



UNIVERSITAS GADJAH MADA
FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN

AKAR PERSAMAAN

Roots of Equations

Akar Persamaan

□ Acuan

- Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 4 dan 5, hlm. 117-170.

Persamaan Aljabar vs Transendental

- Persamaan aljabar (*algebraic equations*)
 - fungsi $y = f(x)$ dinamakan fungsi aljabar apabila fungsi tsb dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \dots + f_1 y^1 + f_0 = 0$$

- f_i adalah polinomial orde i dalam x
- polinomial merupakan fungsi aljabar yang umumnya dituliskan sbb.

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$

- koefisien a_i adalah konstanta

Persamaan Aljabar vs Transendental

- Contoh persamaan aljabar

$$f(x) = 1 - 2.37x + 7.5x^2$$

$$f(x) = 5x^2 - x^3 + 7x^6$$

- Fungsi transendental adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \ln x^2 - 1$$

Akar Persamaan

5

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

□ Contoh

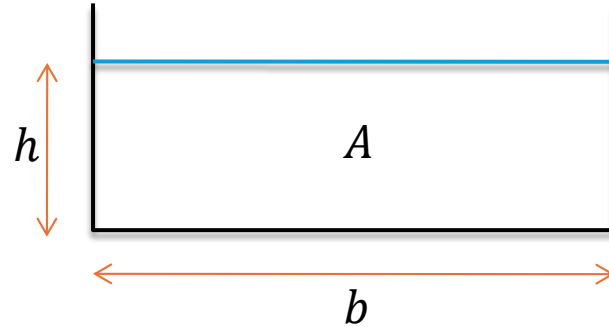
- Ingin diketahui kedalaman aliran, h , di saluran bertampang persegi panjang untuk debit aliran Q
- Persamaan

$$Q = AV$$

$$A = bh$$

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_e^{1/2}$$

$$Q = bh \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_e^{1/2}$$



A luas tampang aliran = bh

R_h radius hidraulik A/P

P keliling tampang aliran = $b + 2h$

n koefisien kekasaran saluran
(koefisien Manning)

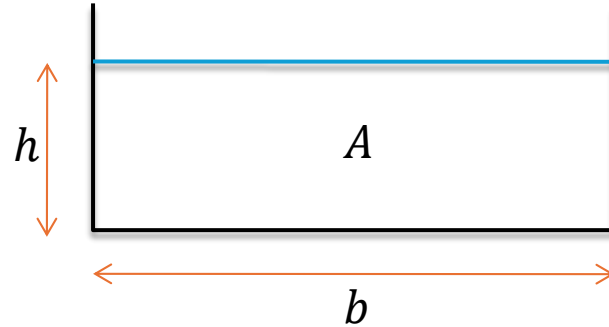
S_e kemiringan energi, didekati dengan
kemiringan saluran

Akar Persamaan

6

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Penyelesaian
 - variabel yang sudah diketahui diubah menjadi konstanta (Q, n, S_e)
 - A, P , dan R_h dituliskan sebagai fungsi h dan konstanta
 - sehingga persamaan dalam h saja



A luas tampang aliran = bh

R_h radius hidraulik A/P

P keliling tampang aliran = $b + 2h$

n koefisien kekasaran saluran
(koefisien Manning)

S_e kemiringan energi, didekati dengan
kemiringan saluran

Akar Persamaan

□ Prosedur

- Suku-suku persamaan dikelompokkan sehingga sedapat mungkin konstanta dipisahkan dari variabel
- Jika $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$, $b = 20 \text{ m}$, $n = 0.03$, dan $S_e = S_f \cong S_o = 0.001$
- Persamaan diselesaikan untuk mendapatkan kedalaman aliran h
- Bagaimanakah caranya?

$$Q = AV$$

$$Q = bh \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_e^{1/2}$$

$$Q = bh \frac{1}{n} \left(\frac{bh}{b + 2h} \right)^{2/3} S_e^{1/2}$$

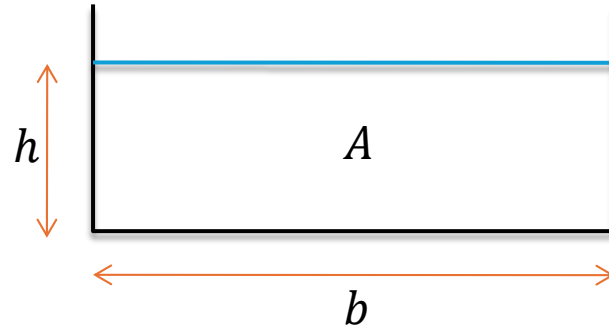
$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

