran skalar C (misalnya konsentrasi). Pada saat t_1 besaran C berada di x_1 dengan puncak C_1. Akibat

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

konveksi, saat t_2 besaran C berpindah ke x_2 dengan puncak C_2. Tampak bahwa bentuk distribusi besaran C tidak berubah dan $C_1 = C_2$. Akibat difusi, terjadi peredaan (peredaman) nilai puncak, $C_3 < C_2$, dan akibatnya terjadi pelebaran distribusi. Dengan bahasa lain, dapat dikatakan bahwa konveksi berkaitan dengan kegiatan memindahkan, jadi berkaitan dengan kecepatan, sedang difusi berkaitan dengan kegiatan peredaman, jadi berkaitan dengan gradien.

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id



Gambar 3. Pengaruh transpor konveksi dan difusi.

Resume

Setelah melewati jalan panjang untuk memahami persamaan-persamaan matematik yang mendasari model matematik hidraulik, ada baiknya kalau ditulis ulang di bawah ini *the governing equations* aliran air turbulen, tiga dimensi, *unsteady* (persamaan Reynolds):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2}{3}k+g_x \tag{13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{2}{3}k+g_y \tag{14}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial ww}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{2}{3}k+g_z \tag{15}$$

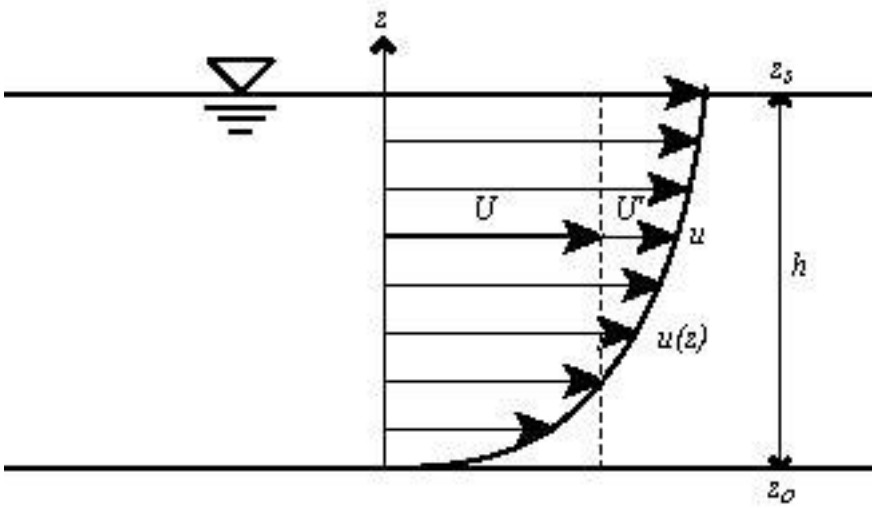
Model Matematik Dua-dimensi Horizontal (2DH, *Depth-averaged Mathematical Models*)

Pemakaian model 3D di bidang hidraulika, dalam banyak kasus, sering masih terlalu mahal. Walaupun kebutuhan ruang memori komputer yang sangat besar untuk menangani jumlah titik hitungan sudah bukan merupakan masalah besar pada saat ini dengan murahnya *memory chips*, namun waktu hitungan masih merupakan permasalahan yang belum teratasi. Masalah lain yang timbul dalam pemakaian model 3D adalah konfigurasi fisik domain yang harus dimodelkan. Pada umumnya, dimensi vertikal (kedalaman aliran) jauh lebih kecil daripada dimensi horizontal; tak terhindarkan, bentuk grid menjadi tipis yang berakibat pada kesulitan hitungan numerik. Permasalah tersebut menjadikan model 3D belum menjadi pilihan utama dalam pekerjaan pemodelan hidraulik; model 2D menawarkan solusi sebagai alternatif model 3D. Model 2D dapat berupa model 2DV (dua dimensi vertikal) atau 2DH (dua dimensi horizontal). Dalam permasalahan hidraulika, 2DH lebih sering dipakai. Ini sesuai dengan permasalahan konfigurasi fisik seperti disebutkan di atas, yaitu kedalaman aliran jauh lebih kecil daripada dimensi horizontal.

Persamaan-persamaan matematik yang mendasari model 2DH disusun berdasarkan integrasi persamaan-persamaan kontinuitas dan momentum searah kedalaman. Semua nilai variabel hidraulik diintegralkan searah kedalaman aliran; nilai hasil integrasi mewakili nilai rata-rata sepanjang kedalaman. Sebagai contoh, kecepatan longitudinal (arah x), u, ketika diintegralkan sepanjang kedalaman aliran, h, akan menghasilkan kecepatan rata-rata (*depth-averaged velocity*), U, sesuai dengan persamaan berikut (lihat juga ilustrasi di Gambar 4):

$$U=\frac{1}{h}\int_{z_o}^{z_s}u\,dz \tag{16}$$

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id



Gambar 4. Integrasi kecepatan aliran untuk menghitung kecepatan rata-rata kedalaman.

