UNIVERSITAS GADJAH MADA
FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN

AKAR PERSAMAAN

Roots of Equations

Akar Persamaan

- Acuan
  - Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
    - Chapter 4 dan 5, hlm. 117-170.

Persamaan Aljabar vs Transendental

- Persamaan aljabar (*algebraic equations*)
  - fungsi $y = f(x)$ dinamakan fungsi aljabar apabila fungsi tsb dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \ldots + f_1 y^1 + f_0 = 0$$

  - f_i adalah polinomial orde i dalam x
  - polinomial merupakan fungsi aljabar yang umumnya dituliskan sbb.

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$$

  - koefisien a_i adalah konstanta

Persamaan Aljabar vs Transendental

- Contoh persamaan aljabar

$$f(x) = 1 - 2.37x + 7.5x^2$$

$$f(x) = 5x^2 - x^3 + 7x^6$$

- Fungsi transendental adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \ln x^2 - 1$$

Akar Persamaan

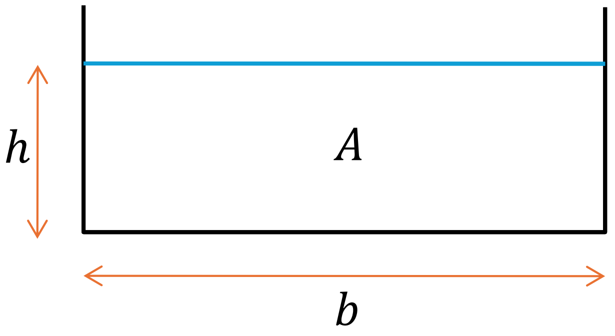
- Contoh
  - Ingin diketahui kedalaman aliran, h, di saluran bertampang persegi panjang untuk debit aliran Q
  - Persamaan

$$Q = AV$$

$$A = bh$$

$$V = \frac{1}{n} {R_h}^{2/3} {S_e}^{1/2}$$

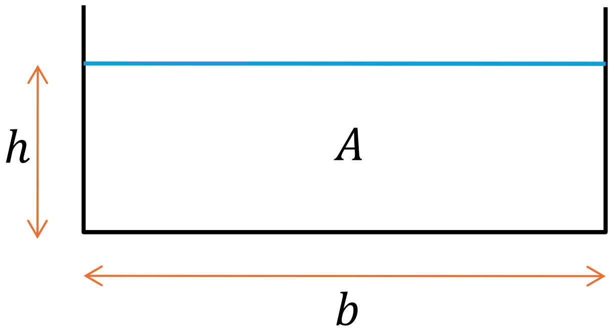
$$Q = bh \frac{1}{n} {R_h}^{2/3} {S_e}^{1/2}$$



A	luas tampang aliran $= bh$
R_h	radius hidraulik A/P
P	keliling tampang aliran $= b + 2h$
n	koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)
S_e	kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

Akar Persamaan

- Penyelesaian
  - variabel yang sudah diketahui diubah menjadi konstanta (Q, n, S_e)
  - $A, P,$ dan R_h dituliskan sebagai fungsi h dan konstanta
  - sehingga persamaan dalam h saja



A	luas tampang aliran $= bh$
R_h	radius hidraulik A/P
P	keliling tampang aliran $= b + 2h$
n	koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)
S_e	kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

Akar Persamaan

- Prosedur
  - Suku-suku persamaan dikelompokkan sehingga sedapat mungkin konstanta dipisahkan dari variabel
  - Jika Q = 50 m^3/s, b = 20 m, n = 0.03, dan $S_f \cong S_o = 0.001$
  - Persamaan diselesaikan untuk mendapatkan kedalaman aliran h
  - Bagaimanakah caranya?

