



Universitas Gadjah Mada
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Prodi Teknik Sipil (Program Sarjana)

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

1

AKAR PERSAMAAN

Roots of Equations

Akar Persamaan

2

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Acuan

- ❑ Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 4 dan 5, hlm. 117-170.

Persamaan Aljabar vs Transendental

❑ Persamaan aljabar (*algebraic equations*)

- ❑ fungsi $y = f(x)$ dinamakan fungsi aljabar apabila fungsi tsb dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \dots + f_1 y^1 + f_0 = 0$$

- ❑ f_i adalah polinomial orde i dalam x
- ❑ polinomial merupakan fungsi aljabar yang umumnya dituliskan sbb.

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$

- ❑ koefisien a_i adalah konstanta

Persamaan Aljabar vs Transendental

- Contoh persamaan aljabar

$$f(x) = 1 - 2.37x + 7.5x^2$$

$$f(x) = 5x^2 - x^3 + 7x^6$$

- Fungsi transendental adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \ln x^2 - 1$$

Akar Persamaan

5

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>

□ Contoh

- Ingin diketahui kedalaman aliran (h) pada saluran bertampang persegi panjang pada suatu debit aliran tertentu (Q)

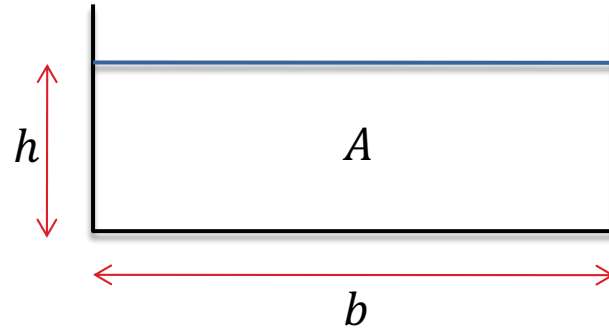
- Persamaan

$$Q = AV$$

$$A = bh$$

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_e^{1/2}$$

$$Q = bh \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_e^{1/2}$$



A luas tampang aliran = bh

R_h radius hidraulik A/P

P keliling tampang aliran = $b + 2h$

n koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)

S_e kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

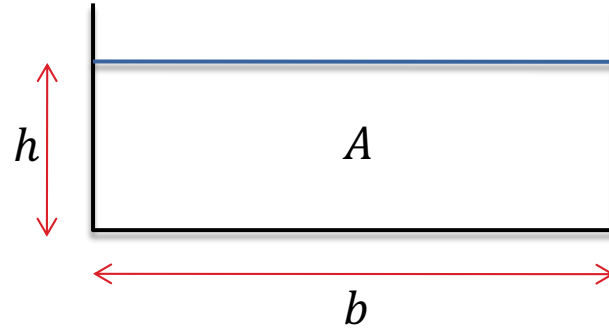
Akar Persamaan

6

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Penyelesaian

- variabel yang sudah diketahui diubah menjadi konstanta (Q, n, S_e)
- $A, P,$ dan R_h dituliskan sebagai fungsi h dan konstanta
- sehingga persamaan dalam h saja



A luas tampang aliran = bh

R_h radius hidraulik A/P

P keliling tampang aliran = $b + 2h$

n koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)

S_e kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

Akar Persamaan

❑ Prosedur

- ❑ Suku-suku persamaan dikelompokkan sehingga sedapat mungkin konstanta dipisahkan dari variabel
- ❑ Jika $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$, $b = 20 \text{ m}$, $n = 0.03$, dan $S_f \cong S_o = 0.001$
- ❑ Persamaan diselesaikan untuk mendapatkan kedalaman aliran h
- ❑ Bagaimanakah caranya?