Akar Persamaan

8

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Metode “coba-dan-ralat” (*trial and error*)
 - ❑ Mencoba suatu nilai $h = h_1$
 - ❑ Mengontrol bahwa nilai h tersebut memenuhi persamaan
 - ❑ Jika tidak memenuhi, maka dicoba nilai lain $h = h_2$
 - ❑ Dst.
- ❑ Cara ini sangat sederhana dan tidak efisien
- ❑ Perlu cara yang lebih sistematis

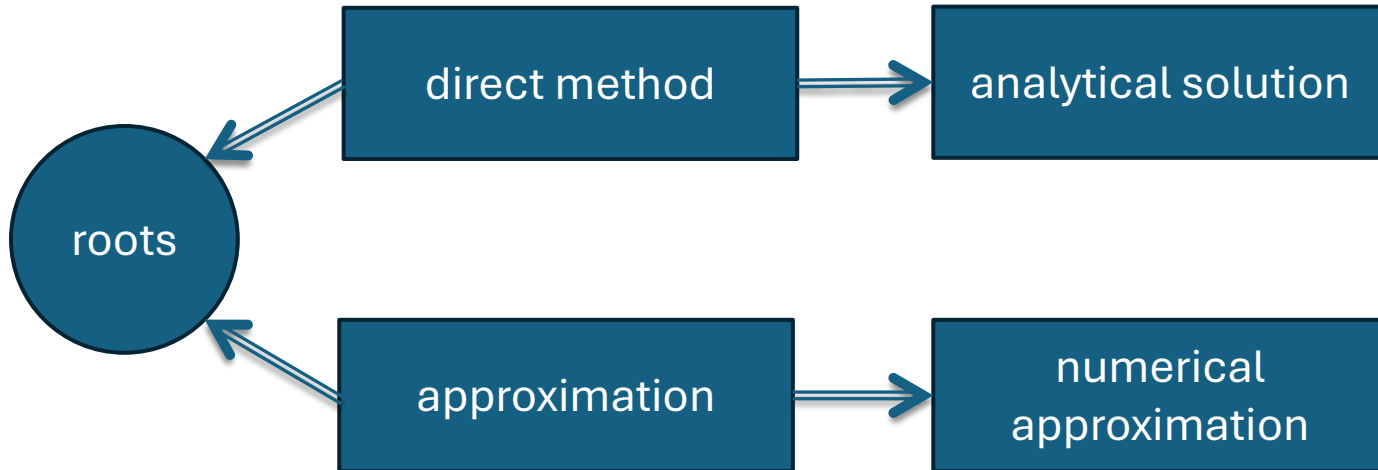


$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

Akar Persamaan

9

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Methods to solve for roots of equations

Bracketing methods

- Metode grafis
- Metode bisection
- Metode interpolasi (*the false-position method*)

Open methods

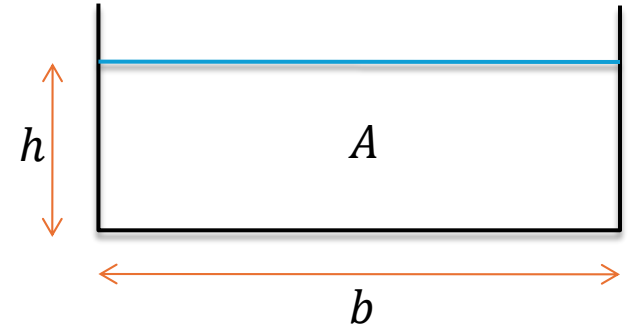
- Simple fixed-point iteration
- The Newton-Raphson method
- The secant method
- Multiple roots

Metode Pendekatan Berurutan

11

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Prosedur
 - Bentuk persamaan diubah menjadi $h = f(h)$
 - Dicoba nilai h awal untuk dimasukkan ke dalam fungsi tsb.
 - Nilai h yang diperoleh dimasukkan ke dalam fungsi lagi
 - Langkah kedua dan ketiga diulang-ulang sampai perubahan h kecil



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

$$(bh)^{5/3} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}} (b + 2h)^{2/3}$$

$$h = \frac{1}{b} \left[\frac{Qn}{S_e^{1/2}} (b + 2h)^{2/3} \right]^{3/5}$$

Metode Pendekatan Berurutan

$$h = \frac{1}{b} \left[\frac{Qn}{S_o^{1/2}} (b + 2h)^{2/3} \right]^{3/5}$$

- Iterasi dilakukan dengan nilai awal $h_o = 2$ m
- Metode ini belum tentu berhasil menemukan akar persamaan

iterasi, i	h_i (m)	h_{i+1} (m)	Δh (m)
0	2	1.805965	-0.19404
1	1.805965	1.794227	-0.01174
2	1.794227	1.793513	-0.00071
3	1.793513	1.79347	-4.3E-05
4	1.79347	1.793467	-2.6E-06
5	1.793467	1.793467	-1.6E-07

