



UNIVERSITAS GADJAH MADA
FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN

REGRESI DAN INTERPOLASI

Curve Fitting

Curve Fitting

2

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

□ Acuan

- Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 11 dan 12, pp. 319-398.

Curve Fitting

- Mencari garis/kurva yang mewakili serangkaian titik data
- Ada dua cara untuk melakukannya, yaitu
 - ▣ Regresi
 - ▣ Interpolasi
- Aplikasi di bidang enjiniring
 - ▣ Pola perilaku data (*trend analysis*)
 - ▣ Uji hipotesis (*hypothesis testing*)

Curve Fitting

- Pemakaian regresi
 - ▣ Apabila data menunjukkan tingkat kesalahan yang cukup signifikan atau menunjukkan adanya noise
 - ▣ Untuk mencari satu kurva tunggal yang mewakili pola umum perilaku data
 - ▣ Kurva regresi tidak perlu melewati setiap titik data

Curve Fitting

□ Interpolasi

- ▣ Diketahui bahwa data sangat akurat
- ▣ Untuk mencari satu atau serangkaian kurva yang melewati setiap titik data
- ▣ Untuk memperkirakan nilai-nilai di antara titik-titik data

□ Ekstrapolasi

- ▣ Mirip dengan interpolasi, tetapi untuk memperkirakan nilai-nilai di luar kisaran titik-titik data

Curve Fitting terhadap Data Pengukuran

- Analisis pola perilaku data
 - ▣ Pemanfaatan pola data (pengukuran, eksperimen) untuk melakukan perkiraan
 - ▣ Apabila data persis (akurat): interpolasi
 - ▣ Apabila data tak persis (tak akurat): regresi
- Uji hipotesis
 - ▣ Perbandingan antara hasil teori atau hasil hitungan dengan hasil pengukuran

Beberapa Parameter Statistik

7

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

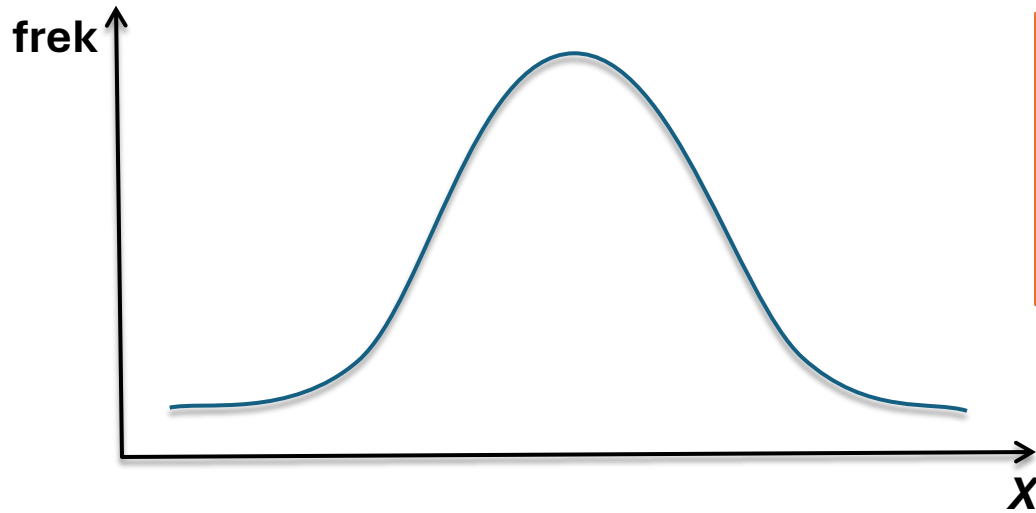
merepresentasikan sebaran data

- Rerata aritmatik, *mean* $\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$
- Deviasi standar, simpangan baku, *standard deviation* $\Rightarrow s_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} \quad S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2$
- Varian ('ragam'), *variance* $\Rightarrow s_y^2 = \frac{S_t}{n-1}$
- *Coefficient of variation* $\Rightarrow c. v. = \frac{s_y}{\bar{y}} 100\%$

Distribusi Probabilitas

8

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Distribusi Normal
salah satu distribusi/sebaran
data yang sering dijumpai
adalah distribusi normal

Regresi

Regresi linear

Regresi linear ganda

Regresi non-linear

Regresi polinomial

Regresi: Metode Kuadrat Terkecil

- Mencari satu kurva atau satu fungsi (pendekatan) yang sesuai dengan pola umum yang ditunjukkan oleh data
 - ▣ Datanya menunjukkan kesalahan yang cukup signifikan
 - ▣ Kurva tidak perlu memotong setiap titik data
- Regresi linear
- Regresi persamaan-persamaan tak-linear yang dilinearkan
- Regresi tak-linear

Regresi: Metode Kuadrat Terkecil

11

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Bagaimana caranya?
 - ▣ Program komputer
 - ▣ *Spreadsheet* (Microsoft Excel)

Regresi Linear

12

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Mencari suatu kurva lurus yang cocok menggambarkan pola serangkaian titik data: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

$$y_{reg} = a_0 + a_1x$$

a_0 *intercept*

a_1 *slope*

- Microsoft Excel
 - ▣ INTERCEPT($y_1:y_n;x_1:x_n$)
 - ▣ SLOPE($y_1:y_n;x_1:x_n$)

Regresi Linear

- Kesalahan atau residu (e) adalah perbedaan antara nilai y sesungguhnya (data y) dan y nilai pendekatan (y_{reg}) menurut persamaan linear $a_0 + a_1x$.

$$e = y - (a_0 + a_1x) = y - a_0 - a_1x$$

- Minimumkan jumlah kuadrat residu tersebut

$$\min[S_r] = \min \left[\sum e_i^2 \right] = \min \left[\sum (y_i - a_0 - a_1x_i)^2 \right]$$

