



UNIVERSITAS GADJAH MADA
FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Ordinary Differential Equations – ODE

Persamaan Diferensial Biasa

□ Acuan

- Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 19 dan 20, hlm. 576-640.

Persamaan Diferensial

3

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$F_U = -c v$$



$$F_D = m g$$

- Benda bermassa m jatuh bebas berkecepatan v

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_D + F_U}{m}$$

Hukum Newton II

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v$$

$c = \text{drag coefficient (kg/s)}$

$g = \text{gravitational acceleration (m/s}^2\text{)}$



persamaan diferensial

$\frac{dv}{dt}$ suku diferensial laju perubahan (*rate of change*)

Persamaan Diferensial

$$F_U = -c v$$



$$F_D = m g$$

□ Sebuah benda jatuh bebas

- Jika pada saat awal benda dalam keadaan diam

$$v(t = 0) = 0 \quad \text{syarat awal (initial conditions)}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v$$



$$v(t) = \frac{gm}{c} [1 - e^{-(c/m) t}]$$

Persamaan Diferensial

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

- Persamaan diferensial
 - v variabel tak bebas (*dependent variable*)
 - t variabel bebas (*independent variable*)
- Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations, ODE*)
 - hanya terdiri dari satu variabel bebas $\rightarrow t$
- Persamaan diferensial parsial (*partial differential equations, PDE*)
 - terdiri dari dua atau lebih variabel bebas $\rightarrow t, x$

Persamaan Diferensial

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- Persamaan diferensial
 - orde tertinggi suku derivatif
- Persamaan diferensial tingkat-1
 - suku derivatif orde-1
- Persamaan diferensial orde-2
 - suku derivatif orde-2

Persamaan Diferensial Biasa

□ Beberapa contoh ODE di bidang *engineering*

□ Hukum Newton II tentang gerak $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$

□ Hukum Fourier tentang termal $\Rightarrow \text{Heat flux} = -k \frac{dT}{dx}$

□ Hukum Fick tentang difusi massa $\Rightarrow \text{Mass flux} = -D \frac{dC}{dx}$