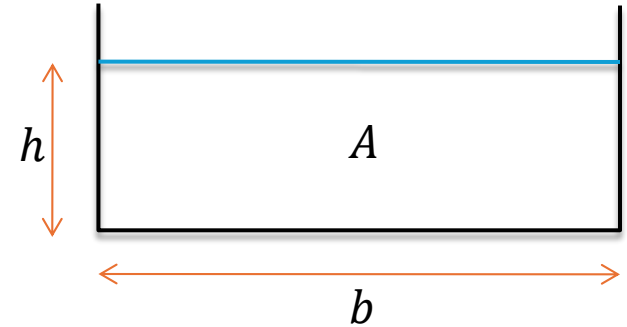
Metode *Bisection*

13

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

□ Prosedur

- Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
- Dicoba dua h awal (h_0 dan h_1) yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda (+ dan -)
- Diambil h_2 di tengah-tengah kedua h tsb.
- Dicari $f(h_2) = 0$
- Jika kesalahan masih besar, ulangi langkah di atas untuk h_2 dan salah satu dari h sebelumnya yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda
- Hentikan hitungan jika perubahan h sudah kecil



$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} = \frac{Qn}{S_e^{1/2}}$$

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_e^{1/2}} = 0$$

Metode *Bisection*

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_e^{1/2}} = 0$$

$$f(h) = 0$$

- Nilai awal

$h_0 = 1$ m dan $h_1 = 2$ m

- h_{i-1} dan h_i dalam $(h_{i-1} + h_i)/2$ dipilih dari $f(h_{i-1})$ dan $f(h_i)$ yang berbeda tanda (positif dan negatif)

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$(h_{i-1} + h_i)/2$	Δh
0	1	-28.6654		
1	2	8.794679	1.5	-0.5
2	1.5	-11.6204	1.75	0.25
3	1.75	-1.78829	1.875	0.125
4	1.875	3.414127	1.8125	-0.0625
5	1.8125	0.790084	1.78125	-0.03125
6	1.78125	-0.50489	1.796875	0.015625
7	1.796875	0.141163	1.789063	-0.00781
8	1.789063	-0.18222	1.792969	0.003906
9	1.792969	-0.02062	1.794922	0.001953
10	1.794922	0.060249	1.793945	-0.00098
11	1.793945	0.019809	1.793457	-0.00049
12	1.793457	-0.00041	1.793701	0.000244

Metode *Bisection*

- ❑ Tabel hitungan di layar tadi ringkas, namun tidak mudah untuk dibaca
- ❑ Tabel hitungan berikut panjang, namun mudah dibaca
- ❑ Prosedur
 1. Tetapkan h_l dan h_u ($h_l < h_u$ dan $f(h_l)f(h_u) < 0$)
 2. Hitung $h_r = \frac{1}{2}(h_l + h_u)$
 3. Pada langkah selanjutnya, perbaiki h_l dan h_u
 - a. Jika $f(h_l)f(h_r) < 0$, maka h_l tetap dan $h_u = h_r$, kemudian kembali ke langkah 2
 - b. Jika $f(h_l)f(h_r) > 0$, maka $h_l = h_r$ dan h_u tetap, kemudian kembali ke langkah 2
 - c. Jika $f(h_l)f(h_r) = 0$, maka h_r adalah akar persamaan