Regresi Linear

- Bagaimana cara mencari koefisien a_0 dan a_1 ?
 - ▣ Diferensialkan persamaan tersebut dua kali, masing-masing terhadap a_0 dan a_1 .
 - ▣ Samakan kedua persamaan hasil diferensiasi tersebut dengan nol.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0$$

Regresi Linear

- Selesaikan persamaan yang diperoleh untuk mendapatkan a_0 dan a_1

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

- dalam hal ini, \bar{y} dan \bar{x} masing-masing adalah nilai y rerata dan x rerata

Contoh Regresi Linear

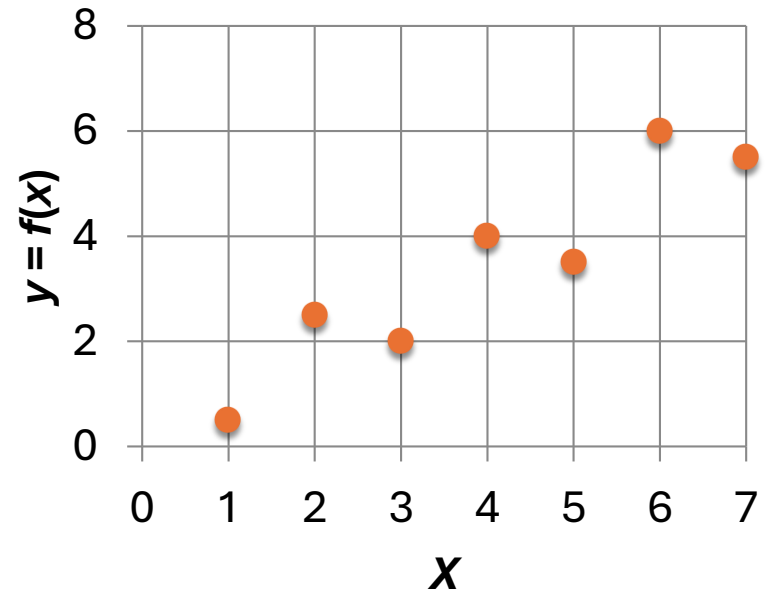
16

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Tabel data

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0.5
1	2	2.5
2	3	2
3	4	4
4	5	3.5
5	6	6
6	7	5.5

Grafik/kurva data



Hitungan regresi linear

17

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_{reg}	$(y_i - y_{reg})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0	1	0.5	0.5	1	0.910714	0.168686	8.576531
1	2	2.5	5	4	1.75	0.5625	0.862245
2	3	2.0	6	9	2.589286	0.347258	2.040816
3	4	4.0	16	16	3.428571	0.326531	0.326531
4	5	3.5	17.5	25	4.267857	0.589605	0.005102
5	6	6.0	36	36	5.107143	0.797194	6.612245
6	7	5.5	38.5	49	5.946429	0.199298	4.290816
$\Sigma =$	28	24.0	119.5	140	$\Sigma =$	2.991071	22.71429

Hitungan regresi linear

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{7 \times 119.5 - 28 \times 24}{7 \times 140 - 28^2} = 0.839286$$

$$\bar{y} = \frac{24}{7} = 3.4$$

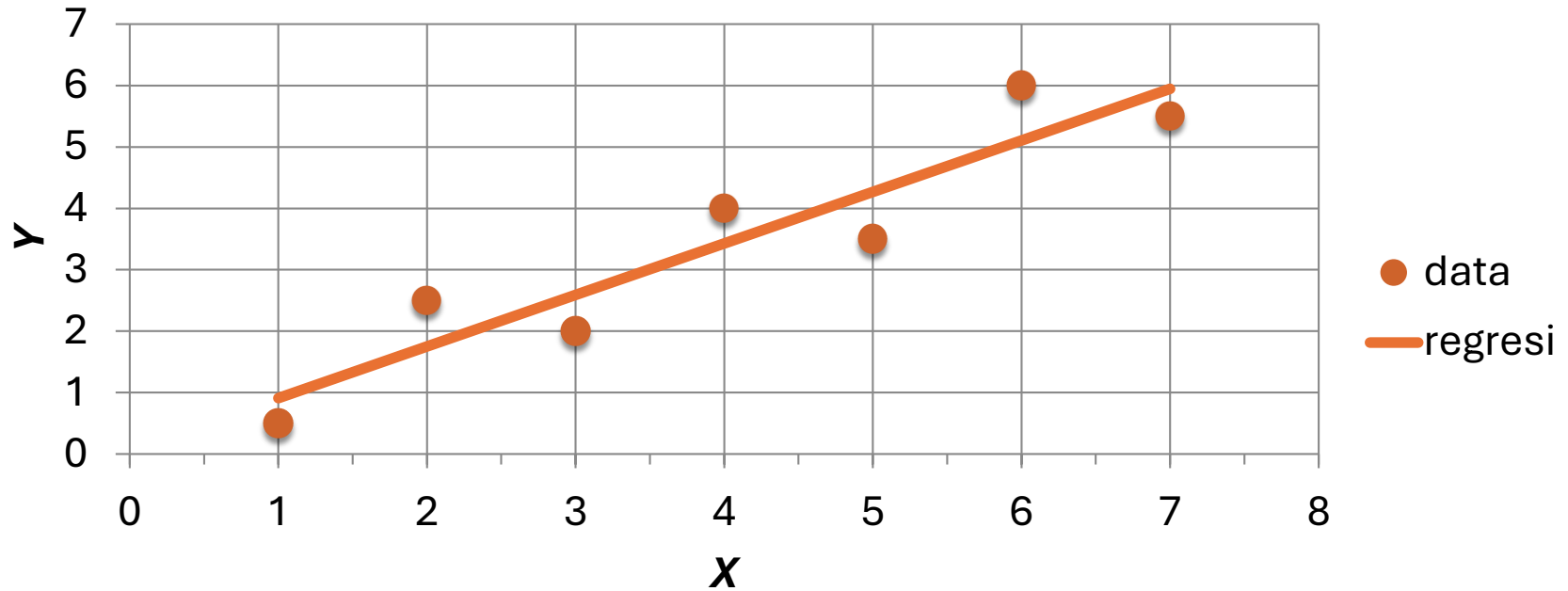
$$\bar{x} = \frac{28}{7} = 4$$

$$a_0 = 3.4 - 0.839286 \times 4 = 0.071429$$

Hitungan regresi linear

19

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Regresi Linear

- Kuantifikasi kesalahan
 - ▣ Kesalahan standar

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \quad S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