$$Q = AV$$

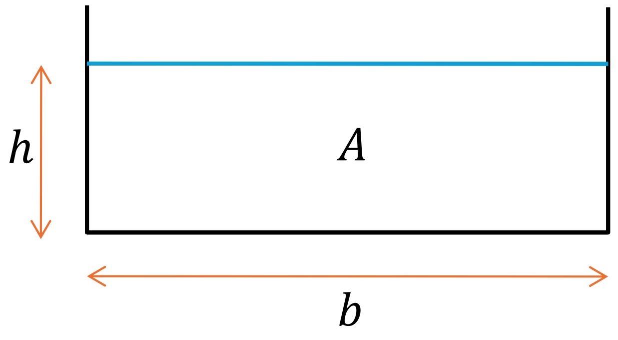
$$Q = bh\frac{1}{n}{R_h}^{2/3}{S_e}^{1/2}$$

$$Q = bh\,\frac{1}{n}\left(\frac{bh}{b+2h}\right)^{2/3}{S_e}^{1/2}$$

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}$$

Akar Persamaan

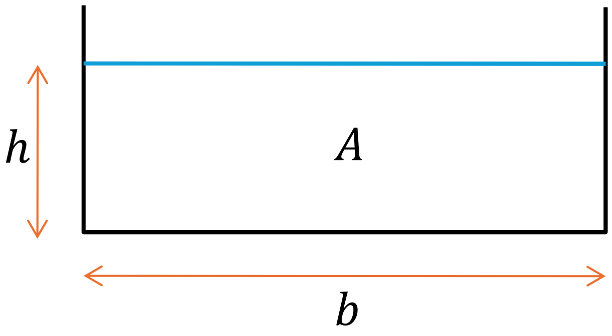
- Metode “coba-dan-ralat” (*trial and error*)
  - Mencoba suatu nilai $h = h_1$
  - Mengontrol bahwa nilai h tersebut memenuhi persamaan
  - Jika tidak memenuhi, maka dicoba nilai lain $h = h_2$
  - Dst.
- Cara ini sangat sederhana dan tidak efisien
- Perlu cara yang lebih sistematik



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}$$

Akar Persamaan

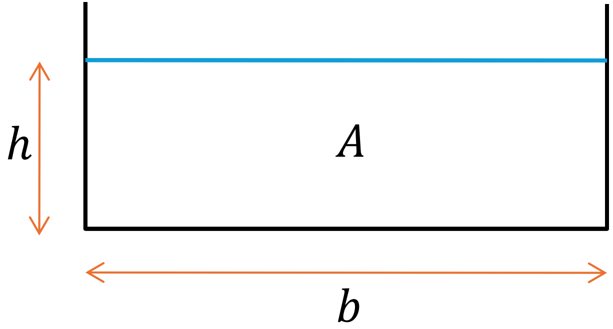
- Metode Pendekatan Berurutan
- Metode *Bisection*
- Metode Newton-Raphson
- Metode *Secant*



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}$$

Metode Pendekatan Berurutan

- Prosedur
  - Bentuk persamaan diubah menjadi $h = f(h)$
  - Dicoba nilai *h* awal untuk dimasukkan ke dalam fungsi tsb.
  - Nilai h yang diperoleh dimasukkan ke dalam fungsi lagi
  - Langkah kedua dan ketiga diulang-ulang sampai perubahan h kecil



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}$$

$$(bh)^{5/3} = \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}(b+2h)^{2/3}$$

$$h = \frac{1}{b}\left[\frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}(b+2h)^{2/3}\right]^{3/5}$$

Metode Pendekatan Berurutan

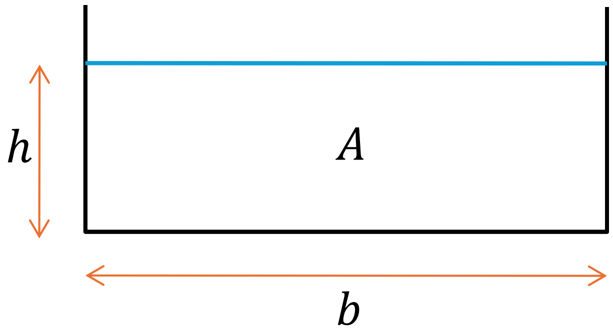
$$h = \frac{1}{b}\left[\frac{Qn}{{S_o}^{1/2}}(b+2h)^{2/3}\right]^{3/5}$$