Metode *Bisection*

16

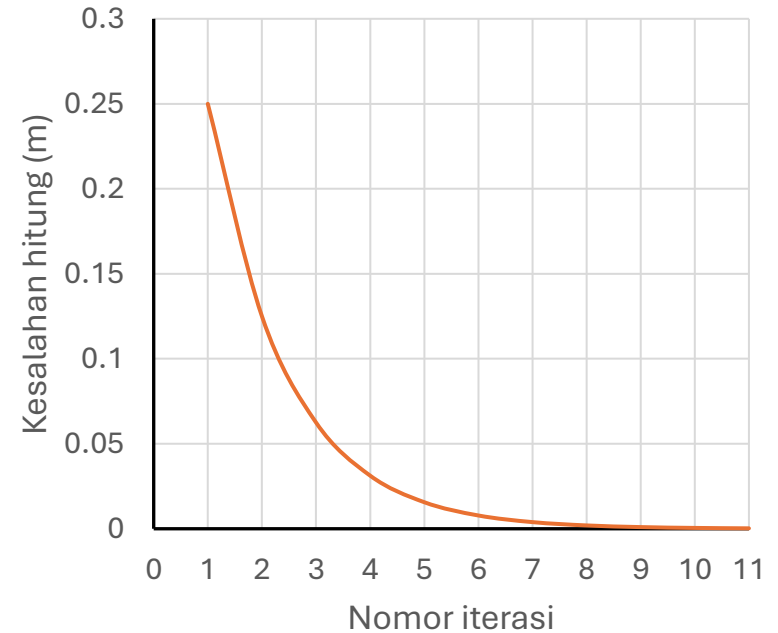
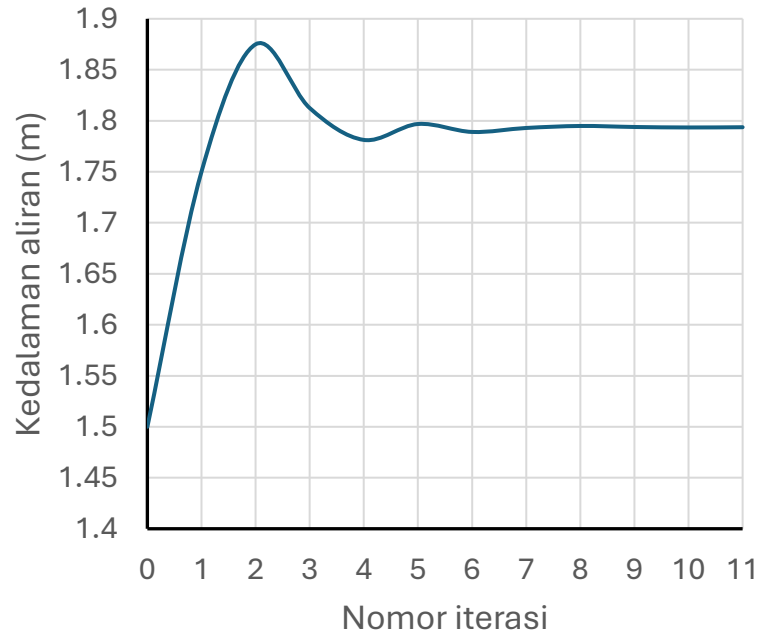
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	h_l	$f(h_l)$	h_u	$f(h_u)$	h_r	$f(h_r)$	$f(h_l)f(h_r)$	Δh_r
0	1	-28.6654	2	8.794679	1.5	-11.6204	333.1033	
1	1.5	-11.6204	2	8.794679	1.75	-1.78829	20.78066	0.25
2	1.75	-1.78829	2	8.794679	1.875	3.414127	-6.10546	0.125
3	1.75	-1.78829	1.875	3.414127	1.8125	0.790084	-1.4129	0.0625
4	1.75	-1.78829	1.8125	0.790084	1.78125	-0.50489	0.902885	0.03125
5	1.78125	-0.50489	1.8125	0.790084	1.796875	0.141163	-0.07127	0.015625
6	1.78125	-0.50489	1.796875	0.141163	1.789063	-0.18222	0.092001	0.007813
7	1.789063	-0.18222	1.796875	0.141163	1.792969	-0.02062	0.003757	0.003906
8	1.792969	-0.02062	1.796875	0.141163	1.794922	0.060249	-0.00124	0.001953
9	1.792969	-0.02062	1.794922	0.060249	1.793945	0.019809	-0.00041	0.000977
10	1.792969	-0.02062	1.793945	0.019809	1.793457	-0.00041	8.38E-06	0.000488
11	1.793457	-0.00041	1.793945	0.019809	1.793701	0.009701	-3.9E-06	0.000244