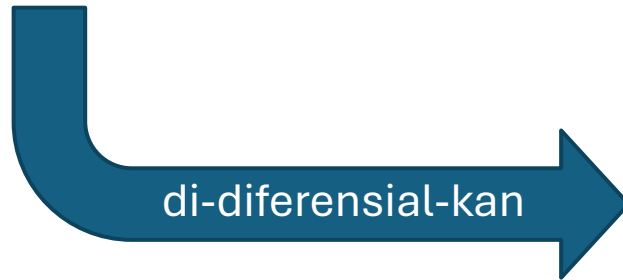
Persamaan Diferensial Biasa

8

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

diketahui
fungsi polinomial orde 4

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$



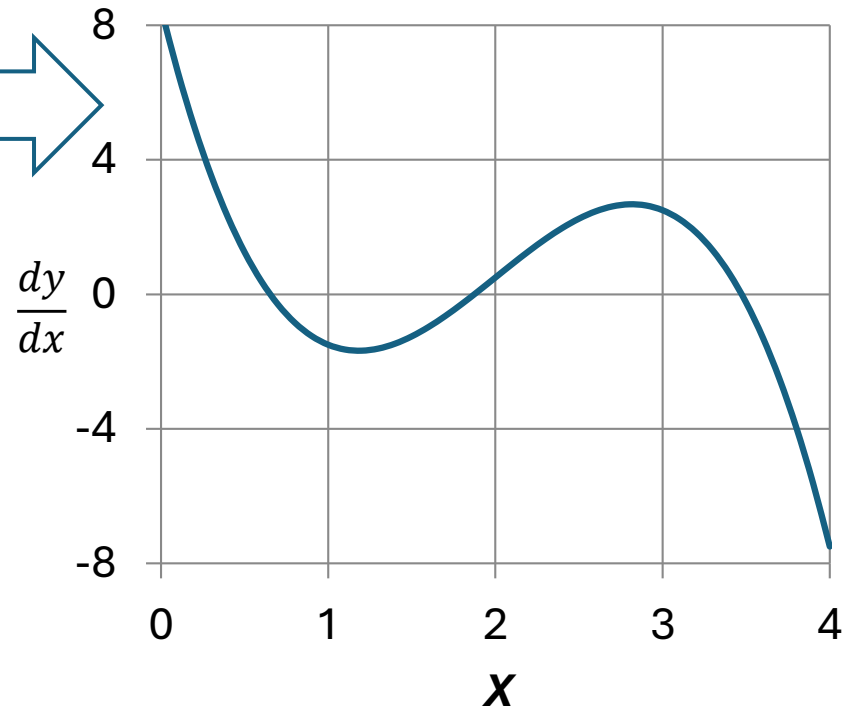
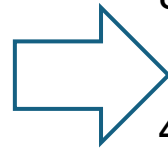
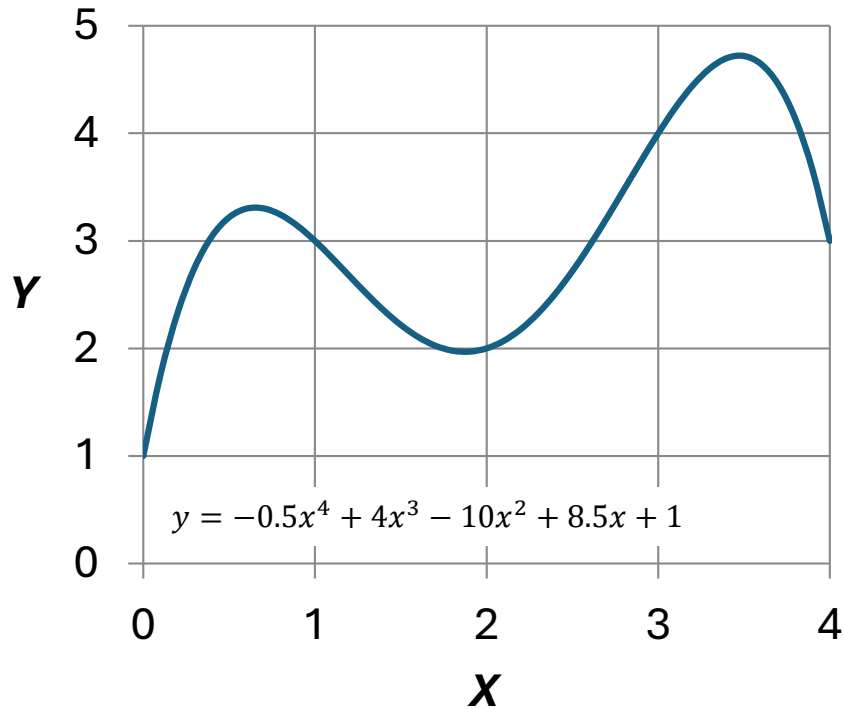
diperoleh ODE

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Persamaan Diferensial Biasa

9

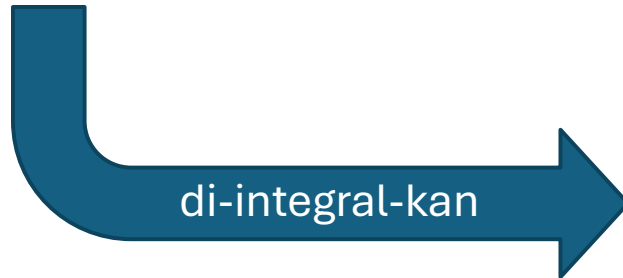
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Persamaan Diferensial Biasa