- ▣ Perhatikan kemiripannya dengan simpangan baku

$$s_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} \quad S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

Regresi Linear

- Beda antara kedua kesalahan tersebut menunjukkan perbaikan atau pengurangan kesalahan

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$



koefisien determinasi
(*coefficient of determination*)

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$



koefisien korelasi
(*correlation coefficient*)

Hitungan regresi linear

$$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = 2.991071$$

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 22.71429$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{22.71429 - 2.991071}{22.71429}$$

$$r = 0.931836$$

Regresi Linear Ganda

- Misal variabel y adalah fungsi linear dua variabel bebas x_1 dan x_2

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

- ▣ Koefisien a_0, a_1, a_2 dalam persamaan di atas dapat ditemukan dengan metode kuadrat terkecil kesalahan

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2$$

Regresi Linear Ganda

- Diferensial-parsialkan persamaan tersebut terhadap masing-masing koefisien

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{1i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_{2i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})$$

- Samakan persamaan diferensial tsb dengan nol dan atur suku-suku dalam persamaan

$$n a_0 + \sum_{i=1}^n x_{1i} a_1 + \sum_{i=1}^n x_{2i} a_2 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{1i} a_0 + \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 a_1 + \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} a_2 = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{2i} a_0 + \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} a_1 + \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 a_2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i$$

Regresi Linear Ganda

- Persamaan-persamaan linear tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks sbb.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{2i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \end{Bmatrix}$$

Regresi Linear Ganda

▣ Matriks inversi

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{2i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \end{pmatrix}$$

Contoh

27

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Temukanlah persamaan linear yang mewakili pola sebaran data dalam tabel di samping ini.

- Jawab

$$y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

$$r^2 = 1$$

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

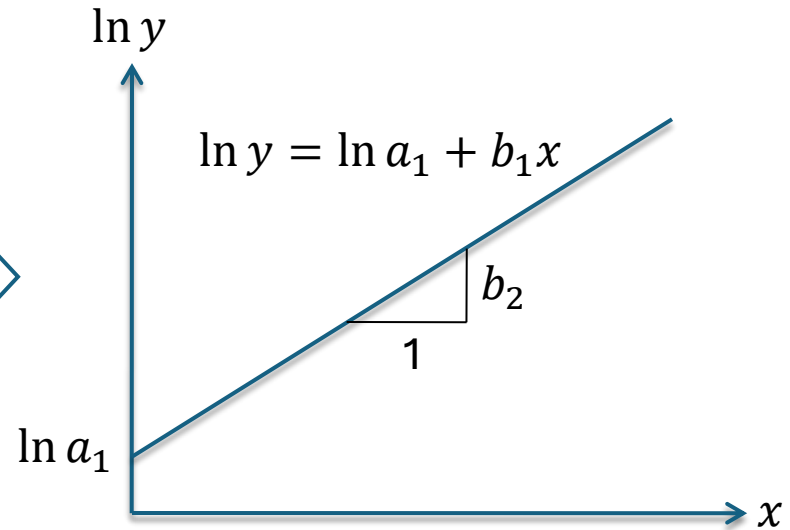
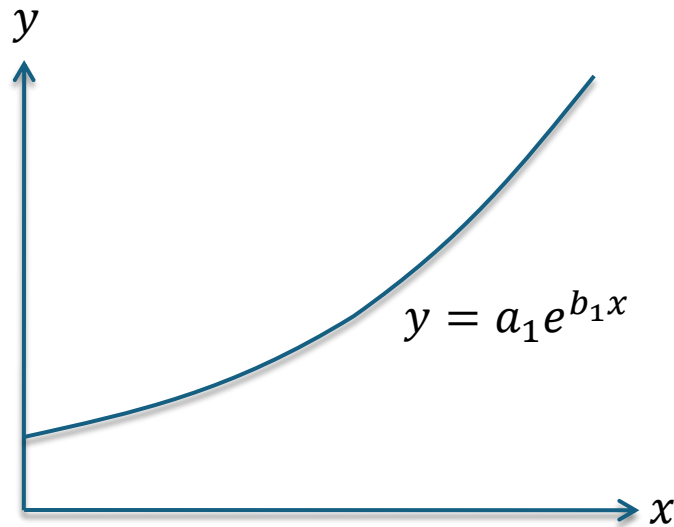
Regresi Non-linear

- Linearisasi persamaan-persamaan tak-linear
 - ▣ Logaritmik menjadi linear
 - ▣ Eksponensial menjadi linear
 - ▣ Pangkat (polinomial tingkat $n > 1$) menjadi linear (polinomial tingkat 1)
 - ▣ Dll.