$$Q = AV$$

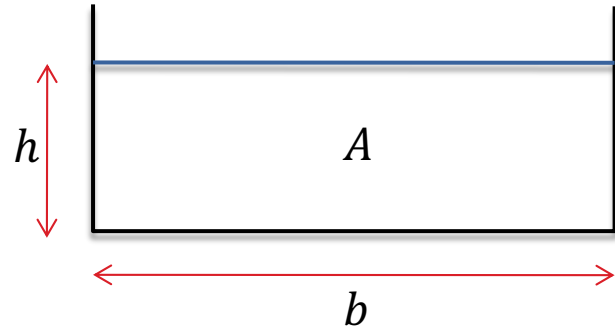
$$Q = bh \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_e^{1/2}$$

$$Q = bh \frac{1}{n} \left(\frac{bh}{b+2h} \right)^{2/3} S_e^{1/2}$$

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

Akar Persamaan

- ❑ Metode “coba-dan-ralat” (*trial and error*)
 - ❑ Mencoba suatu nilai $h = h_1$
 - ❑ Mengontrol bahwa nilai h tersebut memenuhi persamaan
 - ❑ Jika tidak memenuhi, maka dicoba nilai lain $h = h_2$
 - ❑ Dst.
- ❑ Cara ini sangat sederhana dan tidak efisien
- ❑ Perlu cara yang lebih sistematis



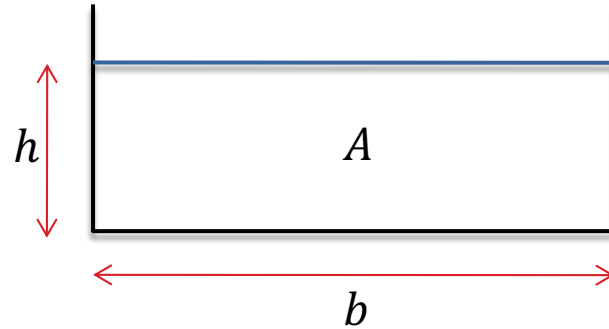
$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

Akar Persamaan

9

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Metode Pendekatan Berurutan
- ❑ Metode *Bisection*
- ❑ Metode Newton-Raphson
- ❑ Metode *Secant*



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

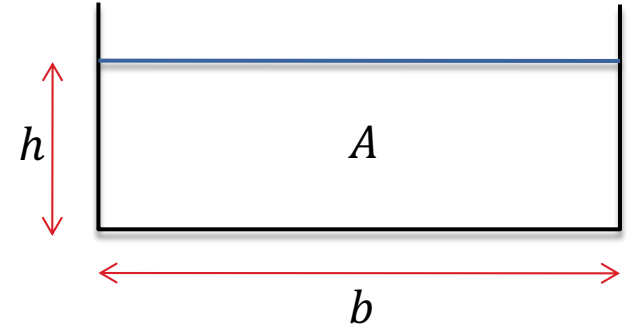
Metode Pendekatan Berurutan

10

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

□ Prosedur

- Bentuk persamaan diubah menjadi $h = f(h)$
- Dicoba nilai h awal untuk dimasukkan ke dalam fungsi tsb.
- Nilai h yang diperoleh dimasukkan ke dalam fungsi lagi
- Langkah kedua dan ketiga diulang-ulang sampai perubahan h kecil



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

$$(bh)^{5/3} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}} (b + 2h)^{2/3}$$

$$h = \frac{1}{b} \left[\frac{Qn}{S_e^{1/2}} (b + 2h)^{2/3} \right]^{3/5}$$

Metode Pendekatan Berurutan

$$h = \frac{1}{b} \left[\frac{Qn}{S_o^{1/2}} (b + 2h)^{2/3} \right]^{3/5}$$

- ❑ Iterasi dilakukan dengan nilai awal $h_o = 2$ m
- ❑ Metode ini belum tentu berhasil menemukan akar persamaan

iterasi, i	h_i (m)	h_{i+1} (m)	Δh (m)
0	2	1.805965	-0.19404
1	1.805965	1.794227	-0.01174
2	1.794227	1.793513	-0.00071
3	1.793513	1.79347	-4.3E-05
4	1.79347	1.793467	-2.6E-06
5	1.793467	1.793467	-1.6E-07