diketahui ODE

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$



fungsi asal

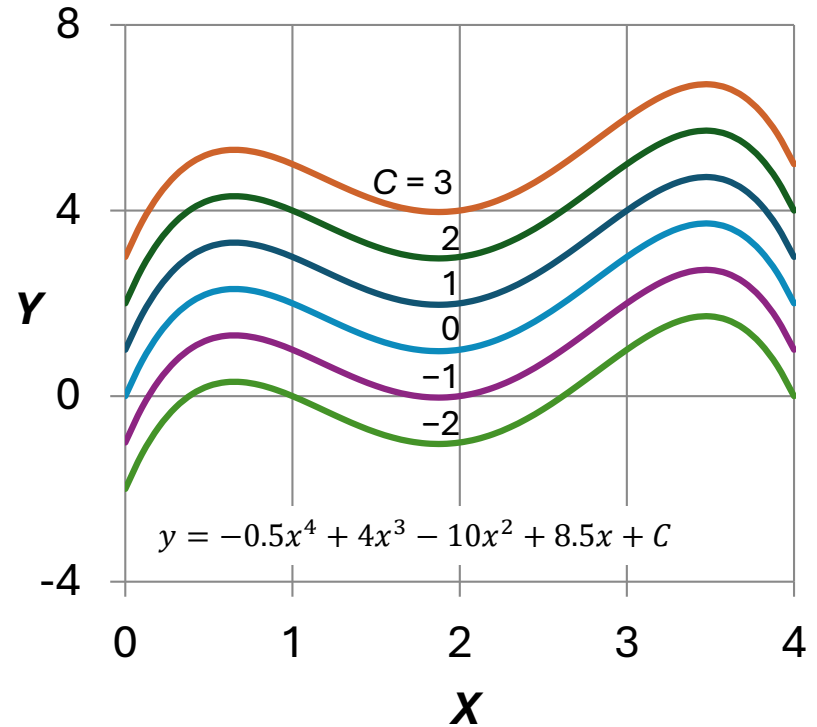
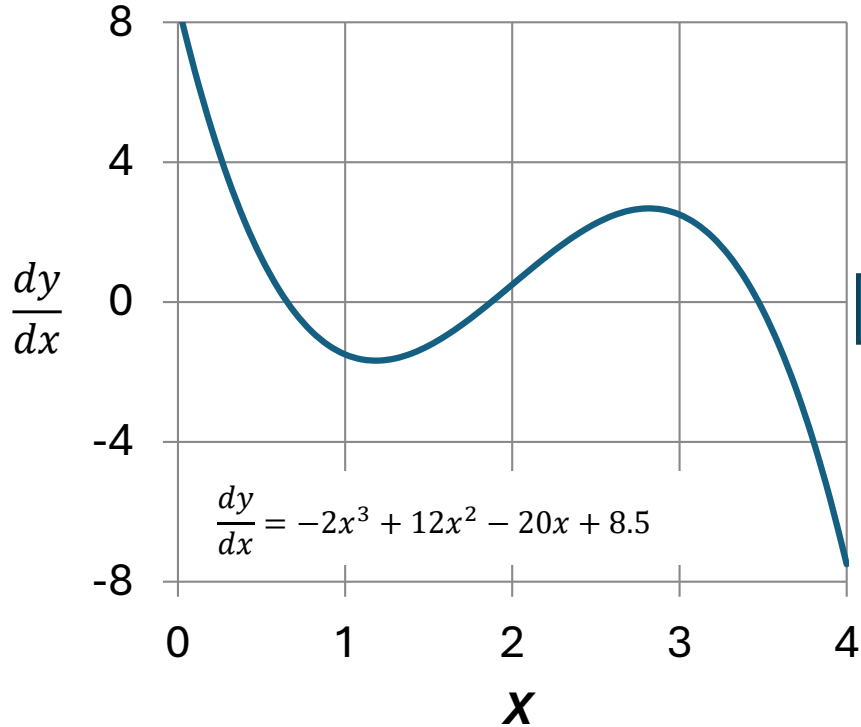
$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5)dx$$
$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

C disebut konstanta integrasi

Persamaan Diferensial Biasa

11

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Persamaan Diferensial Biasa

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

- Hasil dari integrasi adalah sejumlah tak berhingga polinomial
- Penyelesaian yang *unique* (tunggal, satu-satunya) diperoleh dengan menerapkan suatu syarat, yaitu di titik awal $x = 0, y = 1 \rightarrow$ ini disebut istilah **syarat awal (*initial conditions*)**
- Syarat awal tersebut menghasilkan $C = 1$

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Persamaan Diferensial Biasa

- ❑ Syarat awal (*initial conditions*)
 - ❑ mencerminkan keadaan sebenarnya, memiliki arti fisik
 - ❑ pada persamaan diferensial orde n , maka dibutuhkan sejumlah n syarat awal
- ❑ Syarat batas (*boundary conditions*)
 - ❑ syarat yang harus dipenuhi tidak hanya di satu titik saat awal saja, namun juga di titik-titik lain atau di beberapa nilai variabel bebas yang lain

Persamaan Diferensial Biasa

- ❑ Metode penyelesaian ODE
 - ❑ Metode Euler
 - ❑ Metode Heun
 - ❑ Metode Euler Modifikasi (Metode Poligon)
 - ❑ Metode Runge-Kutta