Linearisasi persamaan non-linear

29

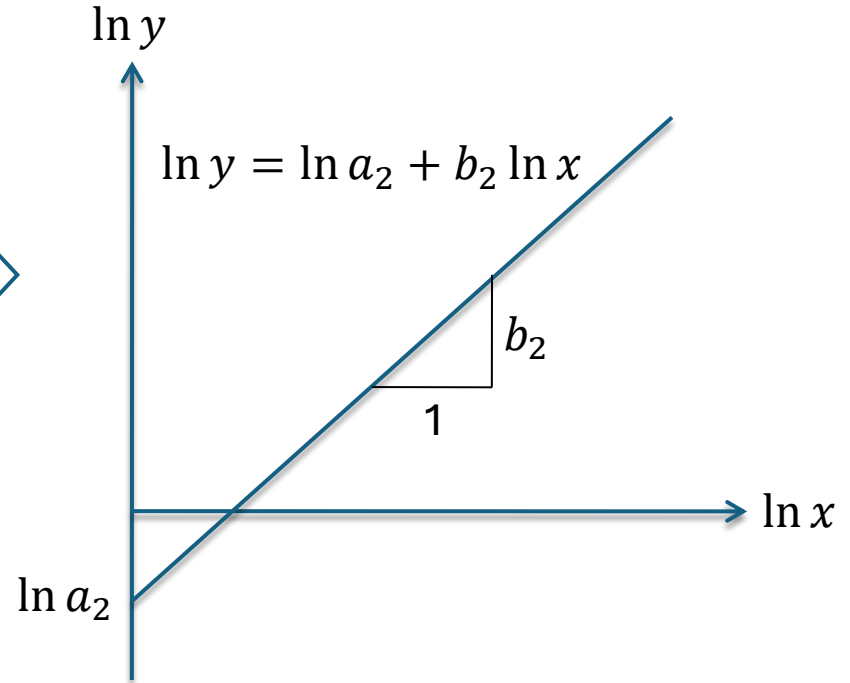
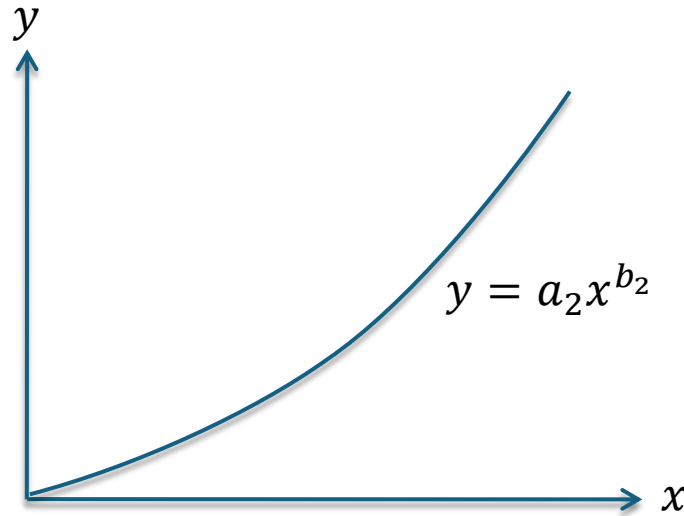
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Linearisasi persamaan non-linear

30

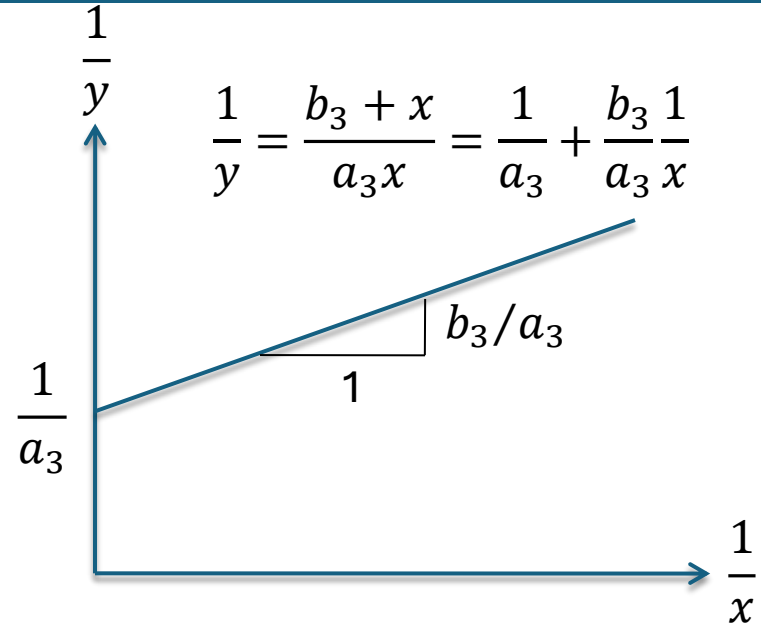
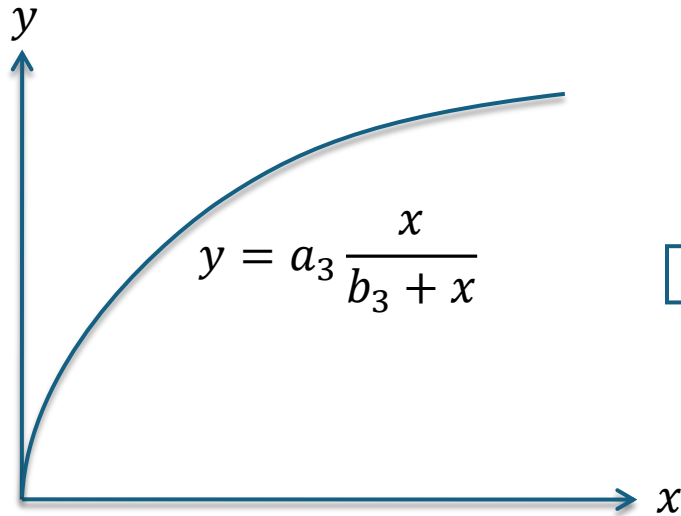
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Linearisasi persamaan non-linear

31

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Regresi Polinomial Orde 2

- Persamaan polinomial orde 2

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Persamaan regresi polinomial orde 2

$$y_{reg} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + e$$

- Error (residue)

$$e = y - (a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

Regresi Polinomial Orde 2

- Jumlah data (x_i, y_i) adalah n

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)$$

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$$

- Metode kuadrat terkecil untuk memperoleh a_0, a_1, a_2

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0 \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial S_r}{\partial a_2} = 0$$