Di dalam definisi kecepatan rata-rata di atas terkandung suatu fenomenon fisik penting apabila kita perhatikan perbedaan kecepatan di suatu titik kedalaman tertentu dengan kecepatan rata-rata seluruh kedalaman. Mengambil analogi dengan cara pemisahan kecepatan sesaat menjadi kecepatan rata-rata terhadap waktu dan fluktuasi kecepatan (lihat Pers. 5 dan Gb. 2), maka kecepatan di suatu titik kedalaman pun dapat dinyatakan sebagai kecepatan rata-rata kedalaman, U, dan deviasi kecepatan, U', menurut persamaan berikut:

$$u = U + U' \tag{17}$$

Deviasi kecepatan di atas menunjukkan tingkat simpangan kecepatan terhadap kecepatan rata-rata atau dikenal dengan dispersi. Semakin tidak seragam distribusi vertikal kecepatan, semakin besar dispersi.

Dalam integrasi persamaan-persamaan kontinuitas dan momentum untuk mencari persamaan 2DH, dipakai anggapan dan penyederhanaan berikut ini:

1. nilai rata-rata kedalaman dianggap cukup representatif untuk mewakili nilai-nilai besaran yang berubah-ubah sepanjang kedalaman aliran,
2. kecepatan dan percepatan arah vertikal dianggap sangat kecil, sehingga diabaikan,
3. berlaku distribusi tekanan hidrostatik di seluruh kedalaman, dan
4. kemiringan dasar ke kedua arah horizontal kecil.

Dengan penyederhanaan tersebut, persamaan-persamaan kontinuitas dan momentum untuk model 2DH adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Uh}{\partial x} + \frac{\partial Vh}{\partial y} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial Uh}{\partial t} + \frac{\partial\left(U^2 h + \frac{1}{2} g h^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial UVh}{\partial y} = gh\left(S_{ox} - S_{fx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{\rho} T_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{\rho} T_{yx}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\partial Vh}{\partial t}+\frac{\partial UVh}{\partial x}+\frac{\partial\left(V^2h+\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y}=gh\left(S_{oy}-S_{fy}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{\rho}T_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{\rho}T_{yy}\right) \tag{20}$$

dalam persamaan-persamaan di atas S_{ox} dan S_{oy} adalah kemiringan dasar arah x dan y, S_{fx} dan S_{fy} adalah kemiringan garis energi arah x dan y, sedang T_{ij} adalah tensor tegangan geser rata-rata kedalaman.

Kemiringan garis energi umumnya dihitung dengan persamaan Manning atau Chezy.

Manning:

$$S_{fx}=\frac{n^2U\sqrt{U^2+V^2}}{h^{4/3}},\qquad S_{fy}=\frac{n^2V\sqrt{U^2+V^2}}{h^{4/3}} \tag{21}$$

Chezy:

$$S_{fx}=\frac{U\sqrt{U^2+V^2}}{C^2h},\qquad S_{fy}=\frac{V\sqrt{U^2+V^2}}{C^2h} \tag{22}$$

dalam persamaan tersebut n dan C berturut-turut adalah koefisien kekasaran dasar menurut Manning dan Chezy.

Tegangan geser efektif, yang merupakan besaran tensorial, merupakan kombinasi pengaruh kekentalan (viskositas) air, turbulensi aliran, dan dispersi, menurut persamaan berikut ini (lihat Yulistiyanto, 1997):

$$T_{xx}=\frac{1}{h}\int_{z_o}^{z_s}\left[2\rho\nu\frac{\partial u}{\partial x}-\rho\overline{u'u'}-\rho U'U'\right]dz \tag{23a}$$

$$T_{yx}=\frac{1}{h}\int_{z_o}^{z_s}\left[\rho\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\rho\overline{v'u'}-\rho V'U'\right]dz \tag{23b}$$

$$T_{xy}=\frac{1}{h}\int_{z_o}^{z_s}\left[\rho\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'v'}-\rho U'V'\right]dz \tag{23c}$$

$$T_{yy}=\frac{1}{h}\int_{z_o}^{z_s}\left[2\rho\nu\frac{\partial v}{\partial y}-\rho\overline{v'v'}-\rho V'V'\right]dz \tag{23d}$$

Suku-suku pertama, kedua, dan ketiga dalam tanda kurung di sisi kanan berturut-turut adalah tegangan geser yang diakibatkan oleh kekentalan air, turbulensi aliran, dan dispersi.

