UNIVERSITAS GADJAH MADA
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN
PRODI TEKNIK SIPIL

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

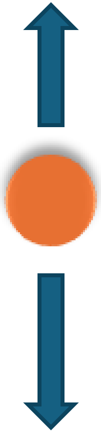
Ordinary Differential Equations – ODE

Persamaan Diferensial Biasa

- Acuan
  - Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
    - Chapter 19 dan 20, hlm. 576-640.

Persamaan Diferensial

$F_U = -c\ v$



$F_D = m\ g$

- Benda bermassa *m* jatuh bebas dengan kecepatan *v*

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_D + F_U}{m}$$

Hukum Newton II

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v$$

c = *drag coefficient* (kg/s)

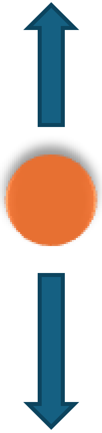
g = *gravitational acceleration* (m/s^2)

persamaan diferensial

$\frac{dv}{dt}$ suku diferensial laju perubahan (*rate of change*)

Persamaan Diferensial

$$F_U = -c\ v$$



$$F_D = m\ g$$

- Sebuah benda jatuh bebas
  - Jika pada saat awal benda dalam keadaan diam:

$v(t=0)=0$ syarat awal (*initial condition*)

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left[1 - e^{-(c/m)t}\right]$$

Persamaan Diferensial

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v$$

- Persamaan diferensial
  - v variabel tak bebas (*dependent variable*)
  - t variabel bebas (*independent variable*)

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v$$

- Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*, ODE)
  - hanya terdiri dari satu variabel bebas → t

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

- Persamaan diferensial parsial (*partial differential equations*, PDE)
  - terdiri dari dua atau lebih variabel bebas → t, x

Persamaan Diferensial

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

- Persamaan diferensial
  - tingkat (*order*) tertinggi suku derivatif
- Persamaan diferensial tingkat-1
  - suku derivatif bertingkat-1
- Persamaan diferensial tingkat-2
  - suku derivatif bertingkat-2

Persamaan Diferensial Biasa

- Beberapa contoh ODE di bidang *engineering*
  - Hukum Newton II ttg gerak ⇒ $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{m}$$
  - Hukum Fourier ttg panas ⇒ $$\text{Heat flux} = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$
  - Hukum Fick ttg difusi ⇒ $$\text{Mass flux} = -D\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$$

Persamaan Diferensial Biasa

diketahui
fungsi polinomial tingkat 4

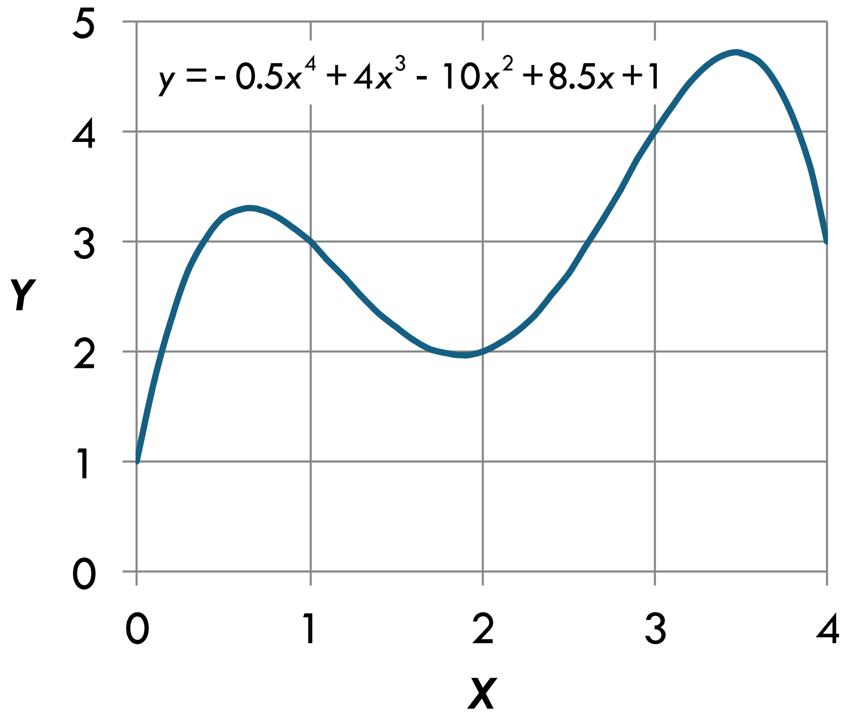
$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