Regresi Polinomial Orde 2

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) x_i = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) x_i^2 = 0$$

$$-2(\sum y_i - \sum a_0 - a_1 \sum x_i - a_2 \sum x_i^2) = 0$$

$$-2(\sum x_i y_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 - a_2 \sum x_i^3) = 0$$

$$-2(\sum x_i^2 y_i - a_0 \sum x_i^2 - a_1 \sum x_i^3 - a_2 \sum x_i^4) = 0$$

Regresi Polinomial Orde 2

$$-2(\Sigma y_i - \Sigma a_0 - a_1 \Sigma x_i - a_2 \Sigma x_i^2) = 0$$

$$-2(\Sigma x_i y_i - a_0 \Sigma x_i - a_1 \Sigma x_i^2 - a_2 \Sigma x_i^3) = 0$$

$$-2(\Sigma x_i^2 y_i - a_0 \Sigma x_i^2 - a_1 \Sigma x_i^3 - a_2 \Sigma x_i^4) = 0$$

$$(\Sigma y_i - \Sigma a_0 - a_1 \Sigma x_i - a_2 \Sigma x_i^2) = 0$$

$$(\Sigma x_i y_i - a_0 \Sigma x_i - a_1 \Sigma x_i^2 - a_2 \Sigma x_i^3) = 0$$

$$(\Sigma x_i^2 y_i - a_0 \Sigma x_i^2 - a_1 \Sigma x_i^3 - a_2 \Sigma x_i^4) = 0$$

Regresi Polinomial Orde 2

$$(\Sigma y_i - \Sigma a_0 - a_1 \Sigma x_i - a_2 \Sigma x_i^2) = 0$$

$$(\Sigma x_i y_i - a_0 \Sigma x_i - a_1 \Sigma x_i^2 - a_2 \Sigma x_i^3) = 0$$

$$(\Sigma x_i^2 y_i - a_0 \Sigma x_i^2 - a_1 \Sigma x_i^3 - a_2 \Sigma x_i^4) = 0$$

$$\Sigma a_0 + a_1 \Sigma x_i + a_2 \Sigma x_i^2 = \Sigma y_i$$

$$a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 + a_2 \Sigma x_i^3 = \Sigma x_i y_i$$

$$a_0 \Sigma x_i^2 + a_1 \Sigma x_i^3 + a_2 \Sigma x_i^4 = \Sigma x_i^2 y_i$$

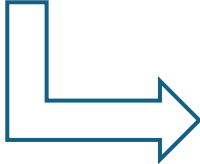
Regresi Polinomial Orde 2

$$\Sigma a_0 + a_1 \Sigma x_i + a_2 \Sigma x_i^2 = \Sigma y_i$$

$$a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 + a_2 \Sigma x_i^3 = \Sigma x_i y_i$$

$$a_0 \Sigma x_i^2 + a_1 \Sigma x_i^3 + a_2 \Sigma x_i^4 = \Sigma x_i^2 y_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

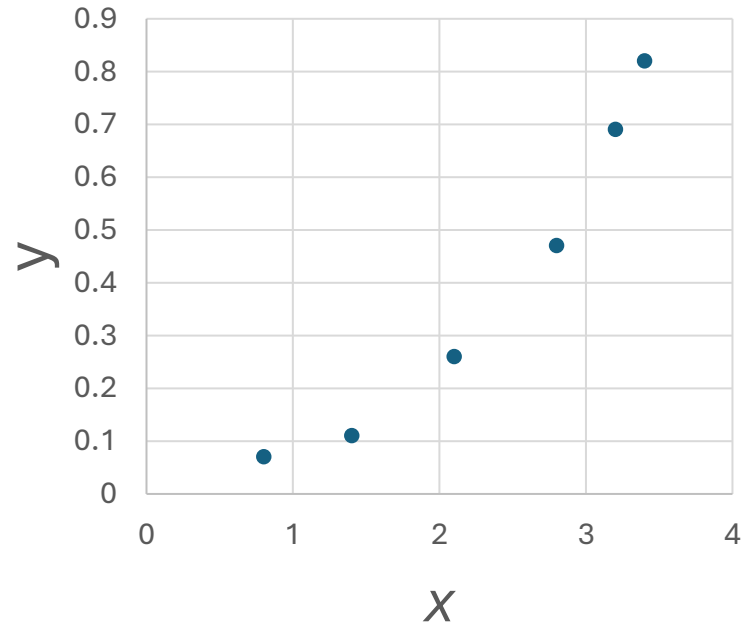

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Contoh Regresi Polinomial Orde 2

38

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

x_i	y_i
0.8	0.07
1.4	0.11
2.1	0.26
2.8	0.47
3.2	0.69
3.4	0.82



Contoh Regresi Polinomial Orde 2

39


<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0.8	0.07	0.64	0.512	0.4096	0.056	0.0448
2	1.4	0.11	1.96	2.744	3.8416	0.154	0.2156
3	2.1	0.26	4.41	9.261	19.4481	0.546	1.1466
4	2.8	0.47	7.84	21.952	61.4656	1.316	3.6848
5	3.2	0.69	10.24	32.768	104.8576	2.208	7.0656
6	3.4	0.82	11.56	39.304	133.6336	2.788	9.4792
Σ	13.7	2.42	36.65	106.541	323.6561	7.068	21.6366

Contoh Regresi Polinomial Orde 2

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 13.7 & 36.65 \\ 13.7 & 36.65 & 106.541 \\ 36.65 & 106.541 & 323.6561 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.42 \\ 7.068 \\ 21.6366 \end{Bmatrix}$$

a_0, a_1, a_2  dapat diperoleh dengan salah satu metode penyelesaian sistem persamaan linear (eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, SOR, ...)