Pengaruh kekentalan air, seperti halnya pada model 3D, diabaikan berhubung kontribusinya sangat kecil dibandingkan dengan pengaruh turbulensi aliran dan dispersi. Dengan kontribusi dari turbulensi aliran dan dispersi, tegangan geser efektif dihitung dengan persamaan berikut ini:

$$T_{xx}=\rho\tilde{\nu}_t 2\frac{\partial U}{\partial x}+\rho\left(K_{xx}\frac{\partial U}{\partial x}+K_{yx}\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{24a}$$

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

$$T_{yx} = \rho\tilde{\nu}_t\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \rho\left(K_{xx}\frac{\partial V}{\partial x} + K_{yx}\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{24b}$$

$$T_{xy} = \rho\tilde{\nu}_t\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \rho\left(K_{xy}\frac{\partial U}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{24c}$$

$$T_{yy} = \rho\tilde{\nu}_t 2\frac{\partial V}{\partial y} + \rho\left(K_{xy}\frac{\partial V}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{24d}$$

dalam hal ini $\tilde{\nu}_t$ adalah viskositas turbulen rata-rata kedalaman, dan K_{ij} adalah koefisien dispersi.

Tegangan geser di atas, yang dinyatakan sebagai fungsi gradien kecepatan, merupakan fenomena fisik. Koefisien viskositas turbulen dan dispersi erat kaitannya dengan proses fisik aliran. Dalam model 2DH, selain faktor fisik aliran tersebut, terdapat difusi yang timbul akibat pemakaian skema numeris dalam model. Sebagai contoh antara lain evaluasi suku derivatif yang dilakukan dengan pendekatan (pemotongan beberapa suku dalam deret Taylor), pemakaian skema *upwind*, dsb. Difusi ini tak terhindari karena melekat pada skema numerik yang dipakai dalam model. Difusi ini biasa dikenal dengan istilah difusi numerik. Efek difusi numerik adalah peredaman *peak* atau penghalusan gradien (*smoothing effect*). Sebagai contoh, apabila secara fisik terdapat konsentrasi tinggi di suatu titik dengan konsentrasi rendah di sekelilingnya, maka akibat difusi numerik, model akan menghasilkan beda konsentrasi yang lebih halus (lebih gradual) antara titik tersebut dan sekelilingnya. Pada beberapa model, efek difusi numerik ini sering kali dimanfaatkan untuk meningkatkan stabilitas hitungan, yaitu dengan secara sengaja memberikan koefisien difusi tambahan. Hal ini dikenal sebagai difusi artifisial.

Metode Penyelesaian

Komponen suatu model matematik pada prinsipnya dapat dikelompokkan menjadi dua bagian utama, yaitu:

1. satu set persamaan matematik yang merupakan representasi matematik fenomena fisik aliran air (yaitu persamaan Navier-Stokes untuk aliran laminar atau persamaan Reynolds untuk aliran turbulen), dan

2. metode penyelesaian persamaan matematik tersebut.

Komponen pertama model matematik, yaitu persamaan matematik (persamaan Navier-Stokes atau persamaan Reynolds), merupakan titik awal atau modal dasar suatu model matematik. Persamaan-persamaan tersebut umumnya berupa persamaan diferensial parsial (seperti dipaparkan dalam bab terdahulu dalam makalah ini), namun dapat juga berupa integral-diferensial (tidak dibahas dalam makalah ini). Setiap model matematik harus memilih satu set persamaan matematik yang sesuai dengan target aplikasi model tersebut, antara lain apakah 3D atau 2D atau 1D, laminar atau turbulen, perlukah penyederhanaan/pengabaian satu atau beberapa suku. Satu hal lagi yang diperlukan untuk melengkapi persamaan matematik yang dipilih, yaitu syarat batas (*boundary conditions*) dan nilai awal (*initial conditions*). Syarat batas merupakan nilai variabel yang diketahui atau ditetapkan, umumnya di batas domain fisik yang dimodelkan, untuk

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

memperoleh penyelesaian tunggal (*unique solutions*) persamaan-persamaan matematik di model. Sebagai contoh, debit masuk ke dalam domain model, muka air di batas akhir domain model, distribusi kecepatan di dekat dasar dan dinding saluran, atau kecepatan angin di dekat muka air. Demikian juga nilai awal, diperlukan untuk mengetahui fenomena pada titik waktu mulai, utamanya pada pemodelan aliran tak-permanen (*unsteady flow*).

Komponen kedua model matematik adalah metode penyelesaian persamaan-persamaan matematik yang telah dipilih. Metode penyelesaian pada umumnya dirancang untuk satu tipe tertentu persamaan matematik. Tidak disarankan, dan bahkan barangkali tidak mungkin dilakukan, untuk membuat atau memakai metode penyelesaian yang berlaku umum (*general purpose method*), yaitu suatu metode penyelesaian untuk diterapkan pada semua kemungkinan kasus aliran. Metode penyelesaian yang bersifat general seperti ini, seperti layaknya sebagian besar *general purpose tools*, malahan tidak optimum untuk satu kasus aliran tertentu.