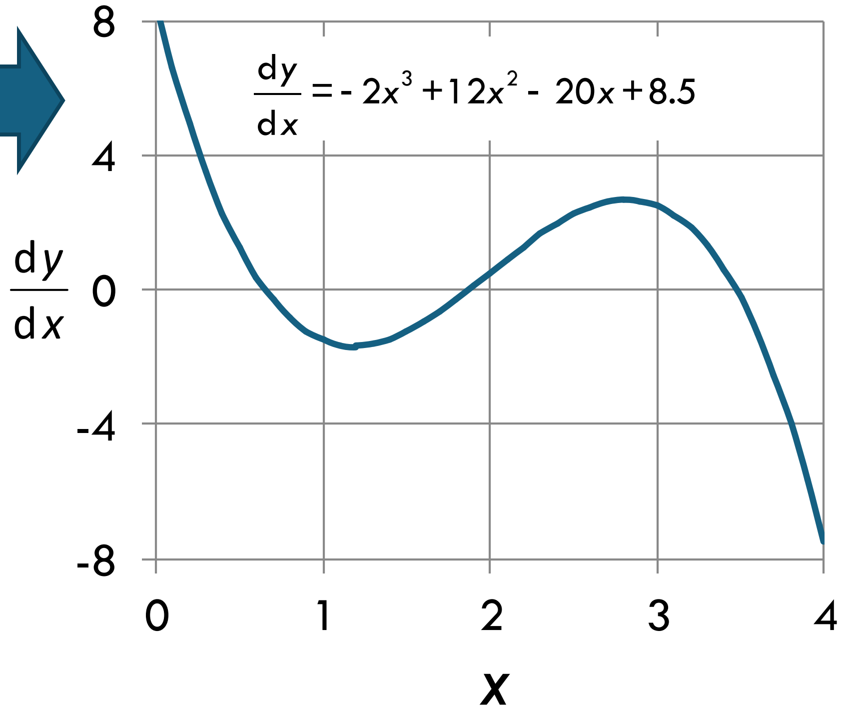
di-diferensial-kan

diperoleh ODE

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Persamaan Diferensial Biasa





Persamaan Diferensial Biasa

diketahui: ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

di-integral-kan

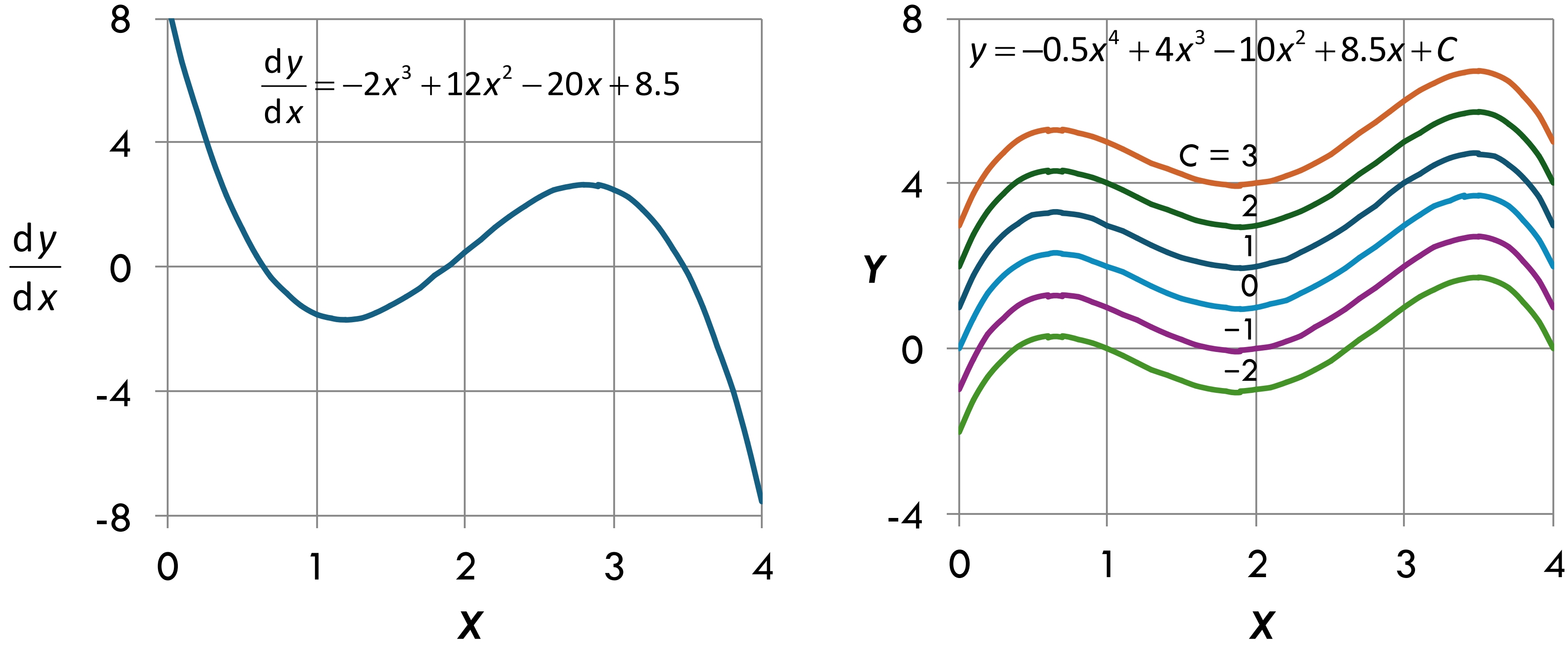
fungsi asal

$$y = \int \left(-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5\right) \mathrm{d}x$$

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

C disebut konstanta integrasi

Persamaan Diferensial Biasa



Persamaan Diferensial Biasa

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

- Hasil dari integrasi adalah sejumlah tak berhingga polinomial.
- Penyelesaian yang *unique* (tunggal, satu-satunya) diperoleh dengan menerapkan suatu syarat, yaitu pada titik awal $x = 0$, $y = 1$ → ini disebut dengan istilah **syarat awal (*initial condition*)**.
- Syarat awal tersebut menghasilkan C = 1.

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Persamaan Diferensial Biasa

- Syarat awal (*initial condition*)
  - mencerminkan keadaan sebenarnya, memiliki arti fisik
  - pada persamaan diferensial tingkat *n*, maka dibutuhkan sejumlah n syarat awal
- Syarat batas (*boundary conditions*)
  - syarat yang harus dipenuhi tidak hanya di satu titik di awal saja, namun juga di titik-titik lain atau di beberapa nilai variabel bebas yang lain

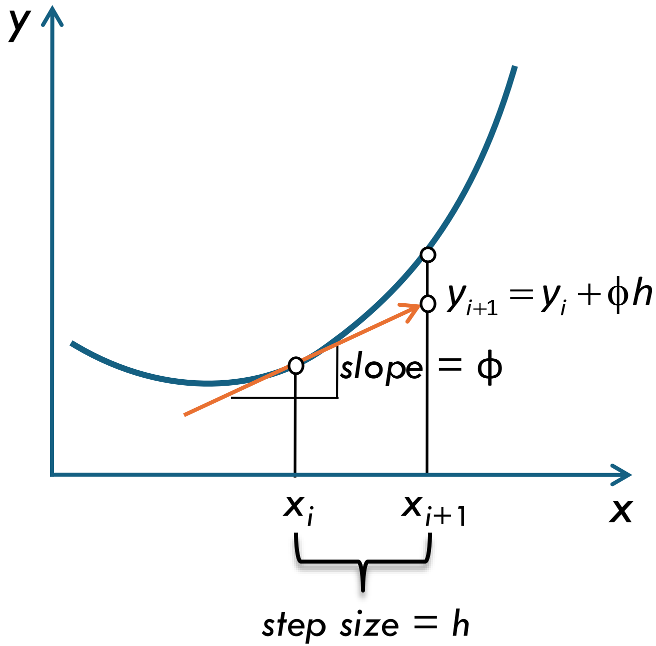
Persamaan Diferensial Biasa

- Metode penyelesaian ODE
  - Metode Euler
  - Metode Heun
  - Metode Euler Modifikasi (Metode Poligon)
  - Metode Runge-Kutta