15

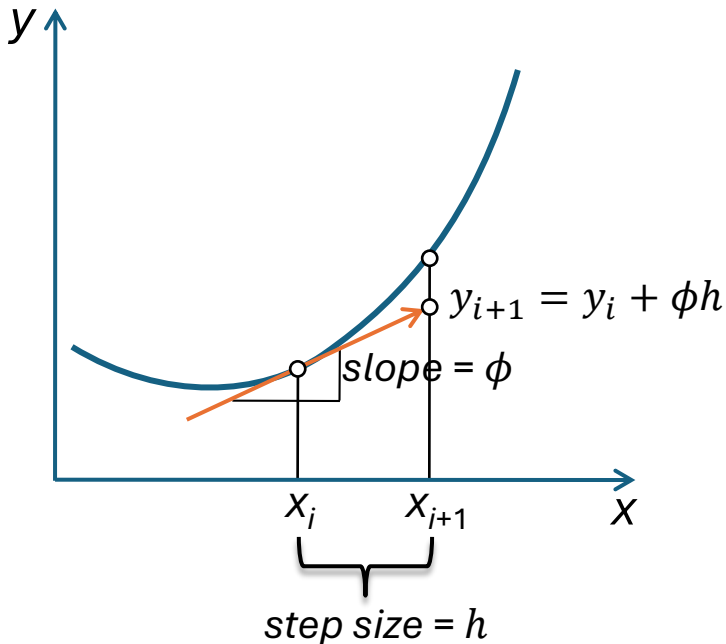
Penyelesaian ODE

Metode Euler

Metode Satu Langkah

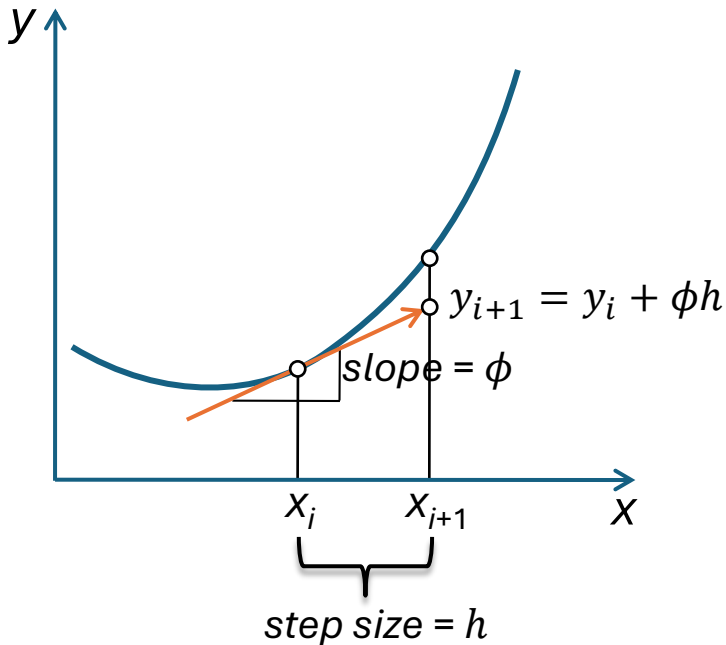
16

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Dikenal pula sebagai metode satu langkah (*one-step method*)
- Persamaan
 - $new\ value = old\ value + slope \times step\ size$
- Dalam bahasa matematika
$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$
 - jadi, *slope* atau gradien ϕ dipakai untuk meng-ekstrapolasi-kan nilai lama y_i ke nilai baru y_{i+1} dalam selang h

Metode Satu Langkah



$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

- Semua metode satu langkah dapat dinyatakan dalam persamaan tsb.
- Perbedaan antara satu metode dengan metode yang lain dalam metode satu langkah ini adalah perbedaan dalam menetapkan atau memperkirakan **slope ϕ**
- Salah satu metode satu langkah adalah **Metode Euler**

Metode Euler

- ❑ Dalam Metode Euler, slope di x_i diperkirakan dengan derivatif pertama di titik (x_i, y_i)
- ❑ Metode Euler dikenal pula dengan nama Metode Euler-Cauchy
- ❑ Jadi, nilai y baru diperkirakan berdasarkan *slope*, sama dengan derivatif pertama di titik x , untuk mengekstrapolasikan nilai y lama secara linear dalam selang h ke nilai y baru

$$\phi = f(x_i, y_i) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_i, y_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Metode Euler

- Pakailah Metode Euler untuk mengintegrasikan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang langkah $h = 0.5$

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di titik $x = 0$, $y = 1$
- Ingat, penyelesaian eksak ODE di atas adalah

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Metode Euler

- Selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + 0.5$

$$f(x_0, y_0) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \phi h = y_0 + f(x_0, y_0)h \\ &= 1 + 8.5(0.5) = 5.25\end{aligned}$$