Metode penyelesaian persamaan matematik dapat dirinci lebih lanjut menjadi enam langkah berikut ini:

1) diskretisasi persamaan matematik,
2) sistem koordinat,
3) grid,
4) skema penyelesaian persamaan diskret,
5) metode penyelesaian persamaan aljabar (pemilihan *solver*), dan
6) kriteria konvergensi.

1. Diskretisasi persamaan matematik

Langkah pertama dalam menyusun metode penyelesaian adalah diskretisasi persamaan matematik, yaitu metode pendekatan persamaan diferensial atau integral-diferensial dengan mengubahnya menjadi satu set persamaan aljabar untuk setiap variabel yang dicari, yang berlaku di satu set diskret tempat dan waktu dari domain model. Ada banyak metode tersedia, namun yang utama dan paling sering dipakai adalah metode diferensi hingga (*finite difference*, FD), volume hingga (*finite volume*, FV), atau elemen hingga (*finite element*, FE). Setiap metode memberikan hasil yang sama apabila ukuran grid sangat kecil. Namun demikian, untuk suatu jenis kasus tertentu, suatu metode lebih tepat dan sesuai daripada metode lainnya. Preferensi dalam pemilihan metode diskretisasi acap kali lebih ditentukan oleh selera pembuat model.

Metode diskretisasi FD adalah metode paling tua yang dikenal dalam penyelesaian numerik persamaan diferensial parsial. Metode ini juga paling mudah dipakai untuk domain bergeometri sederhana. Inti metode FD adalah persamaan kekekalan dalam bentuk diferensial. Domain model dicacah kedalam grid; di setiap titik grid, persamaan diferensial diganti dengan persamaan yang merupakan fungsi nilai-nilai persamaan tersebut di titik-titik grid. Pada grid terstruktur [Mengenai grid ini akan diuraikan dalam seksi berikutnya], metode FD sangat sederhana dan efektif. Kekurangan metode FD adalah pada kurang dijaminnya prinsip kekekalan; diperlukan perlakuan khusus untuk menjamin terjaganya prinsip kekekalan. Kekurangan lainnya adalah pada keterbatasan

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

pemakaian metode FD, yang hanya efektif untuk domain bergeometri sederhana; hal ini merupakan kelemahan utama metode FD untuk dipakai pada model aliran yang kompleks.

Metode diskretisasi FV memanfaatkan persamaan kekekalan dalam bentuk integral. Domain model dicacah menjadi sejumlah volume kontrol, dan persamaan kekekalan diterapkan pada setiap volume kontrol tersebut. Untuk setiap volume kontrol didapat persamaan aljabar dengan variabel yang dicari (*unknowns*) di volume kontrol yang ditinjau dan di sejumlah volume kontrol di sekelilingnya. Metode FV dapat diterapkan untuk semua jenis grid, sehingga cocok untuk domain bergeometri kompleks. Prinsip kekekalan di setiap volume kontrol selalu dipenuhi. Mungkin metode FV merupakan metode yang paling mudah difahami dan pembuatan programnya pun mudah. Setiap suku dalam persamaan diskretnya memiliki arti fisik. Kekurangan metode FV, dibandingkan dengan metode FD, adalah kesulitan di skema orde di atas dua pada model 3D. Hal ini disebabkan kebutuhan untuk melakukan dua diskretisasi, yaitu interpolasi dan integrasi.

Metode FE, dalam banyak segi, mirip dengan metode FV. Domain model dicacah menjadi sejumlah volume diskret atau elemen hingga, yang umumnya membentuk grid tak-terstruktur (*unstructured grid*). Ciri khas metode FE adalah penerapan fungsi pemberat (*weighting function*) pada persamaan matematik model sebelum dilakukan integrasi. Kelebihan utama metode FE adalah kemampuannya untuk menangani segala bentuk geometri domain. Kekurangan metode FE adalah keharusan untuk menangani matriks yang sangat tak-beraturan sebagai konsekuensi pemakaian grid tak-terstruktur. Dari sisi hitungan, hal ini menambah kebutuhan ruang memori dan pada saat yang sama mengurangi kecepatan hitungan.

2. Sistem koordinat

Persamaan kontinuitas dan momentum seperti dipaparkan pada makalah ini ditulis dalam sistem koordinat Cartesius. Pemilihan sistem koordinat ini, sebenarnya dipengaruhi oleh konfigurasi aliran yang akan dimodelkan. Selain koordinat Cartesius, dapat pula dipakai sistem koordinat lain, misalnya silindrik, sferik, non-orthogonal, atau *curvilinear*. Sistem koordinat dapat dibuat tetap (*fixed*) atau berubah (*moving*) menyesuaikan dengan domain model.

Selain sistem koordinat untuk referensi tempat, diperlukan pula sistem koordinat untuk besaran vektor, misalnya untuk kecepatan aliran, dan besaran tensor, misalnya untuk tegangan normal dan geser; sistem koordinat vektor dan tensor tidak selalu harus sama dengan sistem koordinat untuk posisi/tempat.