Penyelesaian ODE

Metode Euler

Metode Satu Langkah

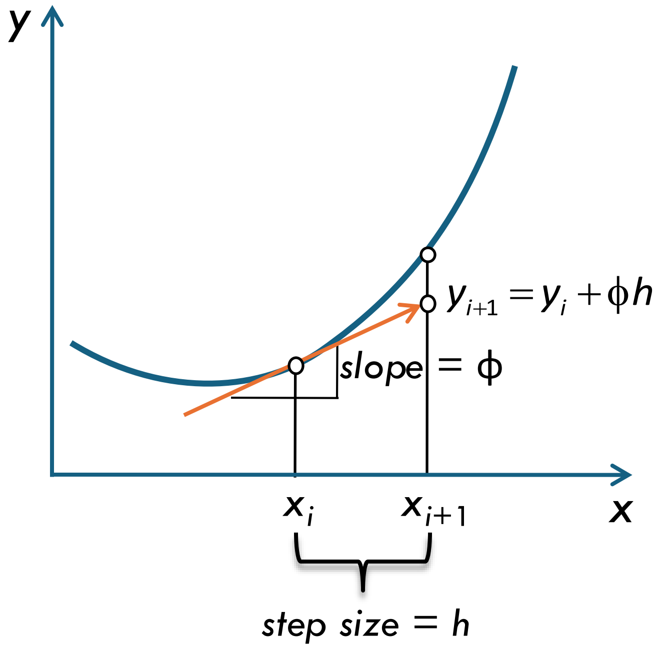


- Dikenal pula sebagai metode satu langkah (*one-step method*)
- Persamaan
  - *new value = old value + slope x step size*
- Dalam bahasa matematika

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

  - jadi, *slope* atau gradien ϕ dipakai untuk meng-ekstrapolasi-kan nilai lama y_i ke nilai baru y_{i+1} dalam selang *h*

Metode Satu Langkah



$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

- Semua metode satu langkah dapat dinyatakan dalam persamaan tsb.
- Perbedaan antara satu metode dengan metode yang lain dalam metode satu langkah ini adalah perbedaan dalam menetapkan atau memperkirakan ***slope ϕ***.
- Salah satu metode satu langkah adalah **Metode Euler**.

Metode Euler

- Dalam Metode Euler, slope di x_i diperkirakan dengan derivatif pertama di titik (x_i,y_i).
- Metode Euler dikenal pula dengan nama Metode Euler-Cauchy.
- Jadi nilai *y* baru diperkirakan berdasarkan *slope*, sama dengan derivatif pertama di titik *x*, untuk mengekstrapolasikan nilai *y* lama secara linear dalam selang *h* ke nilai *y* baru.

$$\phi = f(x_i, y_i) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_i, y_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Metode Euler

- Pakailah Metode Euler untuk mengintegralkan ODE di bawah ini, dari x = 0 s.d. x = 4 dengan selang langkah h = 0.5

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x^3+12x^2-20x+8.5$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di titik x= 0, y = 1

- Ingat, penyelesaian eksak ODE di atas adalah

$$y=-0.5x^4+4x^3-10x^2+8.5x+1$$

Metode Euler

- Selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + h = 0.5$

$$f(x_0, y_0) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)h \\ &= 1 + 8.5(0.5) = 5.25 \end{aligned}$$

- Nilai y_1 sesungguhnya dari penyelesaian eksak

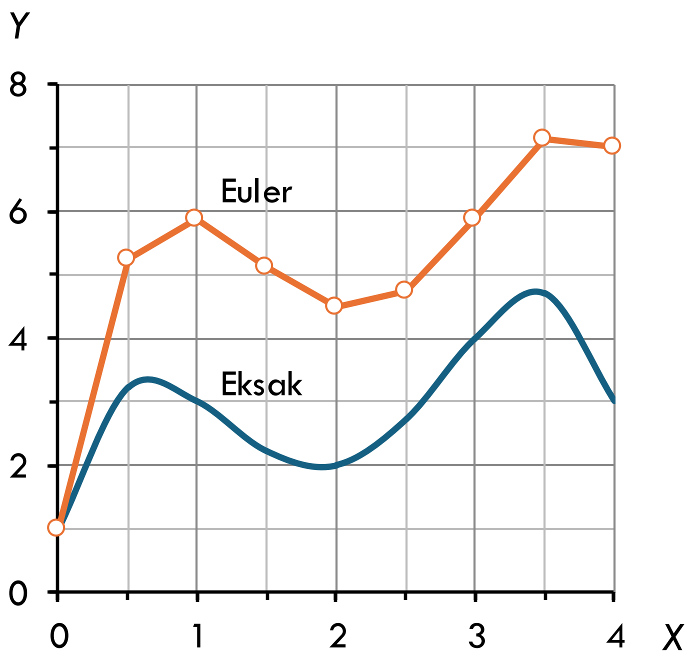
$$\begin{aligned} y_1 &= -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 \\ &= 3.21875 \end{aligned}$$

- *Error*, yaitu selisih antara nilai y_1 sesungguhnya dan estimasi

$$E_t = 3.21875 - 5.25 = -2.03125 \quad \text{atau} \quad \varepsilon_t = -2.03125/3.21875 = 63\%$$

Metode Euler

i	x_i	y_i	ϕ_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$y_{i(eksak)}$	ε_i
0	0	1	8.5	0.5	5.25	1	0.000
1	0.5	5.25	1.25	1	5.875	3.219	2.031
2	1	5.875	-1.5	1.5	5.125	3.000	2.875
3	1.5	5.125	-1.25	2	4.5	2.219	2.906
4	2	4.5	0.5	2.5	4.75	2.000	2.500
5	2.5	4.75	2.25	3	5.875	2.719	2.031
6	3	5.875	2.5	3.5	7.125	4.000	1.875
7	3.5	7.125	-0.25	4	7	4.719	2.406
8	4	7	---	---	---	3.000	4.000



Metode Euler

- *Error* atau kesalahan terdiri dari dua aspek
  - *Truncation or discretization errors* (kesalahan pemotongan) yang disebabkan oleh teknik penyelesaian dalam mengestimasikan nilai *y*.
    - *local truncation error*, yaitu kesalahan pada satu langkah
    - *propagated truncation error*, yaitu kesalahan-kesalahan pada langkah-langkah terdahulu
  - *Round-off errors* yang disebabkan oleh keterbatasan jumlah digit dalam hitungan atau jumlah digit dalam alat hitung (kalkulator, komputer).