Metode *Bisection*

17

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



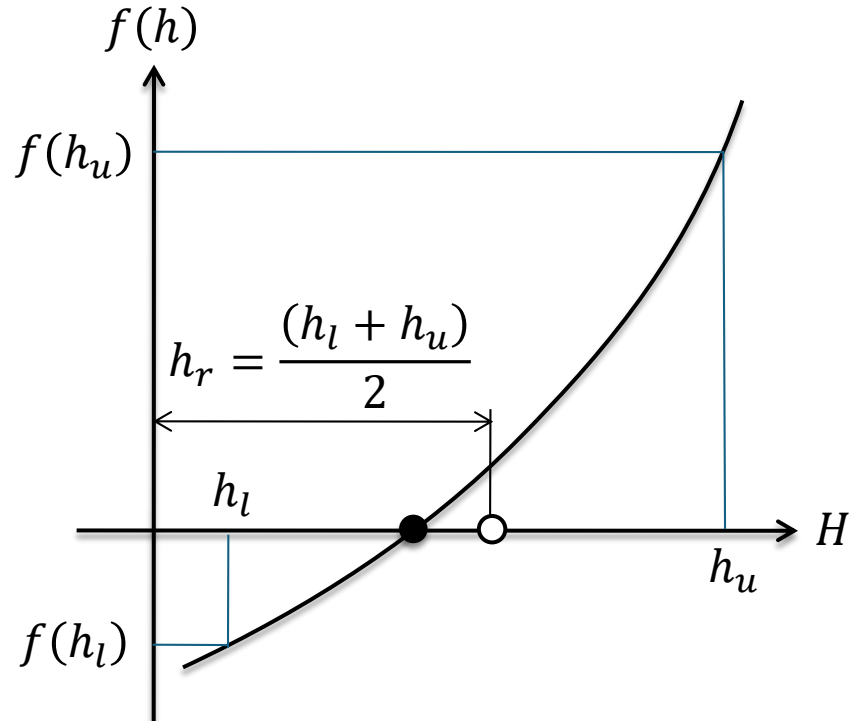
Metode *Bisection*

18

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Kelemahan

- misal h_l dan h_u masing-masing adalah nilai h yang berurutan sedemikian hingga $f(h_l)f(h_u) < 0$ dan $|h_l| < |h_u|$
- dalam memilih h baru (h_r) yang merupakan jumlah separuh h_l dan h_u , nilai $f(h_l)$ maupun $f(h_u)$ tidak dipertimbangkan
- jika $f(h_l)$ lebih dekat ke nol daripada $f(h_u)$, maka akar persamaan mestinya lebih dekat ke h_l daripada ke h_u



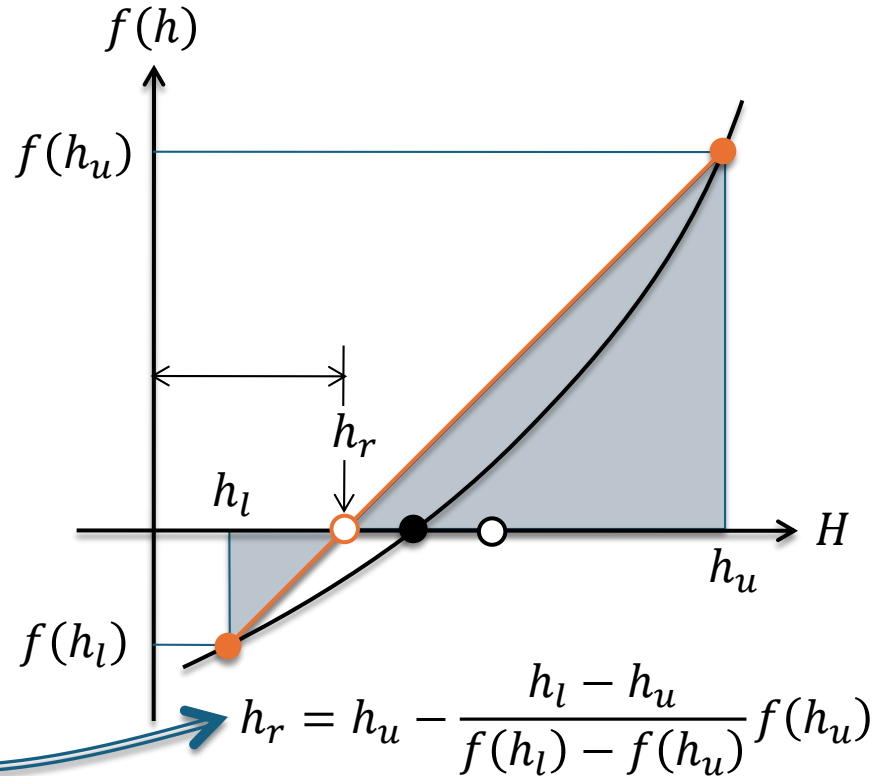
Metode *Bisection*

19

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Metode *bisection* dapat diperbaiki
 - pemilihan h_l di suatu langkah iterasi tidak selalu berada di tengah antara h_l dan h_u namun dengan pemberian bobot
 - cara perbaikan adalah dengan memanfaatkan metode grafis, yaitu dengan menarik garis lurus antara h_l dan h_u
 - h_l adalah titik potong garis lurus tsb dengan sumbu H