- Iterasi dilakukan dengan nilai awal $h_o = 2$ m
- Metode ini belum tentu berhasil menemukan akar persamaan

iterasi, *i*	h_i (m)	h_{i+1} (m)	Δh (m)
0	2	1.805965	-0.19404
1	1.805965	1.794227	-0.01174
2	1.794227	1.793513	-0.00071
3	1.793513	1.79347	-4.3E-05
4	1.79347	1.793467	-2.6E-06
5	1.793467	1.793467	-1.6E-07

Metode *Bisection*

- Prosedur
  - Persamaan dibentuk menyadi $f(h) = 0$
  - Dicoba dua h awal (h_0 dan h_1) yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda (+ dan –)
  - Diambil h_2 di tengah-tengah kedua h tsb.
  - Dicari $f(h_2) = 0$
  - Jika kesalahan masih besar, ulangi langkah di atas untuk h_2 dan salah satu dari h sebelumnya yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda
  - Hentikan hitungan jika perubahan h sudah kecil



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}}$$

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}} = 0$$

Metode *Bisection*

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{{S_e}^{1/2}} = 0$$

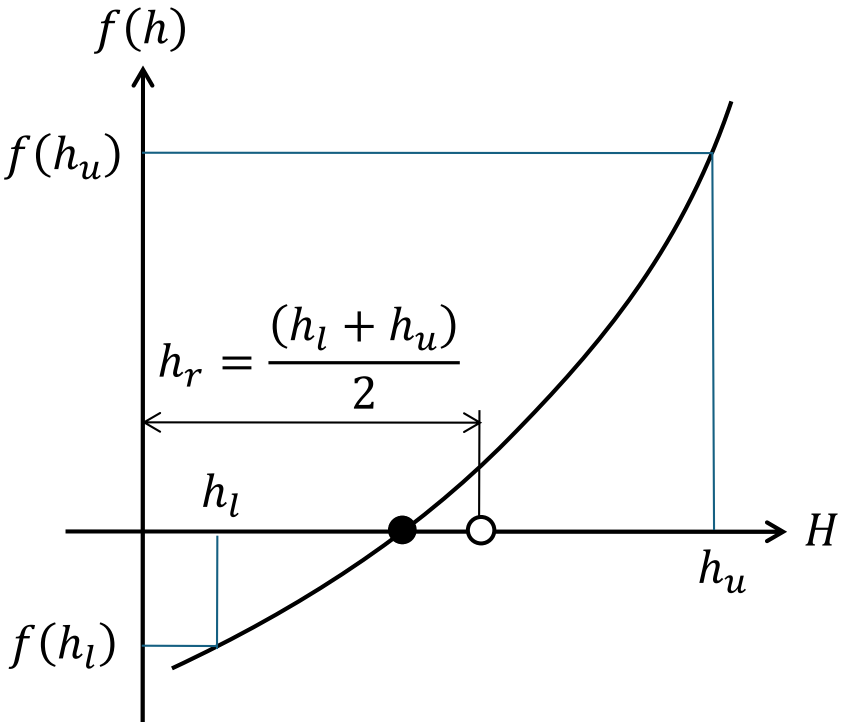
$$f(h) = 0$$

- Nilai awal
  $h_0 = 1\text{ m}$ dan $h_1 = 2\text{ m}$
- h_{i-1} dan h_i dalam $(h_{i-1} + h_i)/2$ dipilih dari $f(h_{i-1})$ dan $f(h_i)$ yang berbeda tanda (positif dan negatif)

iterasi, *i*	h_i	$f(h_i)$	$(h_{i-1}+h_i)/2$	Δh
0	1	-28.6654		
1	2	8.794679	1.5	-0.5
2	1.5	-11.6204	1.75	0.25
3	1.75	-1.78829	1.875	0.125
4	1.875	3.414127	1.8125	-0.0625
5	1.8125	0.790084	1.78125	-0.03125
6	1.78125	-0.50489	1.796875	0.015625
7	1.796875	0.141163	1.789063	-0.00781
8	1.789063	-0.18222	1.792969	0.003906
9	1.792969	-0.02062	1.794922	0.001953
10	1.794922	0.060249	1.793945	-0.00098
11	1.793945	0.019809	1.793457	-0.00049
12	1.793457	-0.00041	1.793701	0.000244