- Nilai y_1 sesungguhnya dari penyelesaian eksak

$$\begin{aligned}y_1 &= -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 \\ &= 3.21875\end{aligned}$$

- *Error*, yaitu selisih antara nilai y_1 sesungguhnya dan nilai y_1 estimasi

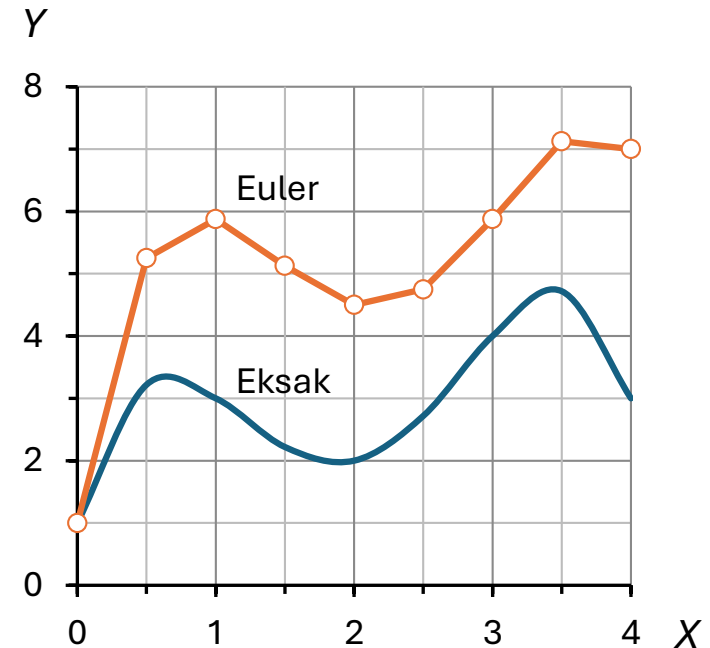
$$E_t = 3.21875 - 5.25 = -2.03125 \quad \text{atau} \quad \varepsilon_t = -2.03125/3.21875 = 63\%$$

Metode Euler

21

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	x_i	y_i	ϕ_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$y_{i(\text{eksak})}$	ε_i
0	0	1	8.5	0.5	5.25	1	0.000
1	0.5	5.25	1.25	1	5.875	3.219	2.031
2	1	5.875	-1.5	1.5	5.125	3.000	2.875
3	1.5	5.125	-1.25	2	4.5	2.219	2.906
4	2	4.5	0.5	2.5	4.75	2.000	2.500
5	2.5	4.75	2.25	3	5.875	2.719	2.031
6	3	5.875	2.5	3.5	7.125	4.000	1.875
7	3.5	7.125	-0.25	4	7	4.719	2.406
8	4	7	---	---	---	3.000	4.000



Metode Euler

- ❑ *Error* atau kesalahan terdiri dari dua aspek
 - ❑ *Truncation or discretization errors* (kesalahan pemotongan) yang disebabkan oleh cara penyelesaian dalam mengestimasi nilai y
 - *local truncation error*, yaitu kesalahan pada satu langkah
 - *propagated truncation error*, yaitu kesalahan-kesalahan pada langkah-langkah terdahulu
 - ❑ *Round-off errors* yang disebabkan oleh keterbatasan jumlah digit dalam hitungan atau jumlah digit dalam alat hitung (kalkulator, komputer)

Metode Euler

$$y' = f(x, y) = \frac{dy}{dx}$$

Deret Taylor

$$y_{i+1} = y_i + y'h + \frac{y''}{2}h^2 + \dots + \frac{y^{(n)}}{n!}h^n + R_n \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

ξ adalah sembarang titik di antara x_i dan x_{i+1} .

Deret Taylor dapat pula dituliskan dalam bentuk lain sbb.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

$O(h^{n+1})$ menyatakan bahwa *local truncation error* adalah proporsional terhadap selang jarak dipangkatkan $(n + 1)$

Metode Euler

Deret Taylor

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{f(x_i, y_i)h}_{\text{Euler}} + \underbrace{\frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})}_{\text{Error, } E_t}$$

- ❑ *true local truncation error of the Euler Method (E_t)*
- ❑ untuk selang h kecil, *error* mengecil seiring dengan peningkatan tingkat
- ❑ *error E_t dapat didekati dengan E_a*

$$E_t \approx E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 \quad \text{atau} \quad E_a = O(h^2)$$

Metode Euler

$$y' = f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Hitunglah *error* yang terjadi (E_t) dalam penyelesaian ODE tersebut; hitunglah komponen *error* tiap suku persamaan E_t .
- Selesaikan ODE tersebut memakai $h = 0.25$; bandingkan dengan penyelesaian sebelumnya; bandingkan juga *error* yang terjadi.
- Baca buku acuan pada hlm 580-584 untuk membantu Sdr dalam membuat diskusi hasil hitungan Sdr.