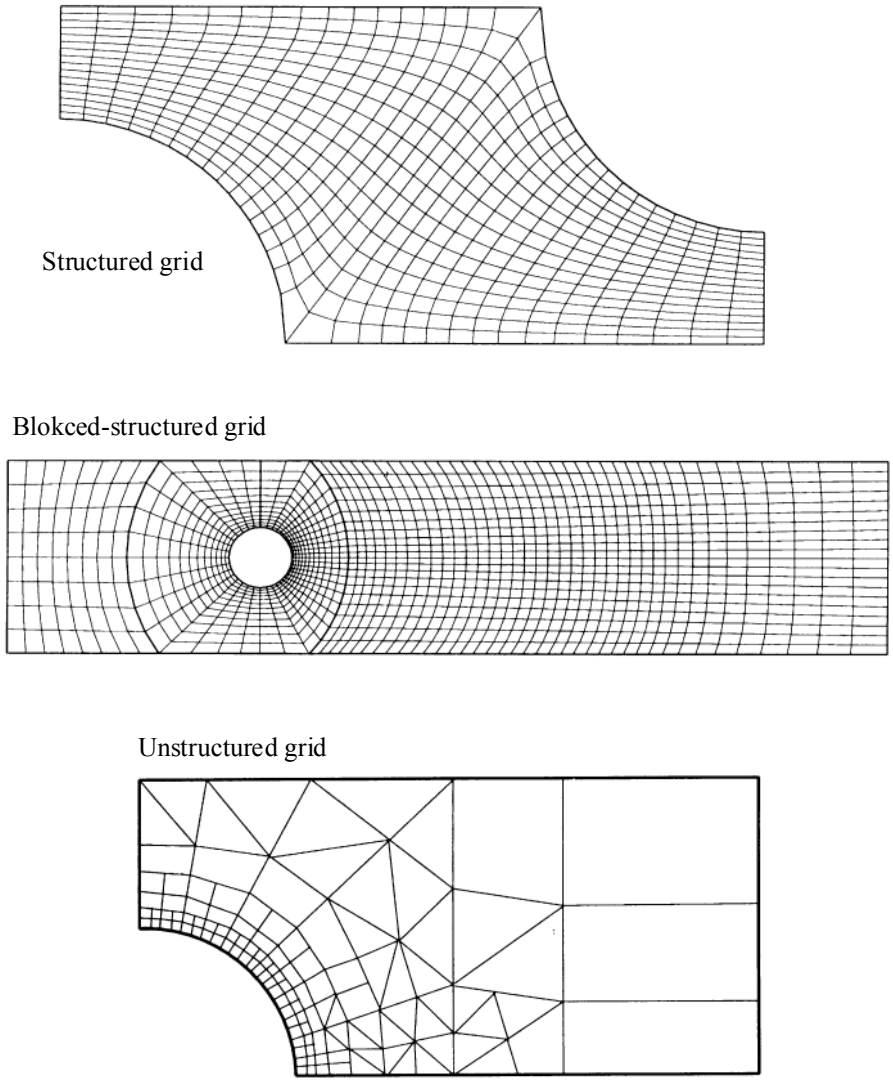
3. Grid

Lokasi tempat variabel aliran harus dihitung ditentukan dengan grid numerik. Grid ini pada dasarnya adalah representasi dari domain model. Grid menunjukkan pembagian domain model kedalam sub-domain yang berupa elemen (metode FE), volume kontrol (metode FV), atau titik (metode FD). Bentuk-bentuk grid pada dasarnya terdiri dari tiga jenis: terstruktur (*structured grid*), multi blok (*blokced-structured grid*), dan tak-beraturan (*unstructured grid*). Contoh ketiga jenis grid disajikan pada Gambar 5.

Grid terstruktur memberi banyak kemudahan dalam penyelesaian hitungan, tetapi kurang fleksibel apabila bentuk geometri domain kompleks. Sebaliknya, grid tak-

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

beraturan (yang banyak dipakai pada metode FE dan mulai banyak dipakai pula pada metode FV) memberi kemudahan dalam menangani geometri domain yang rumit, namun matriks koefisien persamaan matematik sering kali menjadi rumit sehingga memperlambat hitungan.



Gambar 5. Contoh grid (a) *structured grid*, (b) *blocked-structured grid*, dan (c) *unstructured grid*.

4. Skema penyelesaian persamaan diskret

Setelah menetapkan jenis grid, langkah berikutnya adalah memilih skema atau metode pendekatan dalam penyelesaian persamaan hasil diskretisasi persamaan kontinuitas dan momentum. Dalam metode FD, diperlukan skema atau pendekatan suku derivatif di titik hitungan. Dalam metode FV, diperlukan skema pendekatan untuk menghitung integral luasan dan volumetrik (*surface and volume integrals*). Dalam metode FE, diperlukan fungsi pembobot (*weighting functions*).