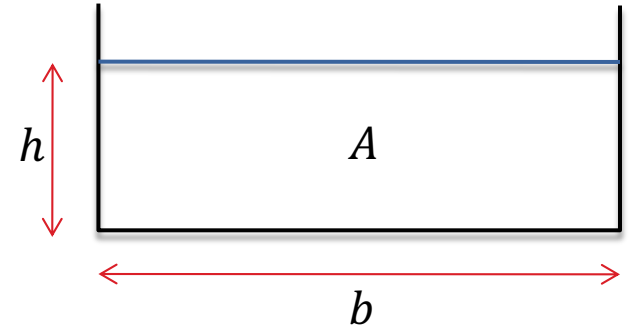
Metode *Bisection*

12

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Prosedur

- ❑ Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
- ❑ Dicoba dua h awal (h_0 dan h_1) yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda (+ dan -)
- ❑ Diambil h_2 di tengah-tengah kedua h tsb.
- ❑ Dicari $f(h_2) = 0$
- ❑ Jika kesalahan masih besar, ulangi langkah di atas untuk h_2 dan salah satu dari h sebelumnya yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda
- ❑ Hentikan hitungan jika perubahan h sudah kecil



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_e^{1/2}} = 0$$

Metode Bisection

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_e^{1/2}} = 0$$

$$f(h) = 0$$

- Nilai awal:

$$h_0 = 1 \text{ m dan } h_1 = 2 \text{ m}$$

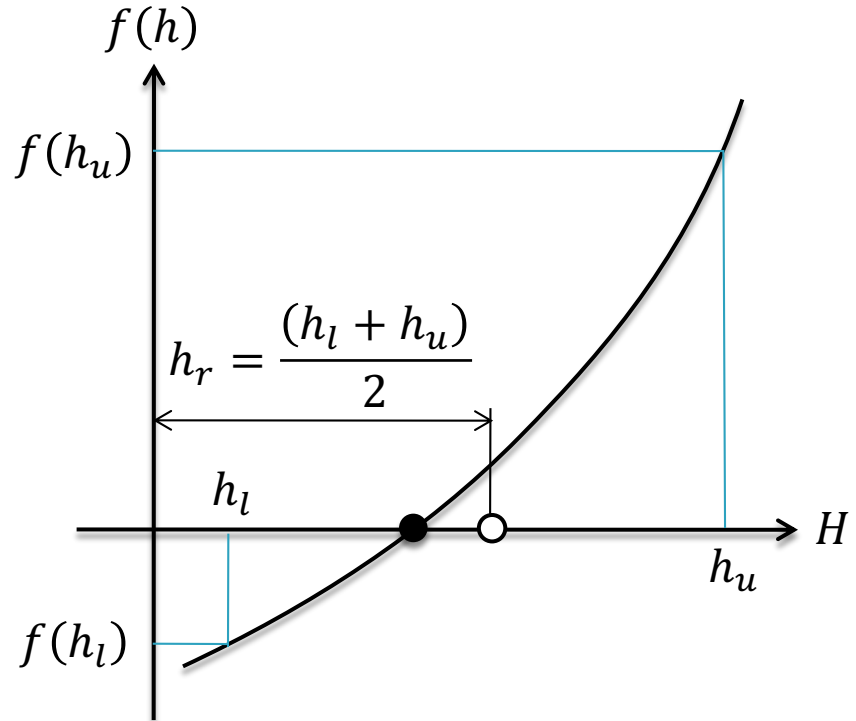
- h_{i-1} dan h_i dalam $(h_{i-1} + h_i)/2$ dipilih dari $f(h_{i-1})$ dan $f(h_i)$ yang berbeda tanda (positif dan negatif)