Metode Euler

- ❑ *Error* pada Metode Euler dapat dihitung dengan memanfaatkan Deret Taylor
- ❑ Keterbatasan
 - ❑ Deret Taylor hanya memberikan perkiraan/estimasi *local truncation error*, yaitu *error* yang timbul pada satu langkah hitungan Metode Euler, bukan *propagated truncation error*
 - ❑ Hanya mudah dipakai apabila ODE berupa fungsi polinomial sederhana yang mudah untuk di-diferensial-kan, $f_i(x_i, y_i) = \phi_i$ mudah ditemukan
- ❑ Perbaiki Metode Euler, memperkecil *error*
 - ❑ Pakailah selang h kecil
 - ❑ Metode Euler tidak memiliki *error* apabila ODE berupa fungsi linear

27

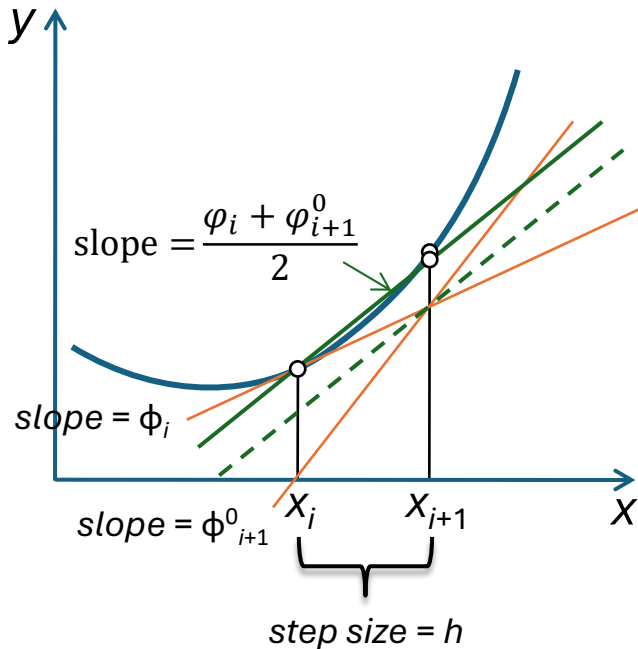
Penyelesaian ODE

Metode Heun

Metode Heun

28

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Slope di selang antara x_i dan di x_{i+1} ditetapkan sebagai nilai rerata *slope* di awal dan di akhir selang, yaitu di x_i dan di x_{i+1}

$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h \quad \text{Euler} \rightarrow \text{prediktor}$$

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$

$$\bar{y}'_i = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} \quad \rightarrow \text{korektor}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Metode Heun

- Pakailah Metode Heun untuk mengintegrasikan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang Langkah $h = 1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di $x = 0, y = 2$
- Penyelesaian eksak ODE tsb., yang diperoleh dari kalkulus, adalah

$$y = \frac{4}{1.3} (e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + 2e^{-0.5x}$$

Metode Heun

- Selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + h = 1$

$$f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4[e^{0.8(0)}] - 0.5(2) = 3$$

slope di titik ujung awal, (x_0, y_0)

$$y_1^0 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 2 + 3(1) = 5$$

Prediktor y_1

$$f(x_1, y_1^0) = f(1, 5) = 4[e^{0.8(1)}] - 0.5(5) = 6.4021637$$

slope di titik ujung akhir, (x_1, y_1)