Contoh Regresi Polinomial Orde 2

41

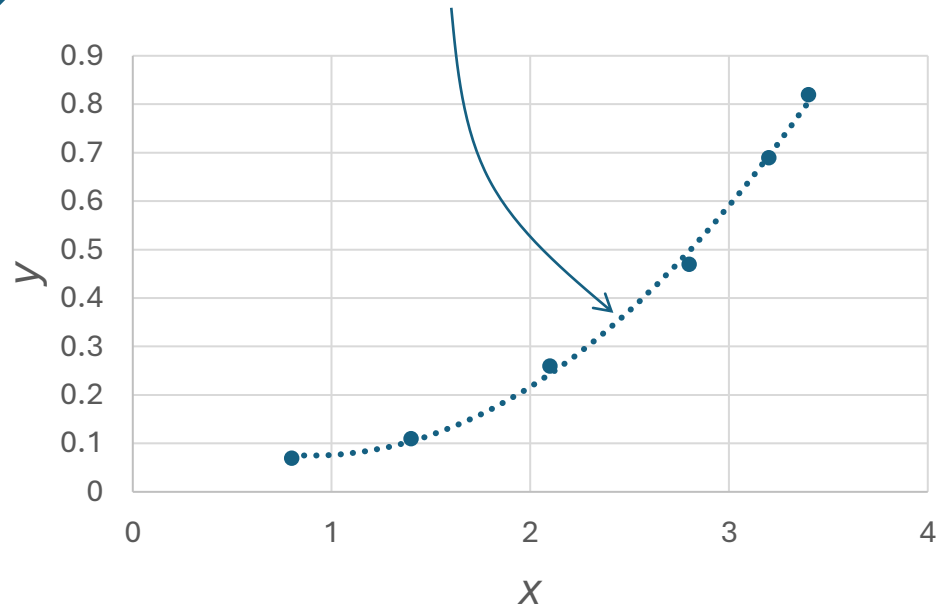
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1685 \\ -0.2089 \\ 0.1165 \end{Bmatrix}$$



$$y_{reg} = 0.1685 - 0.2089x + 0.1165x^2$$

x_i	y_i
0.8	0.0759
1.4	0.1044
2.1	0.2437
2.8	0.4972
3.2	0.6934
3.4	0.8054



42

Interpolasi

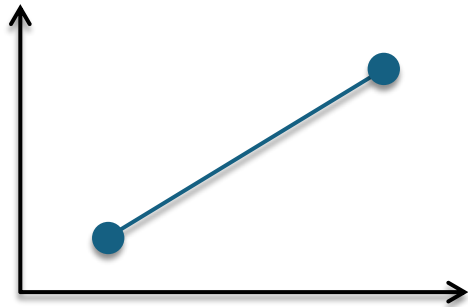
Metode Newton

Metode Lagrange

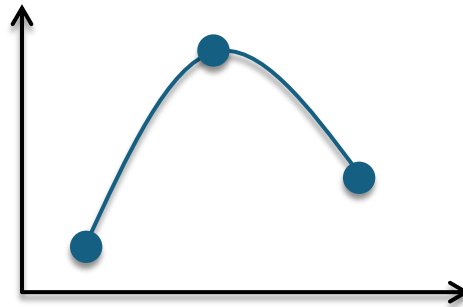
Interpolasi

43

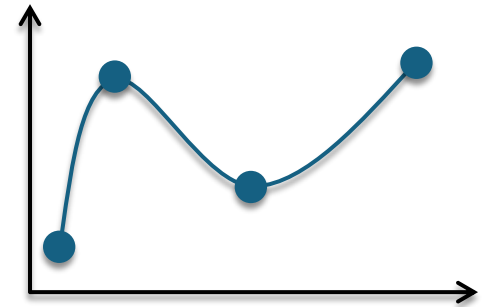
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



linear



kuadratik



kubik

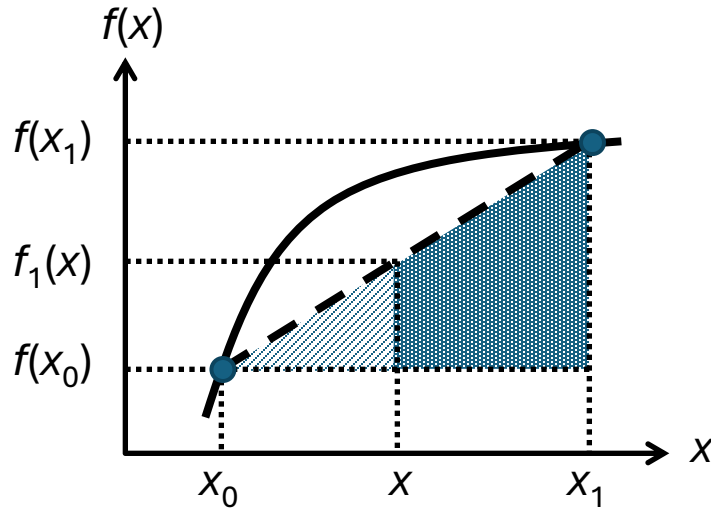
Interpolasi

- Penyelesaian persamaan polinomial orde n membutuhkan sejumlah $n + 1$ titik data
- Metode untuk mencari polinomial orde n yang merupakan interpolasi sejumlah $n + 1$ titik data
 - ▣ Metode Newton
 - ▣ Metode Lagrange

Interpolasi Linear: Metode Newton

45

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Interpolasi Kuadratik: Metode Newton

46

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$\begin{aligned}f_2(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1 \\ &= (b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1) + (b_1 - b_2x_0 - b_2x_1)x + (b_2)x^2\end{aligned}$$



$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \begin{cases} a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 \\ a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Interpolasi Kuadratik: Metode Newton

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

Interpolasi Polinomial: Metode Newton

48

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$



$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

⋮

⋮

⋮

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

Interpolasi Polinomial: Metode Newton

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \dots \\ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

Interpolasi Polinomial: Metode Newton

➤ Interpolasi polinomial orde 3, $f_3(x)$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}]$
0	x_0	$f(x_0)$			
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_0]$		
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	
3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_3, x_2]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$

Diagram illustrating the construction of Newton's interpolating polynomial of order 3. The table shows the values of the function f at points x_0, x_1, x_2, x_3 and the corresponding divided differences. The divided differences are labeled as b_0, b_1, b_2, b_3 .