Metode *Bisection*

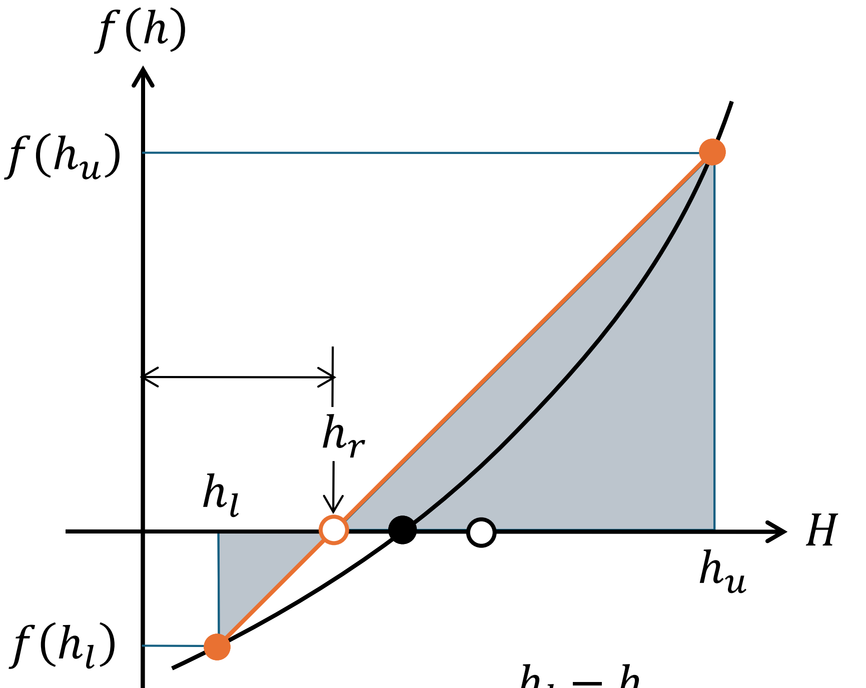
- Kelemahan
  - misal h_l dan h_u masing-masing adalah nilai *h* yang berurutan sedemikian hingga $f(h_l)f(h_u) < 0$ dan $|h_l| < |h_u|$
  - dalam memilih h baru (h_r) yang merupakan jumlah separuh h_l dan h_l, nilai $f(h_l)$ maupun $f(h_u)$ tidak dipertimbangkan
  - jika $f(h_l)$ lebih dekat ke nol daripada $f(h_u)$, maka akar persamaan mestinya lebih dekat ke h_l daripada ke h_u



Metode *Bisection*

- Metode *bisection* dapat diperbaiki
  - pemilihan h_l di suatu langkah iterasi tidak selalu berada di tengah antara h_l dan h_u namun dengan pemberian bobot
  - cara perbaikan adalah dengan memanfaatkan metode grafis, yaitu dengan menarik garis lurus antara h_l dan h_u
  - h_l adalah titik potong garis lurus tsb dengan sumbu H