$$\frac{f(h_l)}{h_r - h_l} = \frac{f(h_u)}{h_r - h_u}$$

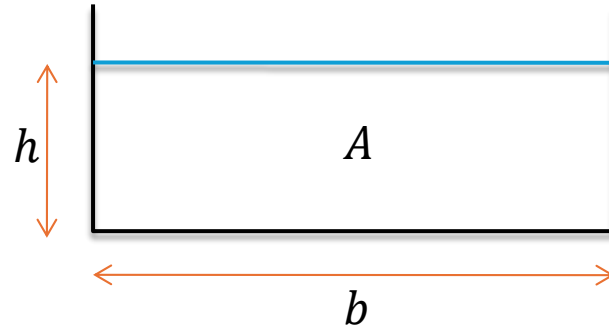


Metode *Bisection*

21

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Metode *bisection* yang diperbaiki dengan cara ini dikenal sbg metode interpolasi (*the false-position method*)
- Soal
 - Ulangi hitungan metode *bisection* dalam kasus mencari kedalaman aliran di saluran dengan memakai metode *bisection* yang diperbaiki



- A luas tampang aliran = bh
- R_h radius hidraulik A/P
- P keliling tampang aliran = $b + 2h$
- n koefisien kekasaran saluran (koefisien Manning)
- S_e kemiringan energi, didekati dengan kemiringan saluran

Metode Interpolasi (*The False-Position Method*)

22

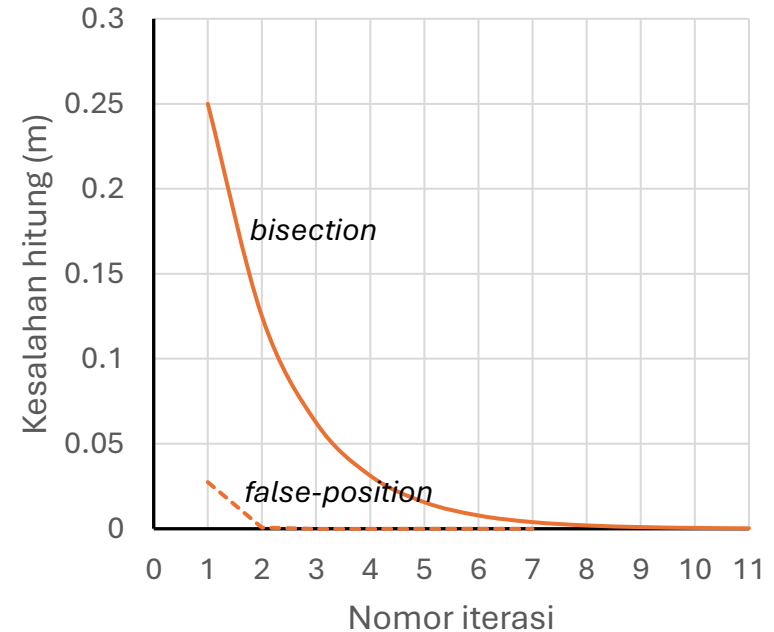
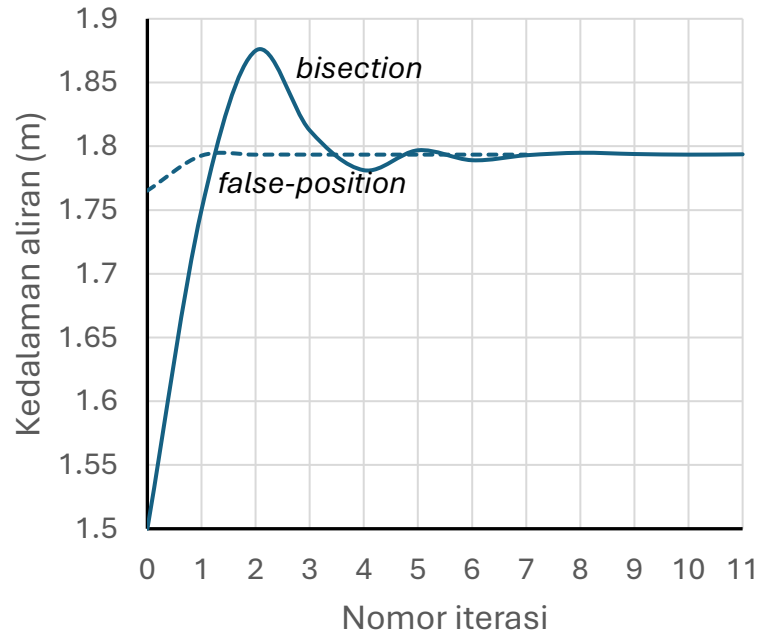
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	h_l	$f(h_l)$	h_u	$f(h_u)$	h_r	$f(h_r)$	$f(h_l)f(h_r)$	Δh_r
0	1	-28.6654	2	8.794679	1.765226	-1.16445	33.37949	
1	1.765226	-1.16445	2	8.794679	1.792676	-0.03274	0.038119	0.027451
2	1.792676	-0.03274	2	8.794679	1.793445	-0.00091	2.98E-05	0.000769
3	1.793445	-0.00091	2	8.794679	1.793466	-2.5E-05	2.3E-08	2.14E-05
4	1.793466	-2.5E-05	2	8.794679	1.793467	-7E-07	1.78E-11	5.94E-07
5	1.793467	-7E-07	2	8.794679	1.793467	-2E-08	1.37E-14	1.65E-08
6	1.793467	-2E-08	2	8.794679	1.793467	-5.4E-10	1.06E-17	4.59E-10
7	1.793467	-5.4E-10	2	8.794679	1.793467	-1.5E-11	8.18E-21	1.27E-11