$f(x_0) = b_0$
 $f[x_1, x_0] = b_1$
 $f[x_2, x_1, x_0] = b_2$
 $f[x_3, x_2, x_1, x_0] = b_3$

➤ $f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

Interpolasi Polinomial: Metode Lagrange

51

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$


Contoh interpolasi polinomial orde 3

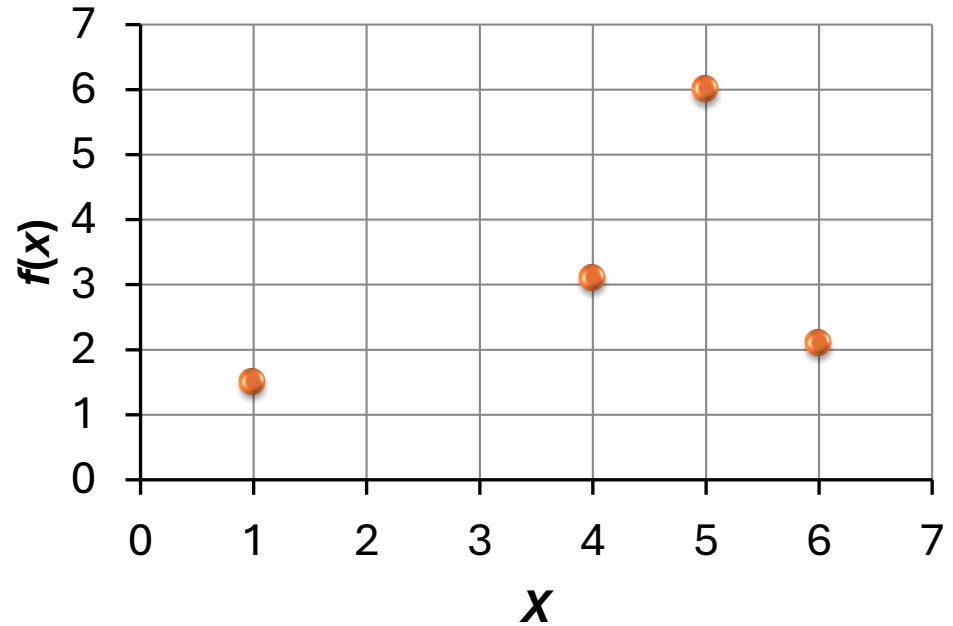
$$f_3(x) = \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right] f(x_0) + \left[\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right] f(x_1) + \dots$$
$$+ \left[\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right] f(x_2) + \left[\frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right] f(x_3)$$

Contoh interpolasi

52

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1.5
1	4	3.1
2	5	6
3	6	2.1



53

Regresi dan Interpolasi

Spline

Interpolasi: Spline

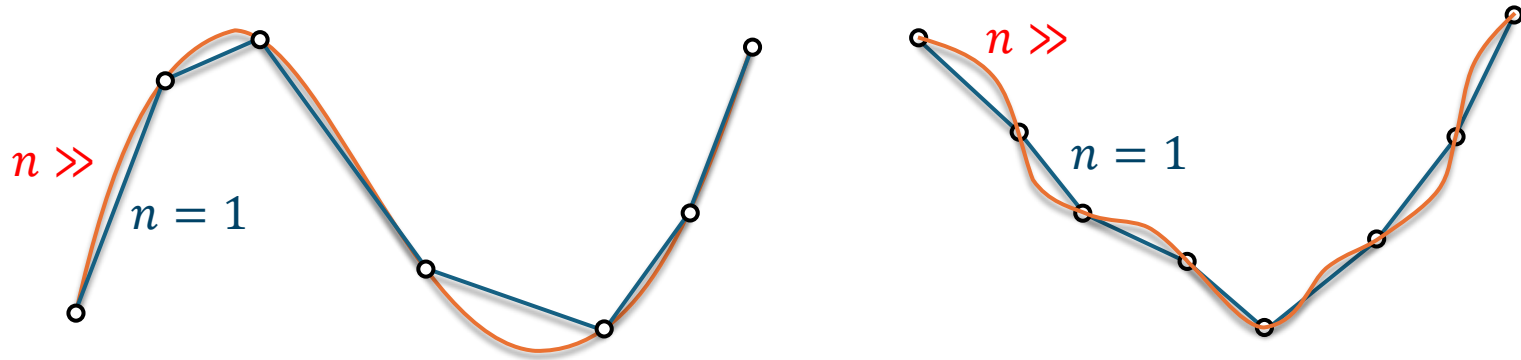
- Jumlah titik data $n + 1 \rightarrow$ interpolasi polinomial orde n
 - Tingkat besar, $n \gg$, mengalami kesulitan apabila titik-titik data menunjukkan adanya perubahan tiba-tiba di suatu titik tertentu (perubahan gradien secara tiba-tiba)
 - Dalam situasi tsb, polinomial orde kecil, $n \ll$, dapat lebih representatif untuk mewakili pola data
 - Spline
 - *Cubic splines* ($n = 3$)
 - *Quadratic splines*
 - *Linear splines*

Interpolasi Polinomial vs *Spline*

55

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Polinomial orde n



Linear Splines

56

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Spline orde 1 garis lurus
- Data urut $x_0, x_1, x_3, \dots, x_n$