$$\frac{f(h_l)}{h_r - h_l} = \frac{f(h_u)}{h_r - h_u}$$

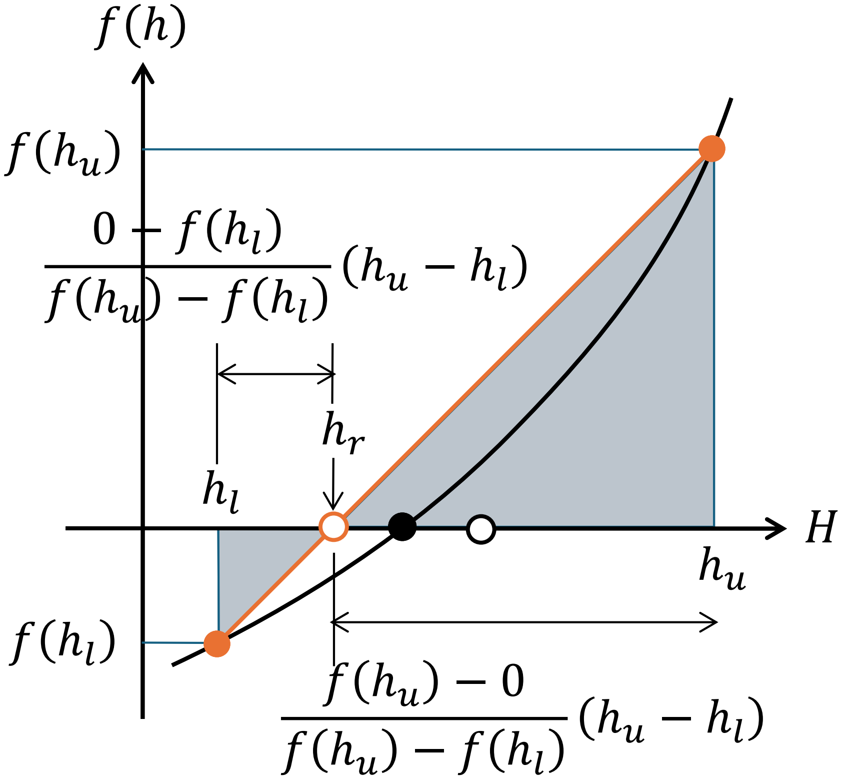


$$h_r = h_u - \frac{h_l - h_u}{f(h_l) - f(h_u)} f(h_u)$$

Metode *Bisection*

$$h_r = h_l - \frac{f(h_l)}{f(h_u) - f(h_l)}(h_u - h_l)$$

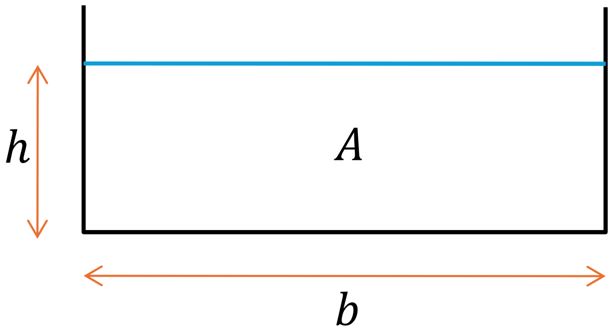
$$h_r = h_u - \frac{f(h_u)}{f(h_u) - f(h_l)}(h_u - h_l)$$



Metode *Bisection*

- Metode *bisection* yang diperbaiki dengan cara ini dikenal sbg *the false-position method*