Metode *Bisection* vs *False-position*

23

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

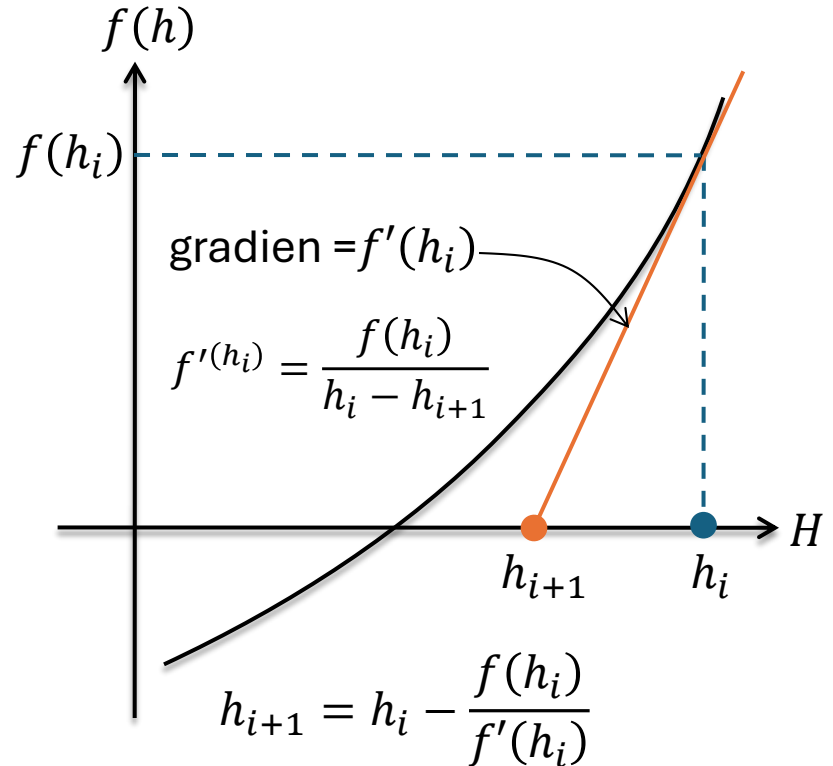


Metode Newton-Raphson

24

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Jika h_i adalah h awal, maka
 - perpanjang garis singgung pada kurva melalui titik $[h_i, f(h_i)]$
 - titik potong garis singgung tsb dengan absis merupakan nilai h_{i+1} sebagai pendekatan akar persamaan yang lebih baik daripada h_i
 - Kemungkinan ditemui $f(h)$ yang tidak dapat di-diferensial-kan



Metode Newton-Raphson

□ Prosedur

- Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
- Dicari diferensial $f(h)$, yaitu $f'(h)$
- Dicoba h_i
- Dicari h_{i+1} dengan persamaan

$$h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)}$$

- Hitungan dihentikan jika perubahan h kecil atau tidak berarti
- Hitungan mungkin divergen

$$\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_o^{1/2}} = 0$$

$$f(h) = \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_o^{1/2}}$$

$$f'(h) = \frac{5}{3} \frac{b(bh)^{2/3}}{(b+2h)^{2/3}} - \frac{4}{3} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{5/3}}$$

Metode Newton-Raphson

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654	30.14372	1.950959	0.950959
1	1.950959	6.663065	43.19649	1.796709	-0.15425
2	1.796709	0.134273	41.4373	1.793468	-0.00324
3	1.793468	6.18E-05	41.39915	1.793467	-1.5E-06
4	1.793467	1.31E-11	41.39913	1.793467	-3.2E-13
5	1.793467	0	41.39913	1.793467	0