Pemilihan skema pendekatan di atas berpengaruh terhadap akurasi hasil model, tingkat kesulitan pemrograman, dan kecepatan hitungan. Akurasi hasil meningkat seiring dengan pemakaian skema berorde lebih tinggi. Namun, orde tinggi membutuhkan

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

memori komputer lebih banyak, yang memaksa pemakaian grid kasar, yang berakibat pada pengurangan akurasi hasil. Suatu kompromi antara kesederhanaan skema, kemudahan implementasi, akurasi hasil, dan efisiensi hitungan, haruslah dicari.

5. Metode penyelesaian persamaan aljabar (pemilihan solver)

Diskretisasi persamaan kontinuitas dan momentum menghasilkan satu sistem persamaan aljabar non-linear yang sangat besar, ribuan, puluhan ribu, bahkan pada model 3D dapat mencapai ratusan ribu persamaan yang harus diselesaikan. Karena persamaannya bersifat non-linear, cara iterasi dipakai untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Persamaan-persamaan non-linear tersebut dilinearkan dan sistem persamaan linear yang didapat kemudian diselesaikan, hampir selalu, dengan cara iterasi. Proses penyelesaian setiap sistem persamaan melibatkan operasi hitungan matriks. Pemilihan metode hitungan (*solver*) bergantung pada jenis grid dan jumlah *unknowns* dalam setiap persamaan.

6. Kriteria konvergensi

Oleh karena penyelesaian sistem persamaan dilakukan dengan cara iterasi, diperlukan kriteria konvergensi, yaitu saat iterasi telah sampai pada penyelesaian sistem persamaan. Ada dua tingkat iterasi, yaitu iterasi untuk menyelesaikan persamaan linear dan iterasi untuk menyelesaikan persamaan non-linear. Diperlukan kriteria yang tepat untuk menghentikan iterasi pada setiap langkah hitungan.

Syarat Batas (*Physical Boundary Conditions*)

Persamaan-persamaan kontinuitas dan momentum (persamaan Navier-Stokes atau persamaan Reynolds) merupakan representasi matematik fenomena fisik aliran air. Persamaan-persamaan tersebut berlaku untuk semua aliran air, baik aliran melalui pipa, saluran irigasi, sungai, maupun pergerakan air di pantai dan laut lepas. Akan tetapi hasil hitungan menunjukkan bahwa aliran di berbagai media tersebut berbeda, walaupun persamaannya sama. Dari manakah perbedaan tersebut muncul? Jawabnya adalah melalui syarat batas (*boundary conditions*). Pada setiap kasus tadi, syarat batasnya berbeda. Syarat batas, dan sering kali juga nilai awal (*initial conditions*) menentukan hasil yang bersifat *unique* dari penyelesaian persamaan-persamaan kontinuitas dan momentum. Contoh, apabila dimensi saluran telah dimasukkan, syarat batas fisik sesuai dengan dimensi saluran telah ditetapkan, dan aliran di ujung saluran diketahui, maka penyelesaian persamaan kontinuitas dan momentum akan menghasilkan kondisi aliran di saluran tersebut. Hasil berbeda akan diperoleh dari penyelesaian persamaan kontinuitas dan momentum yang sama apabila geometri serta syarat batas fisik dan hidraulik yang dipakai berbeda. Dengan kata lain, sekali kita memiliki persamaan kontinuitas dan momentum, maka penggerak dan pengarah (*the driver*) menuju satu penyelesaian tertentu adalah syarat batas.

Salah satu contoh syarat batas adalah kecepatan aliran di dan dekat dinding. Di dinding, kecepatan aliran ditetapkan sama dengan nol; ini dikenal dengan istilah *no-slip condition*. Cara lain adalah dengan menetapkan suatu distribusi kecepatan tertentu di daerah dekat dinding, disesuaikan dengan teori dan hasil experimen, misalnya distribusi logaritmik. Di dekat dinding, antara dinding dan titik hitungan terdekat dinding, diberlakukan syarat bahwa kecepatan aliran terdistribusi secara logaritmik; dalam hal

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

ini, berbeda dengan *no-slip condition*, kecepatan di dinding tidak diketahui (tidak diperlukan untuk mengetahui besaran kecepatan di dinding).

Syarat batas di atas adalah syarat batas fisik, yaitu kondisi sesuai dengan atau ditentukan oleh alam. Dalam model matematik, syarat batas tersebut harus dituangkan dalam formulasi numerik. Jika aliran di alam (di dunia nyata) ditentukan oleh syarat batas fisik, maka aliran hasil hitungan dengan model ditentukan oleh formulasi numerik yang dirancang untuk meniru syarat batas fisik tersebut. Permasalahan syarat batas merupakan subyek penelitian dan pengembangan tersendiri di bidang CFD.

Peran Model Matematik

Mengapa Model Matematik?