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$(h_{i-1} + h_i)/2$	Δh
0	1	-28.6654		
1	2	8.794679	1.5	-0.5
2	1.5	-11.6204	1.75	0.25
3	1.75	-1.78829	1.875	0.125
4	1.875	3.414127	1.8125	-0.0625
5	1.8125	0.790084	1.78125	-0.03125
6	1.78125	-0.50489	1.796875	0.015625
7	1.796875	0.141163	1.789063	-0.00781
8	1.789063	-0.18222	1.792969	0.003906
9	1.792969	-0.02062	1.794922	0.001953
10	1.794922	0.060249	1.793945	-0.00098
11	1.793945	0.019809	1.793457	-0.00049
12	1.793457	-0.00041	1.793701	0.000244

Metode *Bisection*

❑ Kelemahan

- ❑ misal h_l dan h_u masing-masing adalah nilai h yang berurutan sedemikian hingga $f(h_l)f(h_u) < 0$ dan $|h_l| < |h_u|$
- ❑ dalam memilih h baru (h_r) yang merupakan jumlah separuh h_l dan h_u , nilai $f(h_l)$ maupun $f(h_u)$ tidak dipertimbangkan
- ❑ jika $f(h_l)$ lebih dekat ke nol daripada $f(h_u)$, akar persamaan mestinya lebih dekat ke h_l daripada ke h_u



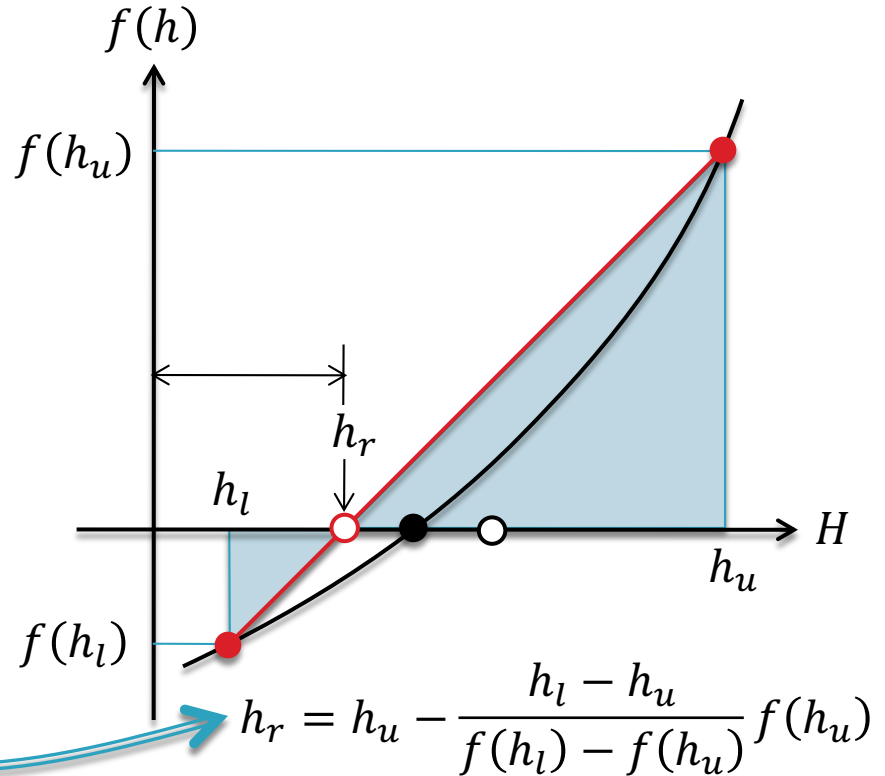
Metode *Bisection*

15

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Metode *bisection* dapat diperbaiki
 - pemilihan h_r pada suatu langkah iterasi tidak selalu berada di tengah antara h_l dan h_u namun dengan pemberian bobot
 - cara perbaikan memanfaatkan metode grafis, yaitu dengan menarik garis lurus antara h_l dan h_u
 - h_r adalah titik potong garis lurus tsb dengan sumbu H