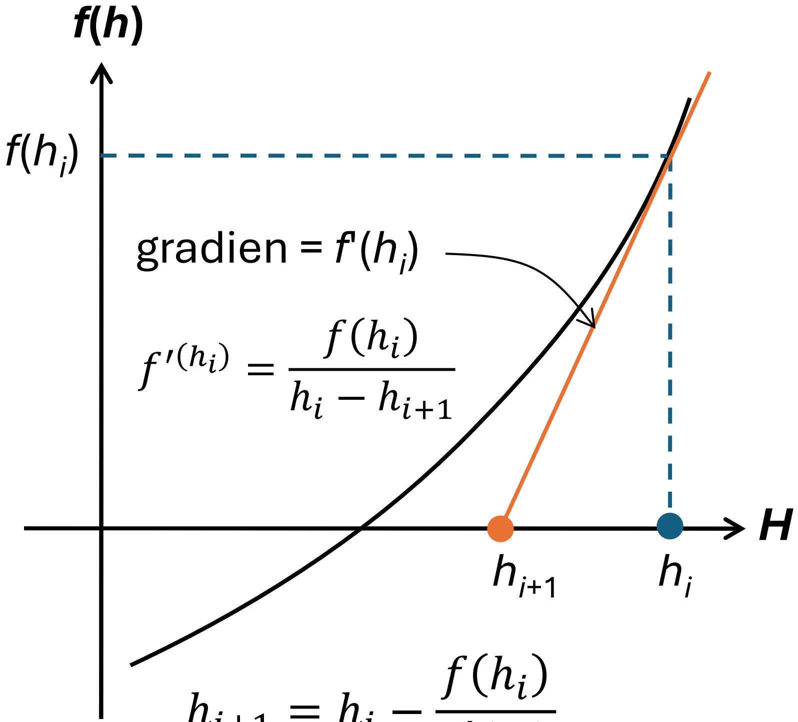
- Soal
  - Ulangi hitungan metode *bisection* dalam kasus mencari kedalaman aliran di saluran dengan memakai metode *bisection* yang diperbaiki



A	luas tampang aliran $= bh$
R_h	radius hidraulik A/P
P	keliling tampang aliran $= b + 2h$
n	koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)
S_e	kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

Metode Newton-Raphson

- Jika h_i adalah h awal, maka
  - perpanjang garis singgung pada kurva melalui titik $[h_i, f(h_i)]$
  - titik potong garis singgung tsb dengan absis merupakan nilai h_{i+1} sebagai pendekatan akar persamaan yang lebih baik daripada h_i
  - Kemungkinan ditemui $f(h)$ yang tidak dapat di-diferensial-kan



$$f'(h_i) = \frac{f(h_i)}{h_i - h_{i+1}}$$

$$h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)}$$

Metode Newton-Raphson

- Prosedur
  - Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
  - Dicari diferensial $f(h)$, yaitu $f'(h)$
  - Dicoba h_i
  - Dicari h_{i+1} dengan persamaan

    $$h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)}$$

  - Hitungan dihentikan jika perubahan h kecil atau tidak berarti
  - Hitungan mungkin divergen

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{{S_o}^{1/2}} = 0$$

$$f(h) = \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{{S_o}^{1/2}}$$

$$f'(h) = \frac{5}{3}\frac{b(bh)^{2/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{4}{3}\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{5/3}}$$

Metode Newton-Raphson

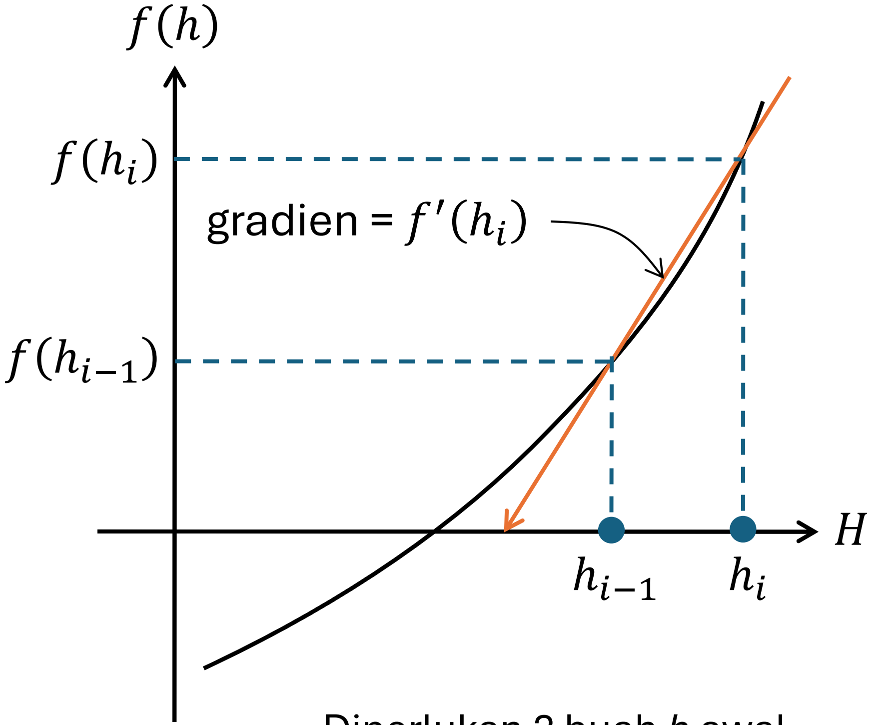
iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654	30.14372	1.950959	0.950959
1	1.950959	6.663065	43.19649	1.796709	-0.15425
2	1.796709	0.134273	41.4373	1.793468	-0.00324
3	1.793468	6.18E-05	41.39915	1.793467	-1.5E-06
4	1.793467	1.31E-11	41.39913	1.793467	-3.2E-13
5	1.793467	0	41.39913	1.793467	0