Cepat, praktis, dan murah. Inilah jawaban sederhana dan jujur terhadap preferensi pemilihan model matematik dibandingkan dengan model fisik untuk menyelesaikan sebagian besar permasalahan enjiniring. Ambil contoh perencanaan pengembangan kawasan pantai. Sejumlah alternatif skenario pengembangan dapat dengan mudah ditelaah memakai model matematik. Prediksi setiap skenario dapat dengan cepat diperoleh. Praktis, karena seluruh pekerjaan cukup dilaksanakan di ruang kerja dengan peralatan komputer. Jelas, biaya menjadi lebih murah.

Namun demikian, keuntungan model matematik adalah dengan syarat, yaitu keharusan untuk dapat menyelesaikan persamaan-persamaan dasar, yatiu persamaan Navier-Stokes (atau Reynolds), dengan akurat. Hal ini sangat sulit dicapai untuk sebagian besar aliran yang dijumpai dalam dunia enjiniring. Oleh karena itu, kita harus dapat menentukan apa yang dapat dipakai dan dipelajari untuk menganalisis dan menginterpretasikan hasil model matematik. Penting sekali untuk diingat bahwa hasil model matematik adalah pendekatan. Harus disadari bahwa terdapat perbedaan antara hasil hitungan dan kenyataan fisik di prototipe. Terdapat kesalahan dalam setiap langkah prosedur untuk mendapat hasil numerik. Kesalahan-kesalahan tersebut bersumber antara lain dai:

1) persamaan diferensial mengandung pendekatan dan idealisasi,

2) diskretisasi persamaan-persamaan diferensial tersebut mengandung penyederhanaan dan pendekatan, dan

3) penyelesaian persamaan-persamaan diskret tersebut dilakukan dengan iterasi; tanpa jumlah iterasi yang sangat besar, penyelesaian eksak tidak dapat diperoleh.

Model matematik, dan lebih umum lagi CFD, telah menjadi “pendekatan ketiga” dalam studi filosofis dan pengembangan disiplin ilmu fluida dinamika. Pada abad ketujuhbelas, dasar-dasar dinamika fluida experimental telah diletakkan, terutama oleh para ahli di Prancis dan Inggris. Abad berikutnya, kedelapanbelas dan kesembilanbelas, mulai berkembang disiplin dinamika fluida teoretik. Sebagai konsekuensinya, selama abad keduapuluh, studi dan praktek dinamika fluida (dan hampir semua disiplin enjiniring) berkaitan dengan teori murni di satu sisi dan experimen murni di sisi lain. Perkembangan teknologi komputer, yang didukung oleh perkembangan algoritma numerik untuk penyelesaian permasalahan fisik dengan komputer, telah mengubah cara kita dalam melakukan studi dan praktek dinamika fluida pada saat ini. Hal ini telah melahirkan suatu cara pendekatan baru dalam disiplin dinamika fluida, yaitu pendekatan

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

computational fluid dynamics. CFD saat ini telah diterima menjadi partner seimbang dengan dinamika fluida teoretik murni dan experimental murni dalam studi dan penyelesaian permasalahan dinamika fluida. Demikian juga dalam disiplin hidraulika, *computational hydraulics* telah mendapatkan tempat dan berperan bersama dengan hidraulika teoretik dan experimental dalam pemecahan permasalahan enjiniring.

Namun kiranya perlu diingat, bahwa CFD adalah cara pendekatan ketiga, tidak lebih dan tidak kurang. CFD merupakan pelengkap terhadap pendekatan teoretik dan experimental, bekerjasama secara sinergis dengan pendekatan teoretik dan experimental, tetapi tidak akan pernah menggantikan peran salah satu ataupun keduanya. Akan selalu ada kebutuhan terhadap pendekatan teoretik dan experimental. Perkembangan dinamika fluida pada masa datang akan sangat didukung oleh kerjasama dalam keseimbangan yang tepat antara ketiga cara pendekatan tersebut. CFD membantu penginterpretasian dan pemahaman hasil-hasil teori dan experiment, dan juga sebaliknya.

Pemilihan Jenis Model, antara 3D dan 2D

Dalam makalah ini, telah dipaparkan dua jenis model matematik, 3D dan 2DH. Untuk kebutuhan enjiniring hidraulika, model 3D masih belum banyak dipakai. Hal ini berkaitan dengan masih "mahal"-nya model 3D; disamping harga beli paket model 3D komersial masih lebih mahal dibandingkan harga model 2D, tuntutan *hardware* pendukung untuk model 3D pun masih lebih tinggi. Ditambah lagi, pemakaian model 3D membutuhkan *effort* lebih, baik kebutuhan *input data* (untuk keperluan pembuatan domain numerik dan syarat batas), pemakaiannya (*pre- and post-processors*), maupun interpretasi hasil model. Melihat kenyataan tersebut, model 2D masih menempati prioritas utama dalam pekerjaan enjiniring.