$$\frac{f(h_l)}{h_r - h_l} = \frac{f(h_u)}{h_r - h_u}$$



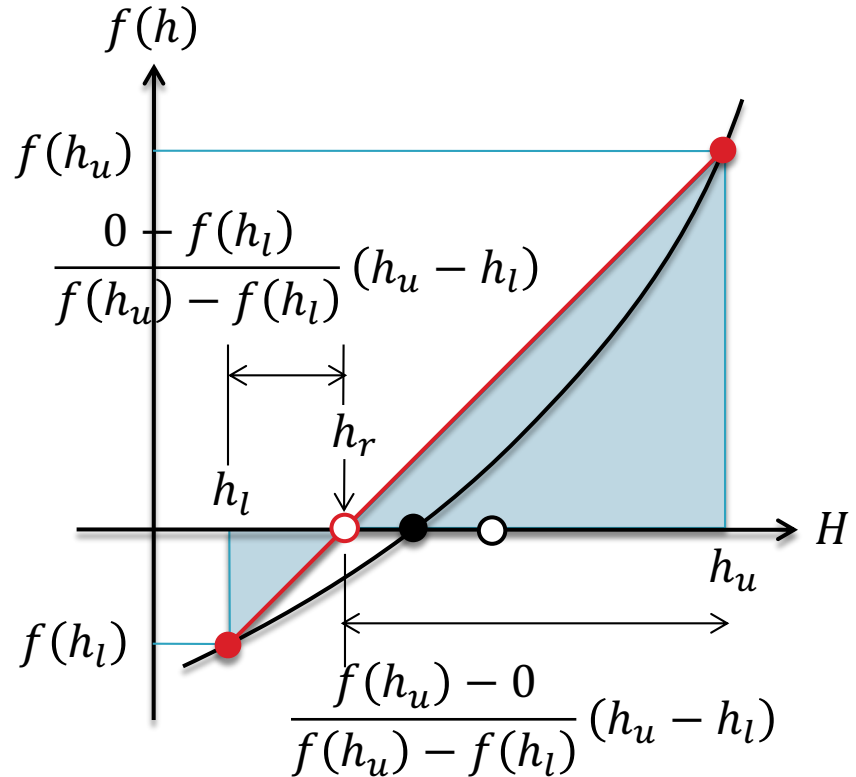
Metode Bisection

16

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$h_r = h_l - \frac{f(h_l)}{f(h_u) - f(h_l)} (h_u - h_l)$$

$$h_r = h_u - \frac{f(h_u)}{f(h_u) - f(h_l)} (h_u - h_l)$$



Metode *Bisection*

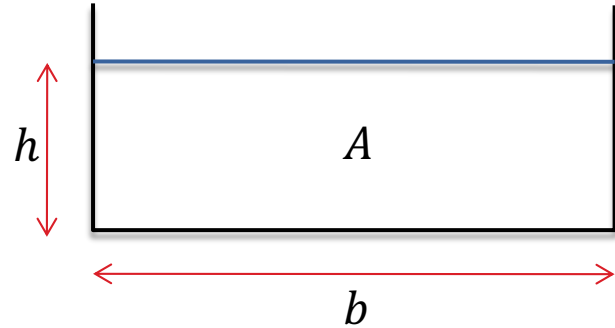
17

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Metode *bisection* yang diperbaiki dg cara ini dikenal sbg *the false-position method*

Soal

- Ulangi hitungan metode *bisection* dalam kasus mencari kedalaman aliran di saluran dengan memakai metode *bisection* yang diperbaiki



A luas tampang aliran = bh

R_h radius hidraulik A/P

P keliling tampang aliran = $b + 2h$

n koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)