Metode Euler

$$y' = f(x,y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

- Deret Taylor

$$y_{i+1} = y_i + y' h + \frac{y''}{2} h^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!} h^n + R_n \qquad h = x_{i+1} - x_i, \quad R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

ξ adalah sembarang titik di antara x_i dan x_{i+1}.

Deret Taylor dapat pula dituliskan dalam bentuk lain sbb.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + O(h^{n+1})$$

$O(h^{n+1})$ menyatakan bahwa *local truncation error* adalah proporsional terhadap selang jarak dipangkatkan $(n+1)$.

Metode Euler

$$y_{i+1} = \underbrace{y_i + f(x_i, y_i)h}_{\text{Euler}} + \underbrace{\frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})}_{\text{Error, } E_t}$$

$\boxed{\text{Deret Taylor}}$

- *true local truncation error of the Euler Method* (E_t)
- untuk selang h kecil, *error* mengecil seiring dengan peningkatan tingkat
- *error* E_t dapat didekati dengan E_a

$$E_t \approx E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 \quad \text{atau} \quad E_a = O(h^2)$$

Metode Euler

$$y' = f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Hitunglah *error* yang terjadi (E_t) pada penyelesaian ODE tersebut;
  hitunglah komponen *error* setiap suku pada persamaan E_t.

- Selesaikan ODE tersebut dengan memakai $h = 0.25$;
  bandingkan dengan penyelesaian sebelumnya;
  bandingkan juga *error* yang terjadi.

- Baca buku acuan pada hlm 580-584 untuk membantu Sdr dalam membuat diskusi hasil hitungan Sdr.

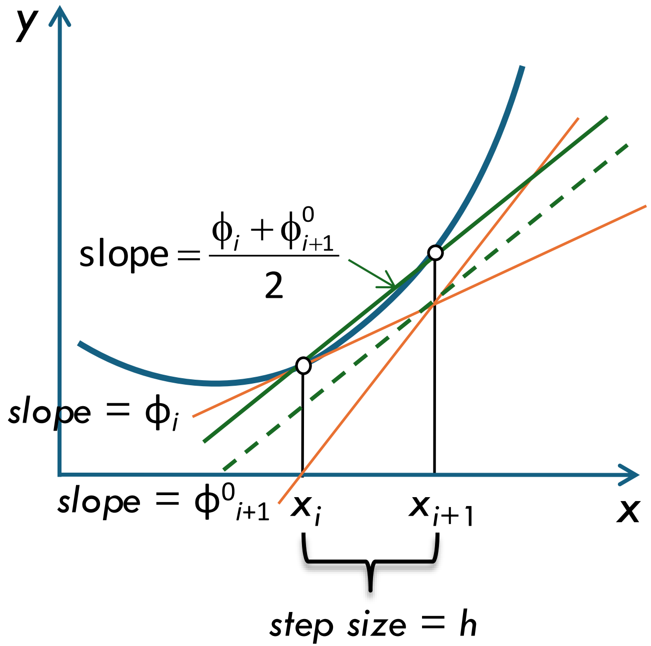
Metode Euler

- *Error* pada Metode Euler dapat dihitung dengan memanfaatkan Deret Taylor
- Keterbatasan
  - Deret Taylor hanya memberikan perkiraan/estimasi *local truncation error*, yaitu *error* yang timbul pada satu langkah hitungan Metode Euler, bukan *propagated truncation error*.
  - Hanya mudah dipakai apabila ODE berupa fungsi polinomial sederhana yang mudah untuk di-diferensial-kan, $f_i(x_i, y_i) = \phi_i$ mudah ditemukan.
- Perbaikan Metode Euler, memperkecil *error*
  - Pakailah selang h kecil.
  - Metode Euler tidak memiliki *error* apabila ODE berupa fungsi linear.

Penyelesaian ODE

Metode Heun

Metode Heun



Slope di selang antara x_i dan di x_{i+1} ditetapkan sebagai nilai rata-rata *slope* di awal dan di akhir selang, yaitu di x_i dan di x_{i+1}

$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$ Euler → sebagai prediktor

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1})$$

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}h$$ → sebagai korektor

Metode Heun

- Pakailah Metode Heun untuk mengintegralkan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang langkah $h = 1$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa pada $x = 0$, $y = 2$

- Penyelesaian eksak ODE tsb yang diperoleh dari kalkulus adalah

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

Metode Heun

- Selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + h = 1$:

$$f(x_0, y_0) = f(0,2) = 4\left[e^{0.8(0)}\right] - 0.5(2) = 3$$ *slope* di titik ujung awal, (x_0, y_0)

$$y_1^0 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 2 + 3(1) = 5$$ prediktor y_1

$$f(x_1, y_1^0) = f(1,5) = 4\left[e^{0.8(1)}\right] - 0.5(5) = 6.4021637$$ *slope* di titik ujung akhir, (x_1, y_1)