Metode Secant

- Kelemahan Metode Newton-Raphson
  - Kemungkinan $f'(h)$ tidak ada atau sulit diperoleh
- Metode secant
  - Gradien, $f'(h)$, dihitung dengan pendekatan, yaitu kemiringan garis yang menghubungkan dua titik

$$f'(h_i) = \frac{f(h_{i-1}) - f(h_i)}{h_{i-1} - h_i}$$

$$\Rightarrow \quad h_{i+1} = h_i - \frac{h_{i-1} - h_i}{f(h_{i-1}) - f(h_i)} f(h_i)$$



Diperlukan 2 buah *h* awal

Metode Secant

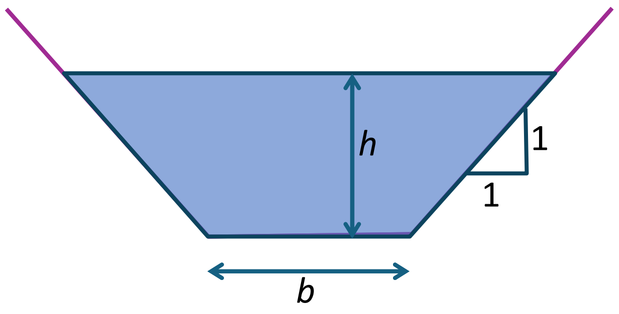
- Nilai awal

  $h_0 = 1$ m dan $h_1 = 2$ m

iterasi, *i*	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654			
1	2	8.794679	37.46011	1.765226	-0.23477
2	1.765226	-1.16445	42.41998	1.792676	0.027451
3	1.792676	-0.03274	41.22745	1.79347	0.000794
4	1.79347	0.000133	41.39449	1.793467	-3.2E-06
5	1.793467	-1.5E-08	41.39915	1.793467	3.61E-10

Akar Persamaan

- Soal 1
  - Temukan kedalaman aliran di saluran trapesium yang memiliki kemiringan talud 1:1, lebar dasar saluran $b = 20\ \mathrm{m}$, kemiringan memanjang 0.001, koefisien kekasaran $n = 0.025$, dan debit aliran $Q = 50$ m³/s.



Akar Persamaan

- Soal 2
  - Temukan lokasi sumur pengambilan jika diketahui terjadi penurunan muka air di dua sumur, yaitu di z_1 = 2.0 m dan z_2 = 1.8 m, permeabilitas tanah, $p = 0.0005$ m/s
  - dari data hasil pencatatan lain, diketahui: tebal akuifer Y = 20 m, debit pemompaan di sumur lain Q = 22.3 ℓ/s, jarak antara 2 sumur yg diukur L = 10 m. Sumur yang dipompa sebaris dengan sumur yang diukur.
  - Persamaan

$$Q = \frac{\pi p\left({d_2}^2 - {d_1}^2\right)}{\ln(r_2/r_1)}$$

$d_i = Y - z_i$

r jarak ke sumur yang dipompa

Sekian