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

·
·
·

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Gradien

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Linear Splines

□ *Linear spline*

- Dengan demikian, *linear spline* adalah sama dengan interpolasi linear
- Kekurangan *linear spline* adalah ketidak-mulusan kurva interpolasi
- Terdapat perubahan *slope* yang sangat tajam di titik-titik data atau di titik-titik pertemuan kurva *spline* (*knot*)
- Derivatif pertama fungsi *linear spline* diskontinu di titik-titik *knot*
- Kelemahan *linear spline* tersebut diatasi dengan pemakaian polinomial yang memiliki orde lebih tinggi yang menjamin kemulusan kurva *spline* di *knots* dengan cara menyamakan nilai derivatif di titik-titik *knot*

Quadratic Splines

□ Quadratic splines

- Untuk mendapatkan kurva yang memiliki diferensi ke- m kontinu di titik *knot*, maka diperlukan kurva *spline* yang berorde paling kecil $m + 1$
- Yang paling banyak dipakai adalah *spline* orde 3 (*cubic spline*): diferensial pertama dan kedua kontinu di titik-titik *knot*
 - Ketidak-mulusan diferensi ketiga, keempat, dst. umumnya tidak begitu tampak secara visual

Quadratic Splines

- Tujuan *quadratic spline* adalah mendapatkan polinomial orde 2 untuk tiap interval titik-titik data
- Polinomial orde 2 itu harus memiliki diferensi pertama (laju perubahan) yang kontinu di titik-titik data
- Polinomial orde 2

$$f(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

- Untuk $n + 1$ titik data ($i = 1, 2, \dots, n$), terdapat n interval, sehingga terdapat $3n$ koefisien yang harus dicari $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n$
- Perlu persamaan sejumlah $3n$

Quadratic Splines

- Ke- $3n$ persamaan itu adalah (1)
 - ▣ Kurva *spline* memotong titik-titik data (*knot*): interval $i - 1$ dan i bertemu di titik data $\{x_{i-1}, f(x_{i-1})\}$

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$i = 2, 3, \dots, n$$

$2(n - 1)$ pers.

Quadratic Splines

- Ke- $3n$ persamaan itu adalah (2)
 - ▣ Kurva *spline* di interval pertama memotong titik data pertama ($i = 1$) dan kurva *spline* di interval terakhir memotong titik data terakhir ($i = n$)

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n = f(x_n)$$

2 pers.

Quadratic Splines

- Ke- $3n$ persamaan itu adalah (3)
 - ▣ Diferensi (gradien) kurva *spline* di dua interval berurutan adalah sama di titik data yang bersangkutan

$$f'(x) = 2ax + b \implies 2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \quad \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, n \\ 2(n-1) \text{ pers.} \end{array}$$

- ▣ Diferensi kedua (laju perubahan gradien) kurva *spline* di titik data pertama sama dengan nol

$$a_i = 0 \quad 1 \text{ pers.}$$



Konsekuensi 2 titik data pertama ($i = 1$ dan $i = 1$)
dihubungkan dengan garis lurus

Quadratic Splines

- Dengan demikian, jumlah persamaan seluruhnya adalah $2(n - 1) + 2 + (n - 1) + 1 = 3n$

Cubic Splines

- Tujuan *cubic spline* adalah menemukan polinomial orde 3 untuk tiap interval titik-titik data
 - ▣ Polinomial orde 3 itu harus memiliki diferensi pertama (gradien) dan diferensi kedua (laju perubahan gradien) yang kontinu di titik-titik data.
 - ▣ Polinomial orde 3

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- ▣ Untuk $(n + 1)$ titik data $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, terdapat n interval, shg. terdapat $4n$ koefisien yang harus dicari (a_i, b_i, c_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots, n$
 - ▣ Perlu persamaan sejumlah $4n$

Cubic Splines

- Ke- $4n$ persamaan itu adalah sbb.
 - Kurva spline memotong titik-titik data (knot), interval $i - 1$ dan i bertemu di titik data $\{x_{i-1}, f(x_{i-1})\} \rightarrow (2n - 2)$ pers.
 - Kurva *spline* di interval pertama memotong titik data pertama dan kurva *spline* terakhir memotong titik data terakhir $\rightarrow 2$ pers.
 - Diferensial pertama kurva *spline* di dua interval berurutan adalah sama di titik data ybs. $\rightarrow (n - 1)$ pers.
 - Diferensial kedua kurva *spline* di dua interval berurutan adalah sama di titik data ybs. $\rightarrow (n - 1)$ pers.
 - Diferensial kedua kurva *spline* di titik data pertama dan terakhir sama dengan nol $\rightarrow 2$ pers.

Cubic Splines

- Ke- $4n$ persamaan itu.
 - ▣ Syarat kelima membawa konsekuensi sbb.
 - Kurva *spline* di interval pertama dan interval terakhir berupa garis lurus
 - dua titik data pertama dihubungkan dengan sebuah garis lurus
 - dua titik data terakhir dihubungkan dengan sebuah garis lurus
 - ▣ Ada sebuah syarat alternatif sebagai pengganti syarat kelima tsb
 - Derivatif kedua di titik *knot* terakhir diketahui

Cubic Splines

- Diperoleh $4n$ persamaan yang harus diselesaikan untuk mencari $4n$ koefisien, a_i, b_i, c_i, d_i

$$2(n - 1) + 2 + (n - 1) + (n - 1) + 2 = 4n$$

- Dimungkinkan untuk melakukan manipulasi matematis shg diperoleh suatu teknik *cubic splines* yang hanya memerlukan $n - 1$ penyelesaian (lihat uraian di buku acuan)
 - Chapra, S.P., Canale, R.P., 1985, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Book Co., New York, hlm. 395-396).

Cubic Splines

2 unknowns di tiap interval
 $f''(x_{i-1})$ dan $f''(x_i)$

$$\begin{aligned}
 f_i(x) = & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^3 + \\
 & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) + \\
 & + \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) = \\
 \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ interval} \\ f''(x_0) = 0 \\ f''(x_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (n - 1) \text{ pers.}$$

Sekian