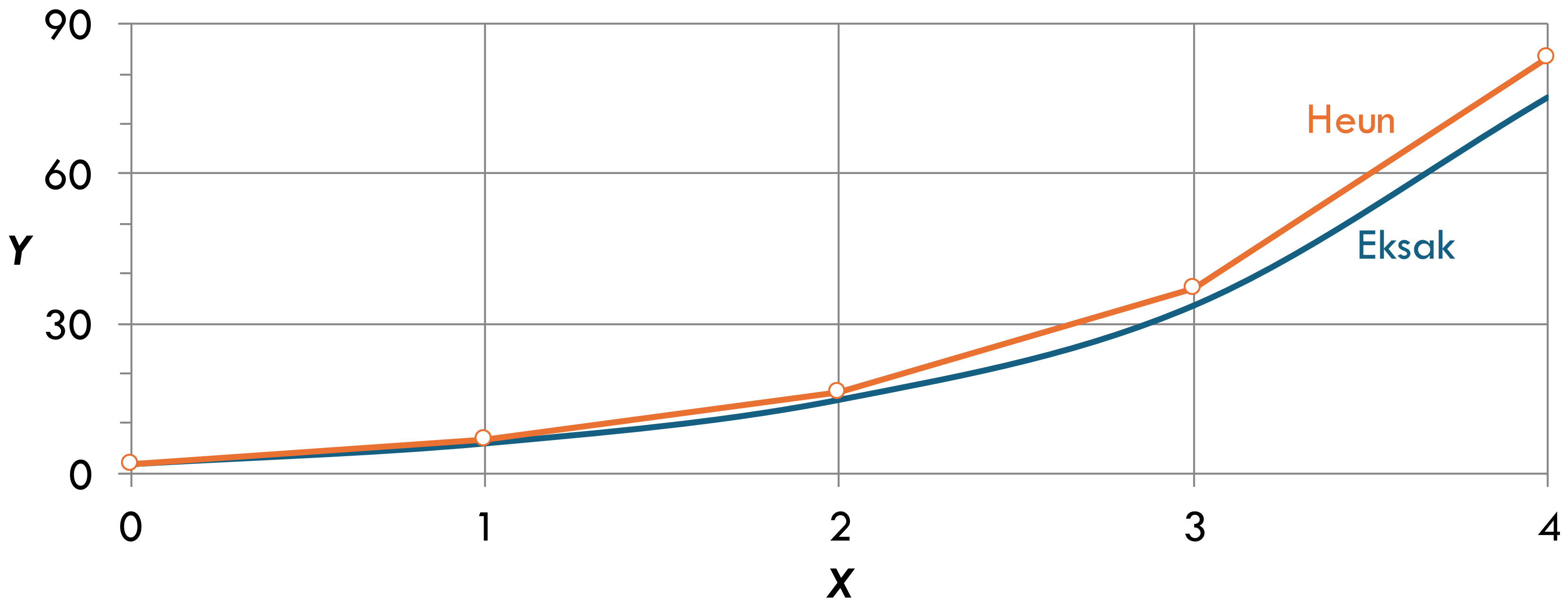
$$\overline{y}' = \frac{3 + 6.4021637}{2} = 4.70108185$$ *slope* rata-rata selang ke-1

$$y_1 = y_0 + \overline{y}' h = 2 + 4.70108185(1) = 6.7010819$$ korektor y_1

Metode Heun

i	x_i	y_i	$y'_i = \phi_i$	x_{i+1}	y_{i+1}^{pred}	$y'_{i+1} = \phi_{i+1}$	$\bar{\phi}$	y_{i+1}^{kor}
0	0	2	3	0.5	3.500	4.217	3.609	3.804
1	0.5	3.804	4.065	1	5.837	5.984	5.024	6.317
2	1	6.317	5.744	1.5	9.188	8.686	7.215	9.924
3	1.5	9.924	8.318	2	14.083	12.770	10.544	15.196
4	2	15.196	12.214	2.5	21.303	18.905	15.559	22.976
5	2.5	22.976	18.068	3	32.010	28.088	23.078	34.515
6	3	34.515	26.835	3.5	47.933	41.812	34.324	51.677
7	3.5	51.677	39.940	4	71.647	62.307	51.123	77.239
8	4	77.239	---	---	---	---	---	---

Metode Heun



Metode Heun

- Metode Heun dapat diterapkan secara iteratif pada saat menghitung slope di ujung akhir selang dan nilai y_{i+1} korektor
  - nilai y_{i+1} korektor pertama dihitung berdasarkan nilai y_{i+1} prediktor
  - nilai y_{i+1} korektor tersebut dipakai sebaga nilai y_{i+1} prediktor
  - hitung kembali nilai y_{i+1} korektor yang baru
  - ulangi kedua langkah terakhir tersebut beberapa kali
- Perlu dicatat bahwa
  - *error* belum tentu selalu berkurang pada setiap langkah iterasi
  - iterasi tidak selalu konvergen

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Metode Heun

- Iterasi kedua pada selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + h = 1$

$$y_1^0 = y_{1(\text{old})} = 6.7010819$$

prediktor y_1 = korektor $y_{1(\text{lama})}$

$$f\left(x_1, y_1^0\right) = f\left(1{,}6.7010819\right) = 4\left[e^{0.8(1)}\right] - 0.5\left(6.7010819\right) = 5.5516228$$

slope di titik ujung akhir, (x_1, y_1)

$$\bar{y}' = \frac{3 + 5.5516228}{2} = 4.2758114$$

slope rata-rata selang ke-1

$$y_1 = y_0 + \bar{y}'h = 2 + 4.27581145(1) = 6.2758114$$

korektor y_1

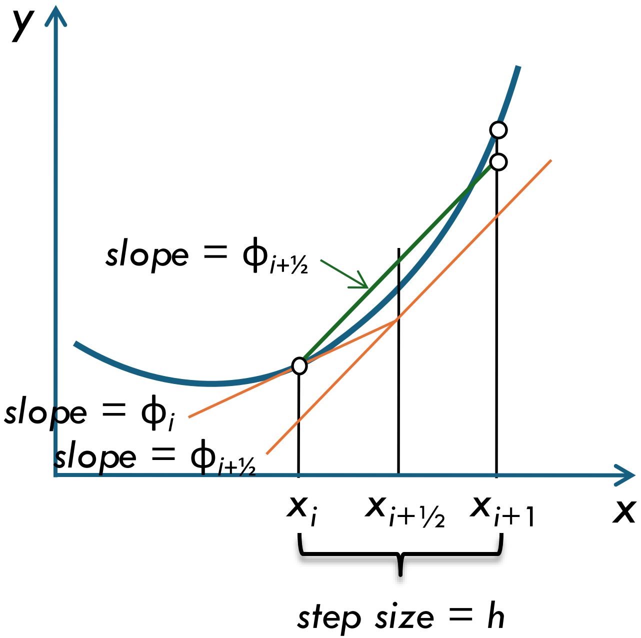
- Iterasi di atas dapat dilakukan beberapa kali

Penyelesaian ODE

Metode Poligon

(*Modified Euler Method*)

Metode Poligon



Slope di selang antara x_i dan di x_{i+1} ditetapkan sebagai nilai *slope* di titik tengah selang, yaitu di $x_{i+½}$:

$y_i' = f(x_i, y_i)$ — *slope* di titik awal

$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f(x_i, y_i)\dfrac{h}{2}$ — ekstrapolasi ke titik tengah

$y'_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$ — *slope* di titik tengah

$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)h$ — ekstrapolasi ke titik akhir

Metode Poligon

- Pakailah Metode Poligon untuk mengintegralkan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang langkah $h = 1$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa pada $x = 0$, $y = 2$

- Ingat penyelesaian eksak ODE tsb yang diperoleh dari kalkulus adalah:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