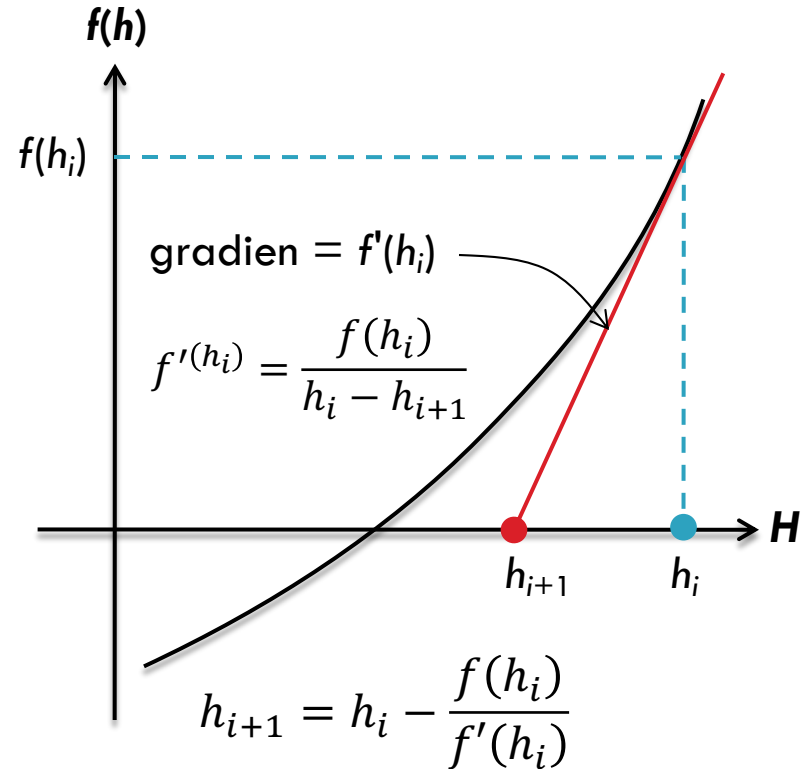
S_e kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

Metode Newton-Raphson

18

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Jika h_i adalah h awal, maka
 - perpanjang garis singgung pada kurva melalui titik $[h_i, f(h_i)]$
 - titik potong garis singgu tsb dengan absis merupakan nilai h_{i+1} sebagai pendekatan akar persamaan yang lebih baik daripada h_i
 - Kemungkinan ditemui $f(h)$ tidak dapat di-diferensial-kan



Metode Newton-Raphson

❑ Prosedur

- ❑ Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
- ❑ Dicari diferensial $f(h)$, yaitu $f'(h)$
- ❑ Dicoba h_i
- ❑ Dicari h_{i+1} dengan persamaan:

$$h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)}$$

- ❑ Hitungan dihentikan jika perubahan h kecil atau tidak berarti
- ❑ Hitungan mungkin divergen

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_o^{1/2}} = 0$$

$$f(h) = \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_o^{1/2}}$$

$$f'(h) = \frac{5}{3} \frac{b(bh)^{2/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{4}{3} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{5/3}}$$

Metode Newton-Raphson

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654	30.14372	1.950959	0.950959
1	1.950959	6.663065	43.19649	1.796709	-0.15425
2	1.796709	0.134273	41.4373	1.793468	-0.00324
3	1.793468	6.18E-05	41.39915	1.793467	-1.5E-06
4	1.793467	1.31E-11	41.39913	1.793467	-3.2E-13
5	1.793467	0	41.39913	1.793467	0