$$\bar{y}' = \frac{3 + 6.4021637}{2}$$

slope rerata selang ke-1

$$y_1 = y_0 + \bar{y}'h = 2 + 4.70108185(1) = 6.7010819$$

Korektor y_1

Metode Heun

31

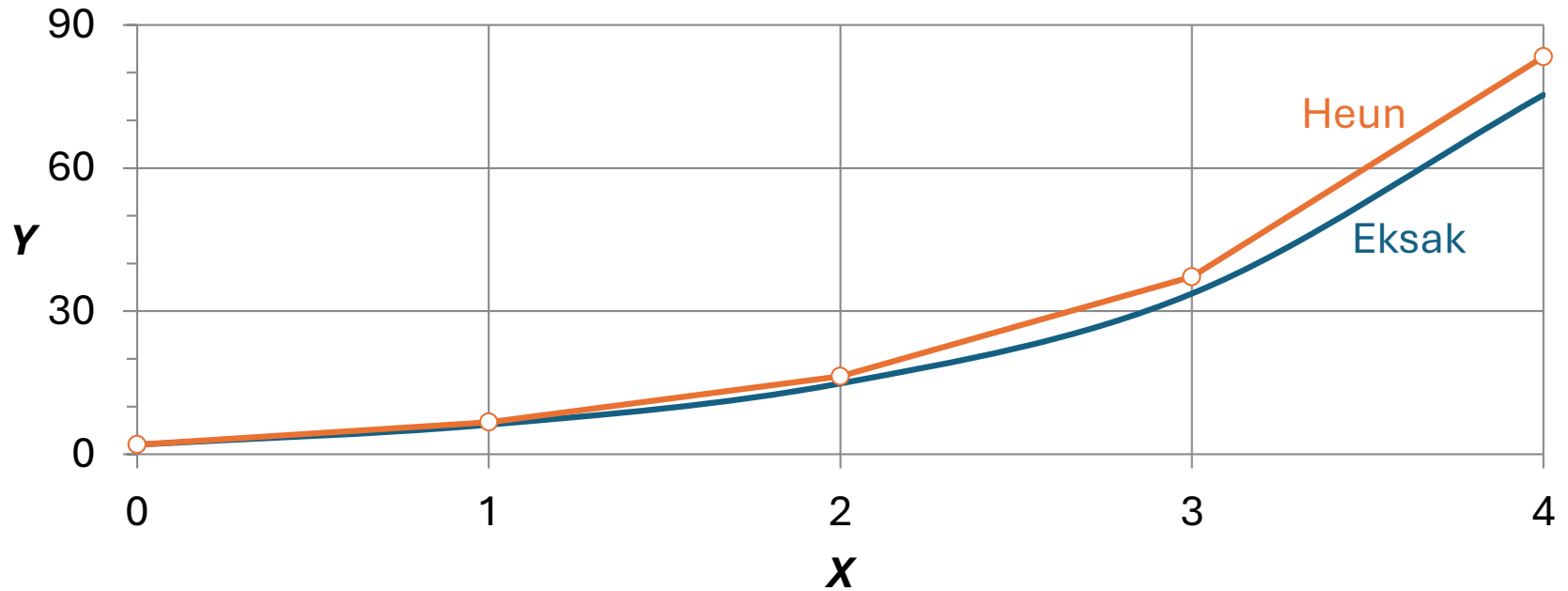
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	x_i	y_i	$y'_i = \phi_i$	x_{i+1}	y_{i+1}^{pred}	$y'_{i+1} = \phi_{i+1}$	$\bar{\phi}$	y_{i+1}^{kor}
0	0	2	3	0.5	3.500	4.217	3.609	3.804
1	0.5	3.804	4.065	1	5.837	5.984	5.024	6.317
2	1	6.317	5.744	1.5	9.188	8.686	7.215	9.924
3	1.5	9.924	8.318	2	14.083	12.770	10.544	15.196
4	2	15.196	12.214	2.5	21.303	18.905	15.559	22.976
5	2.5	22.976	18.068	3	32.010	28.088	23.078	34.515
6	3	34.515	26.835	3.5	47.933	41.812	34.324	51.677
7	3.5	51.677	39.940	4	71.647	62.307	51.123	77.239
8	4	77.239	---	---	---	---	---	---

Metode Heun

32

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

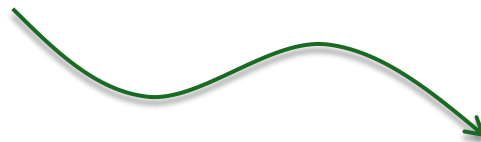


Metode Heun

33

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Metode Heun dapat diterapkan secara iteratif pada saat menghitung *slope* di ujung akhir selang dan nilai y_{i+1} korektor
 - ❑ Nilai y_{i+1} korektor pertama dihitung berdasarkan nilai y_{i+1} prediktor
 - ❑ Nilai y_{i+1} korektor tersebut dipakai sebagai nilai y_{i+1} prediktor
 - ❑ hitung kembali nilai y_{i+1} korektor yang baru
 - ❑ ulangi kedua langkah terakhir tersebut beberapa kali
- ❑ Perlu dicatat bahwa
 - ❑ *error* belum tentu selalu berkurang dalam tiap langkah iterasi
 - ❑ iterasi tidak selalu konvergen