Metode Secant

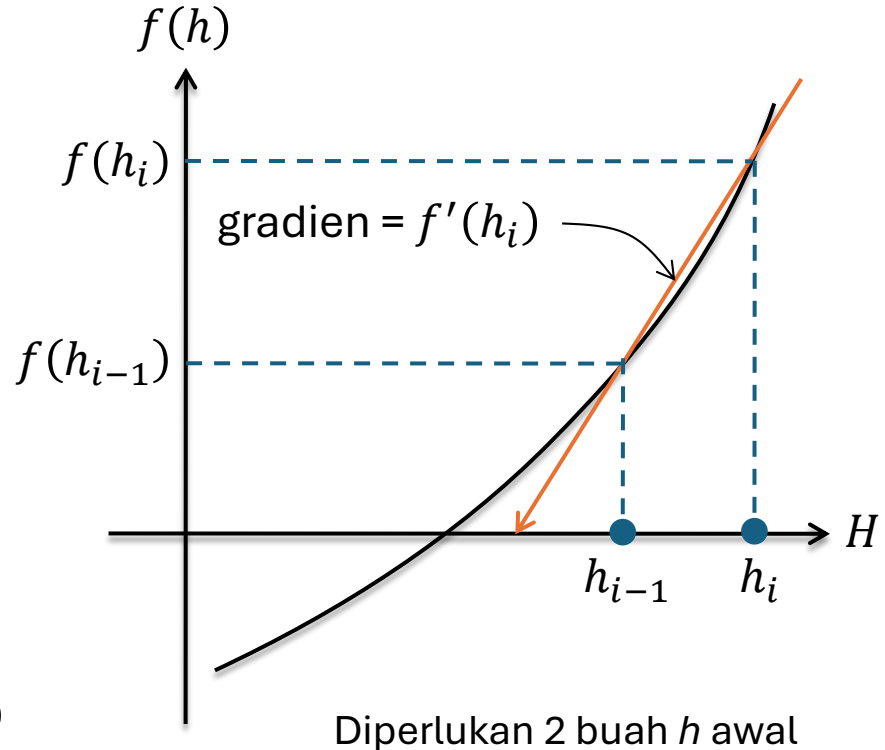
27

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Kelemahan Metode Newton-Raphson
 - Kemungkinan $f'(h)$ tidak ada atau sulit diperoleh
- Metode secant
 - Gradien, $f'(h)$, dihitung dengan pendekatan, yaitu kemiringan garis yang menghubungkan dua titik

$$f'(h_i) = \frac{f(h_{i-1}) - f(h_i)}{h_{i-1} - h_i}$$

$$\square \quad h_{i+1} = h_i - \frac{h_{i-1} - h_i}{f(h_{i-1}) - f(h_i)} f(h_i)$$



Metode Secant

- Nilai awal

$$h_0 = 1 \text{ m dan } h_1 = 2 \text{ m}$$

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654			
1	2	8.794679	37.46011	1.765226	-0.23477
2	1.765226	-1.16445	42.41998	1.792676	0.027451
3	1.792676	-0.03274	41.22745	1.79347	0.000794
4	1.79347	0.000133	41.39449	1.793467	-3.2E-06
5	1.793467	-1.5E-08	41.39915	1.793467	3.61E-10

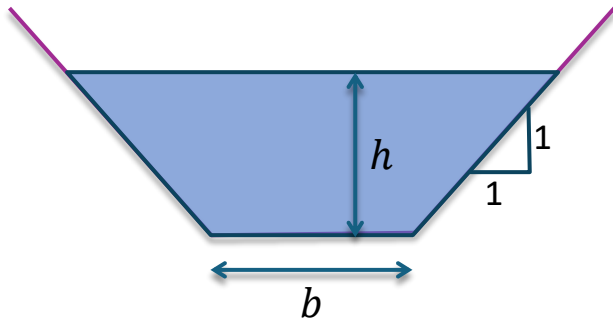
Akar Persamaan

29

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Soal 1

- Temukan kedalaman aliran di saluran trapesium yang memiliki kemiringan talud 1:1, lebar dasar saluran $b = 20$ m, kemiringan memanjang 0.001, koefisien kekasaran $n = 0.025$, dan debit aliran $Q = 50$ m³/s.



Akar Persamaan

Soal 2

- Temukan lokasi sumur pengambilan jika diketahui terjadi penurunan muka air di dua sumur, yaitu di $z_1 = 2.0$ m dan $z_2 = 1.8$ m, permeabilitas tanah, $p = 0.0005$ m/s
- dari data hasil pencatatan lain, diketahui: tebal akuifer $Y = 20$ m, debit pemompaan di sumur lain $Q = 22.3$ ℓ/s , jarak antara 2 sumur yg diukur $L = 10$ m. Sumur yang dipompa sebaris dengan sumur yang diukur.
- Persamaan

$$Q = \frac{\pi p (d_2^2 - d_1^2)}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$d_i = Y - z_i$$

r jarak ke sumur yang dipompa

Sekian