Metode Poligon

- Selang ke-1, dari x_0 = 0 sd x_1 = x_0 + h = 1

$$f(x_0, y_0) = f(0,2) = 4\left[e^{0.8(0)}\right] - 0.5(2) = 3$$

slope di titik ujung awal, (x_0, y_0)

$$y_{\frac{1}{2}} = y_0 + f(x_0, y_0)\frac{h}{2} = 2 + 3(1/2) = 3.5$$

titik tengah $y_{½}$

$$f\left(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\right) = f(0.5, 3.5) = 4\left[e^{0.8(0.5)}\right] - 0.5(3.5) = 4.2173$$

slope di titik tengah, ($x_{½}$, $y_{½}$)

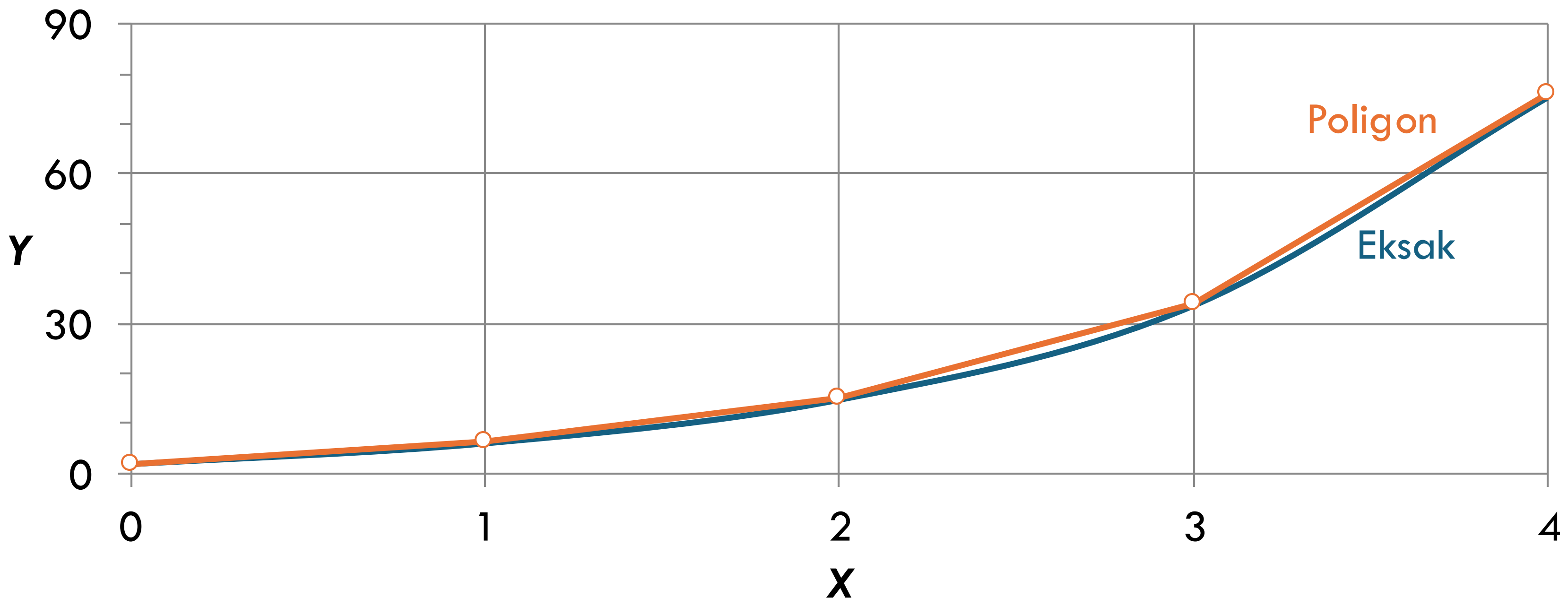
$$y_1 = y_0 + f\left(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\right)h = 2 + 4.2173(1) = 6.2173$$

ekstrapolasikan y_0 ke y_1

Metode Poligon

i	x_i	$y_{i\ (eksak)}$	$f(x_i,y_i)$	$x_{i+½}$	$y_{i+½}$	$f(x_{i+½},y_{i+½})$	y_i	ε_t
0	0	2	3	---	---	---	2	---
1	1	6.1946	5.7935	0.5	3.5000	4.2173	6.2173	-0.4%
2	2	14.8439	12.3418	1.5	9.1141	8.7234	14.9407	-0.7%
3	3	33.6772	27.1221	2.5	21.1116	19.0004	33.9412	-0.8%
4	4	75.3390	---	3.5	47.5022	42.0275	75.9686	-0.8%

Metode Poligon



Penyelesaian ODE

Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta

- Metode Euler
  - kurang teliti
  - ketelitian lebih baik diperoleh dengan cara memakai pias kecil atau memakai suku-suku derivatif berorde lebih tinggi dalam Deret Taylor
- Metode Runge-Kutta
  - lebih teliti daripada Metode Euler
  - tanpa memerlukan suku derivatif

Metode Runge-Kutta

- Bentuk umum penyelesaian ODE dengan Metode Runge-Kutta adalah

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)\, h$$

$\phi(x_i, y_i, h)$ adalah *increment function* yang dapat diinterpretasikan sebagai *slope* atau gradien fungsi *y* di selang antara x_i s.d. x_{i+1}

- Fungsi ϕ dapat dituliskan dalam bentuk umum sbb.

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$

a adalah konstanta dan *k* adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

setiap *k* saling terhubung dengan *k* yang lain → k_1 muncul pada pers k_2 dan k_2 muncul pada pers k_3 dst.