Metode Secant

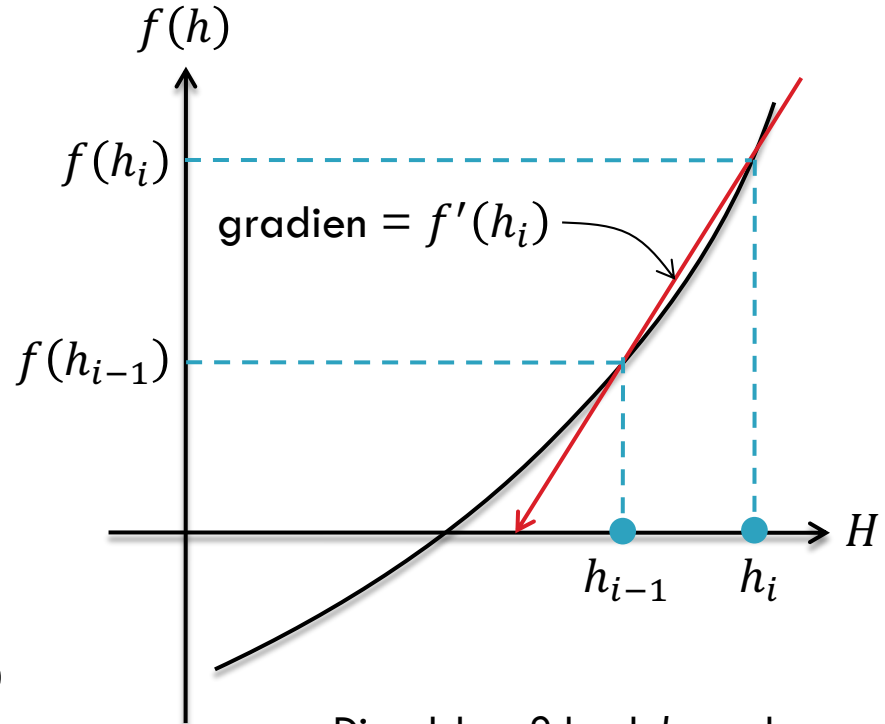
21

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Kelemahan Metode Newton-Raphson
 - ❑ Kemungkinan $f'(h)$ tidak ada atau sulit diperoleh
- ❑ Metode secant
 - ❑ Gradien, $f'(h)$, dihitung dengan pendekatan, yaitu kemiringan garis yang menghubungkan dua titik

$$f'(h_i) = \frac{f(h_{i-1}) - f(h_i)}{h_{i-1} - h_i}$$

➡
$$h_{i+1} = h_i - \frac{h_{i-1} - h_i}{f(h_{i-1}) - f(h_i)} f(h_i)$$



Diperlukan 2 buah h awal

Metode Secant

- Nilai awal:

$$h_0 = 1 \text{ m dan } h_1 = 2 \text{ m}$$

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654			
1	2	8.794679	37.46011	1.765226	-0.23477
2	1.765226	-1.16445	42.41998	1.792676	0.027451
3	1.792676	-0.03274	41.22745	1.79347	0.000794
4	1.79347	0.000133	41.39449	1.793467	-3.2E-06
5	1.793467	-1.5E-08	41.39915	1.793467	3.61E-10

Akar Persamaan

❑ Soal 1:

- ❑ Temukan kedalaman aliran di saluran trapesium dengan kemiringan talud 1:1, lebar dasar saluran $b = 20$ m, kemiringan memanjang 0.001, koefisien kekasaran $n = 0.025$, dan debit aliran $Q = 50$ m³/s.

Akar Persamaan

❑ Soal 2:

- ❑ Temukan lokasi sumur pengambilan jika diketahui terjadi penurunan muka air di dua sumur, yaitu di $z_1 = 2.0$ m dan $z_2 = 1.8$ m, permeabilitas tanah, $p = 0.0005$ m/s
- ❑ dari data hasil pencatatan lain, diketahui: tebal akuifer $Y = 20$ m, debit pemompaan di sumur lain $Q = 22.3$ ℓ/s , jarak antara 2 sumur yg diukur $L = 10$ m. Sumur yang dipompa sebaris dengan sumur yang diukur.
- ❑ Persamaan:

$$Q = \frac{\pi p (d_2^2 - d_1^2)}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$d_i = Y - z_i$$

r jarak ke sumur yang dipompa

Sekian