Namun demikian, untuk kasus hidraulika tertentu, kebutuhan untuk melakukan pemodelan 3D menjadi tak terhindari; misalnya apabila sifat aliran sangat kompleks dan menunjukkan perilaku tiga dimensi (olakan, konfigurasi dasar saluran yang kompleks, kebutuhan untuk mengetahui profil di bidang vertikal, dsb). Beruntung, generasi komputer saat ini telah memungkinkan pemakaian model 3D dengan komputer personal. Menurut pengalaman penulis, pada awal 2000-an komputer personal dengan kapasitas memori 4x128MB dapat dipakai untuk melakukan simulasi aliran 3D yang memiliki jumlah titik hitung (*nodes*) $2 \sim 3 \times 10^5$; waktu simulasi (*CPU running time*) berkisar antara 2 ~ 7 hari. Saat ini, dengan komputer jinjing yang memiliki prosesor Centrino Core Duo, waktu simulasi untuk kasus yang sama pastilah telah jauh berkurang. Perkembangan yang menggembirakan juga dapat dilihat pada bidang riset pengembangan model 3D. Saat ini, telah mulai ada pembuat yang menyediakan model 3D-nya kepada khalayak untuk digunakan secara gratis, lengkap dengan *pre- and post-processor*-nya.

Langkah Aplikasi Model Matematik

Langkah pemakaian model matematik untuk simulasi suatu kasus aliran dapat dikelompokkan menjadi jenis-jenis pekerjaan seperti dipaparkan pada paragraf-paragraf di bawah ini.

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

1. Pengumpulan data prototipe, meliputi antara lain geometri (batas daerah, peta dasar sungai/saluran/pantai) dan hidraulik (elevasi muka air/hidrograf, debit/kecepatan di inlet dan outlet serta di beberapa lokasi kontrol, konsentrasi sedimen, temperatur air, dsb).

2. Pembuatan domain model, pembuatan grid.

3. Penetapan syarat batas (debit di inlet, kedalaman aliran di outlet, konsentrasi sedimen dan temperatur air di inlet).

4. Penetapan nilai awal di seluruh domain model.

5. Hitungan (*run*) awal: verifikasi dan validasi (dilakukan untuk model yang dibuat sendiri), yaitu melakukan pencocokan hasil model dengan hasil penyelesaian analitik untuk kasus sederhana.

6. Kalibrasi, yaitu pencarian nilai parameter model yang sesuai dengan kondisi nyata; ini dilakukan dengan memvariasi nilai parameter model (misalnya koefisien difusi, koefisien kekasaran dasar) sedemikian hingga hasil model sesuai dengan data pengukuran untuk kondisi hidraulik yang sama.

7. Hitungan simulasi, yaitu prediksi aliran dengan konfigurasi geometri atau hidraulik rancangan

Langkah pemakaian model di atas adalah prosedur tipikal, yang biasa dilakukan dalam praktek permodelan. Uraian lebih rinci akan peserta jumpai dalam sesi kursus yang lain, juga akan peserta lakukan sendiri dalam sesi praktek pemodelan.

Penutup

Adalah suatu hal yang menggembirakan dengan telah diterimanya model matematik sebagai salah satu alat dalam pekerjaan riset, studi, dan perancangan hidraulika. Bahkan model matematik, setidaknya di Indonesia, telah jauh meninggalkan hidraulika experimental dari segi kepopulerannya. Namun demikian, ada baiknya diingatkan kembali bahwa model hidraulika, seperti halnya CFD umumnya, hanya merupakan salah satu cara pendekatan pemahaman fisik aliran, di samping hidraulika experimental dan teoretik. Model matematik tidak akan dapat menggantikan dua cara pendekatan lainnya tersebut.

Ada semacam kekhawatiran bahwa sebagian praktisi (pengembang) model matematik terlalu tenggelam dalam teknik komputasi dan melupakan pertimbangan praktis dan fisik dari teknik tersebut. Ketidak-pedulian terhadap aspek fisik dari persamaan aliran dapat membawa kerugian, antara lain bahwa pemodelan hanya berupa permainan angka tanpa cerminan fisik sehingga terjadi jurang pemisah antara model matematik dan kenyataan di prototipe. Semoga hal ini tidak terjadi.

Referensi

Anderson, J.D. Jr., 1995, *Computational Fluid Dynamics, The Basics with Applications*, McGraw-Hill Inc., New York, USA.

Ferziger, J. H., and Peric, M., 1997, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Graf, W. H., and Altinakar, M. S., 1998, *Fluvial Hydraulics*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, England.

Istiarto, I., 2001, Flow Around A Cylinder In A Scoured channel Bed, *Doctoral Dissertation*, EPFL, Switzerland.

Versteeg, H. K., and Malalasekera, W., 1995, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, Longman Group, Essex, England.

Yulistiyanto, B., 1997, Flow around a Cylinder installed in a Fixed-Bed Open Channel, *Doctoral Dissertation*, No. 1631, EPFL, Switzerland.

Istiarto • Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan FT UGM • http://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id