Metode Runge-Kutta

- Terdapat beberapa jenis Metode Runge-Kutta yang dibedakan dari jumlah suku pada persamaan untuk menghitung ϕ
  - RK tingkat-1 (*first-order* RK): $n = 1$
  - RK tingkat-2 (*second-order* RK): $n = 2$
  - RK tingkat-3 (*third-order* RK): $n = 3$
  - RK tingkat-4 (*fourth-order* RK): $n = 4$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \phi(x_i, y_i, h)\, h \\ \phi(x_i, y_i, h) &= a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n \end{aligned}}$$

- *Order of magnitude* kesalahan penyelesaian Metode RK tingkat n
  - *local truncation error* = $O(h^{n+1})$
  - *global truncation error* = $O(h^n)$

Second-order Runge-Kutta Method

- Bentuk umum persamaan penyelesaian ODE dengan *2nd-order* RK

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

a_1, a_2, p_1, q_{11} *unknowns* → perlu 4 persamaan

- Deret Taylor

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + f'(x_i, y_i)\frac{h^2}{2}$$

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{h^2}{2}$$

Second-order Runge-Kutta Method

- Ingat, Deret Taylor untuk fungsi yang memiliki 2 variabel

$$g(x+r,y+s)=g(x,y)+r\frac{\partial g}{\partial x}+s\frac{\partial g}{\partial y}+\ldots$$

- Bentuk di atas diterapkan pada persamaan k_2

$$k_2=f(x_i+p_1h,y_i+q_{11}k_1h)=f(x_i,y_i)+p_1h\frac{\partial f}{\partial x}+q_{11}k_1h\frac{\partial f}{\partial y}+O(h^2)$$

- Bentuk umum penyelesaian ODE metode *2nd-order* RK menjadi:

$$y_{i+1}=y_i+a_1hf(x_i,y_i)+a_2hf(x_i,y_i)+a_2p_1h^2\frac{\partial f}{\partial x}+a_2q_{11}h^2f(x_i,y_i)\frac{\partial f}{\partial x}+O(h^3)$$

$$=y_i+\left[a_1f(x_i,y_i)+a_2f(x_i,y_i)\right]h+\left[a_2p_1\frac{\partial f}{\partial x}+a_2q_{11}f(x_i,y_i)\frac{\partial f}{\partial x}\right]h^2+O(h^3)$$

Second-order Runge-Kutta Method

- Bandingkan persamaan di atas dengan persamaan semula

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)\right] h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x}\right] h^2 + O\left(h^3\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{h^2}{2}$$

- Agar kedua persamaan di atas ekuivalen, maka

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = ½$$
$$a_2 q_{11} = ½$$

- Karena hanya ada 3 persamaan untuk 4 *unknowns*, maka nilai salah satu variabel harus ditetapkan.
- Misalkan nilai a_2 ditetapkan, maka a_1, p_1, dan q_{11} dapat dihitung.

Second-order Runge-Kutta Method

- Jika a_2 ditetapkan, maka

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \tfrac{1}{2} \qquad a_2 q_{11} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 1 - a_2 \qquad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

- Karena ada sejumlah tak berhingga nilai a_2, maka terdapat pula sejumlah tak berhingga 2*nd-order* RK methods.
- Setiap versi 2*nd-order* RK akan memberikan hasil yang persis sama jika fungsi penyelesaian ODE yang dicari adalah fungsi kuadrat, linear, atau konstanta.

Second-order Runge-Kutta Method

- Metode Heun dengan korektor tunggal

$$a_2 = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; a_1 = \tfrac{1}{2},\; p_1 = q_{11} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y_{i+1} = y_i + \left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)h \qquad \begin{aligned} k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_1\right) \end{aligned}$$

- Metode poligon yang diperbaiki (*improved polygon method*)

$$a_2 = 1 \;\Rightarrow\; a_1 = 0,\; p_1 = q_{11} = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad y_{i+1} = y_i + k_2\, h \qquad \begin{aligned} k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \end{aligned}$$

- Metode Ralston

$$a_2 = \tfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; a_1 = \tfrac{1}{3},\; p_1 = q_{11} = \tfrac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad y_{i+1} = y_i + \left(\tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{2}{3}k_2\right)h \qquad \begin{aligned} k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{3}{4}h, y_i + \tfrac{3}{4}hk_1\right) \end{aligned}$$

Second-order Runge-Kutta Method

- Pakailah berbagai *2nd-order RK methods* untuk mengintegralkan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang langkah $h = 0.5$

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x^3+12x^2-20x+8.5$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di titik $x = 0$, $y = 1$

- Bandingkan hasil-hasil penyelesaian dengan berbagai metode RK tsb.

Second-order Runge-Kutta Method

Single-corrector Heun							
i	x_i	$y_{i\,(\text{eksak})}$	k_1	k_2	ϕ	y_i	ε_t
0	0	1	8.5	1.25	4.875	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-1.5	-0.125	3.4375	-6.8%
2	1	3	-1.5	-1.25	-1.375	3.375	-12.5%
3	1.5	2.21875	-1.25	0.5	-0.375	2.6875	-21.1%
4	2	2	0.5	2.25	1.375	2.5	-25.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.5	2.375	3.1875	-17.2%
6	3	4	2.5	-0.25	1.125	4.375	-9.4%
7	3.5	4.71875	-0.25	-7.5	-3.875	4.9375	-4.6%
8	4	3	---	---	---	3	0.0%

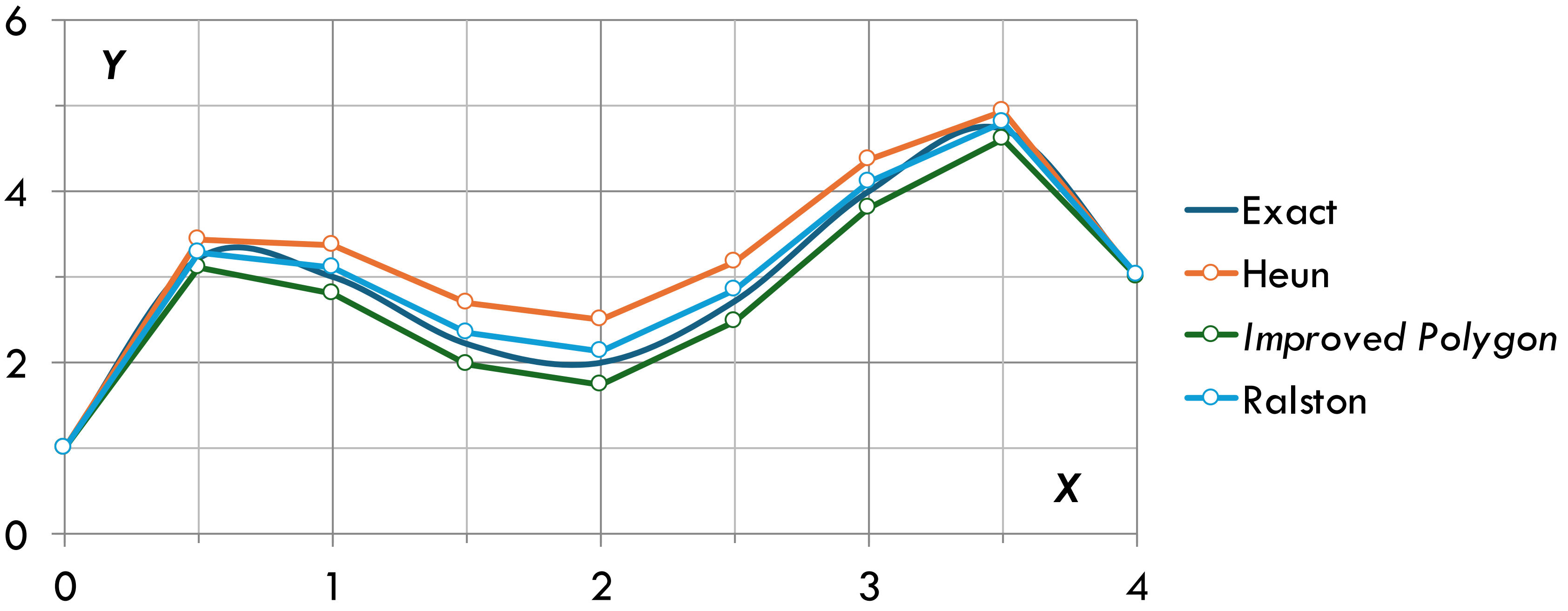
Second-order Runge-Kutta Method

Improved Polygon							
i	x_i	$y_{i\ (eksak)}$	k_1	k_2	ϕ	y_i	ε_t
0	0	1	8.5	4.21875	4.21875	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-0.59375	-0.59375	3.109375	3.4%
2	1	3	-1.5	-1.65625	-1.65625	2.8125	6.3%
3	1.5	2.21875	-1.25	-0.46875	-0.46875	1.984375	10.6%
4	2	2	0.5	1.46875	1.46875	1.75	12.5%
5	2.5	2.71875	2.25	2.65625	2.65625	2.484375	8.6%
6	3	4	2.5	1.59375	1.59375	3.8125	4.7%
7	3.5	4.71875	-0.25	-3.21875	-3.21875	4.609375	2.3%
8	4	3	---	---	---	3	0.0%

Second-order Runge-Kutta Method

Second-order Ralston Runge-Kutta							
i	x_i	$y_{i\ (eksak)}$	k_1	k_2	ϕ	y_i	ε_t
0	0	1	8.5	2.582031	4.554688	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-1.15234	-0.35156	3.277344	-1.8%
2	1	3	-1.5	-1.51172	-1.50781	3.101563	-3.4%
3	1.5	2.21875	-1.25	0.003906	-0.41406	2.347656	-5.8%
4	2	2	0.5	1.894531	1.429688	2.140625	-7.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.660156	2.523438	2.855469	-5.0%
6	3	4	2.5	0.800781	1.367188	4.117188	-2.9%
7	3.5	4.71875	-0.25	-5.18359	-3.53906	4.800781	-1.7%
8	4	3	---	---	---	3.03125	-1.0%

Second-order Runge-Kutta Method



Third-order Runge-Kutta Method

- Persamaan penyelesaian ODE *3rd-order RK methods*

$$y_{i+1} = y_i + \left[\tfrac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)\right]h$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2\right)$$

- Catatan
  - Jika derivatif berupa fungsi x saja, maka *3rd-order RK* sama dengan persamaan Metode Simpson ⅓

Third-order Runge-Kutta Method

Third-order Runge-Kutta								
i	x_i	$y_{i\ (eksak)}$	k_1	k_2	k_3	ϕ	y_i	ε_t
0	0	1	8.5	4.219	1.25	4.438	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-0.594	-1.5	-0.438	3.21875	0.0%
2	1	3	-1.5	-1.656	-1.25	-1.563	3	0.0%
3	1.5	2.21875	-1.25	-0.469	0.5	-0.438	2.21875	0.0%
4	2	2	0.5	1.469	2.25	1.438	2	0.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.656	2.5	2.563	2.71875	0.0%
6	3	4	2.5	1.594	-0.25	1.438	4	0.0%
7	3.5	4.71875	-0.25	-3.219	-7.5	-3.438	4.71875	0.0%
8	4	3	---	---	---	---	3	0.0%

Fourth-order Runge-Kutta Method

- Persamaan penyelesaian ODE *4th-order RK methods*

$$y_{i+1} = y_i + \left[\tfrac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\right]h$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_2\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right)$$

- Catatan:
  - Jika derivatif berupa fungsi *x* saja, maka *4th-order RK* sama dengan persamaan Metode Simpson ⅓

Fourth-order Runge-Kutta Method

Fourth-order Runge-Kutta									
i	x_i	$y_{i\ (eksak)}$	k_1	k_2	k_3	k_4	ϕ	y_i	ε_t
0	0	1	8.5	4.219	4.219	1.25	4.44	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-0.594	-0.594	-1.5	-0.44	3.21875	0.0%
2	1	3	-1.5	-1.656	-1.656	-1.25	-1.56	3	0.0%
3	1.5	2.21875	-1.25	-0.469	-0.469	0.5	-0.44	2.21875	0.0%
4	2	2	0.5	1.469	1.469	2.25	1.44	2	0.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.656	2.656	2.5	2.56	2.71875	0.0%
6	3	4	2.5	1.594	1.594	-0.25	1.44	4	0.0%
7	3.5	4.71875	-0.25	-3.219	-3.219	-7.5	-3.44	4.71875	0.0%
8	4	3	---	---	---	---	---	3	0.0%

3rd- and 4th-order Runge-Kutta Methods

- Pakailah *3rd-order* dan *4th-order RK methods* untuk mengintegralkan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang langkah $h = 0.5$

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di titik $x = 0$, $y = 1$

3rd- and 4th-order Runge-Kutta Methods

Node	Exact Solution		Third-order RK		Fourth-order RK	
i	x_i	y_i	y_i	ε_t	y_i	ε_t
0	0	1	1	0.0%	1	0.0%
1	0.5	3.21875	3.21875	0.0%	3.21875	0.0%
2	1	3	3	0.0%	3	0.0%
3	1.5	2.21875	2.21875	0.0%	2.21875	0.0%
4	2	2	2	0.0%	2	0.0%
5	2.5	2.71875	2.71875	0.0%	2.71875	0.0%
6	3	4	4	0.0%	4	0.0%
7	3.5	4.71875	4.71875	0.0%	4.71875	0.0%
8	4	3	3	0.0%	3	0.0%

Sekian