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Metode Heun

- Iterasi kedua dalam selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + h = 1$

$$y_1^0 = y_{1(\text{old})} = 6.7010819 \quad \longrightarrow \quad \text{Prediktor } y_1 = \text{korektor } y_{1(\text{lama})}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1^0) &= f(1, 6.7010819) \quad \longrightarrow \quad \text{slope di titik ujung akhir, } (x_i, y_i) \\ &= 4[e^{0.8(1)}] - 0.5(6.7010819) \\ &= 5.5516228 \end{aligned}$$

$$\bar{y}' = \frac{3 + 5.5516228}{2} \quad \longrightarrow \quad \text{slope rerata selang ke-1}$$

$$y_1 = y_0 + \bar{y}'h = 2 + 4.27581145(1) = 6.2758114 \quad \longrightarrow \quad \text{korektor } y_1$$

- Iterasi di atas dapat dilakukan beberapa kali

Penyelesaian ODE

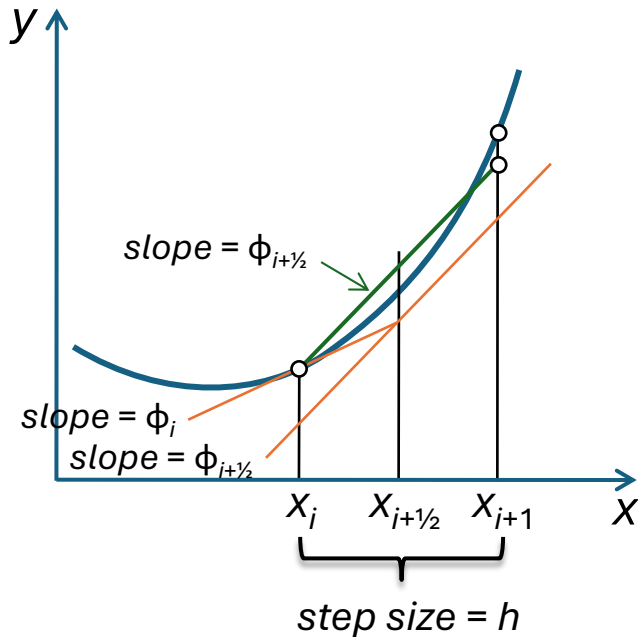
Metode Poligon

(Modified Euler Method)

Metode Poligon

36

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Slope dalam selang antara x_i dan di x_{i+1} ditetapkan sebagai nilai slope di titik tengah selang, yaitu di $x_{i+\frac{1}{2}}$

$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

slope di titik awal

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2}$$

ekstrapolasi ke titik tengah

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

slope di titik tengah

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})h$$

ekstrapolasi ke titik akhir

Metode Poligon

- Pakailah Metode Poligon untuk mengintegrasikan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$ dengan selang langkah $h = 1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di $x = 0$, $y = 2$
- Ingat, penyelesaian eksak ODE tsb. yang diperoleh dari kalkulus adalah

$$y = \frac{4}{1.3} (e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + 2e^{-0.5x}$$

Metode Poligon

- Selang ke-1, dari $x_0 = 0$ s.d. $x_1 = x_0 + h = 1$

$$f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4[e^{0.8(0)}] - 0.5(2) = 3 \quad \longrightarrow \text{slope di titik ujung awal, } (x_0, y_0)$$

$$y_{1/2} = y_0 + f(x_0, y_0) \frac{h}{2} = 2 + 3(1/2) = 3.5 \quad \longrightarrow \text{titik tengah } y_{1/2}$$

$$f(x_{1/2}, y_{1/2}) = f(0.5, 3.5) = 4[e^{0.8(0.5)}] - 0.5(3.5) = 4.2173 \quad \text{slope di titik tengah, } (x_{1/2}, y_{1/2})$$

$$y_1 = y_0 + f(x_{1/2}, y_{1/2})h = 2 + 4.2173(1) = 6.2173 \quad \longrightarrow \text{ekstrapolasikan } y_0 \text{ ke } y_1$$

Metode Poligon

39

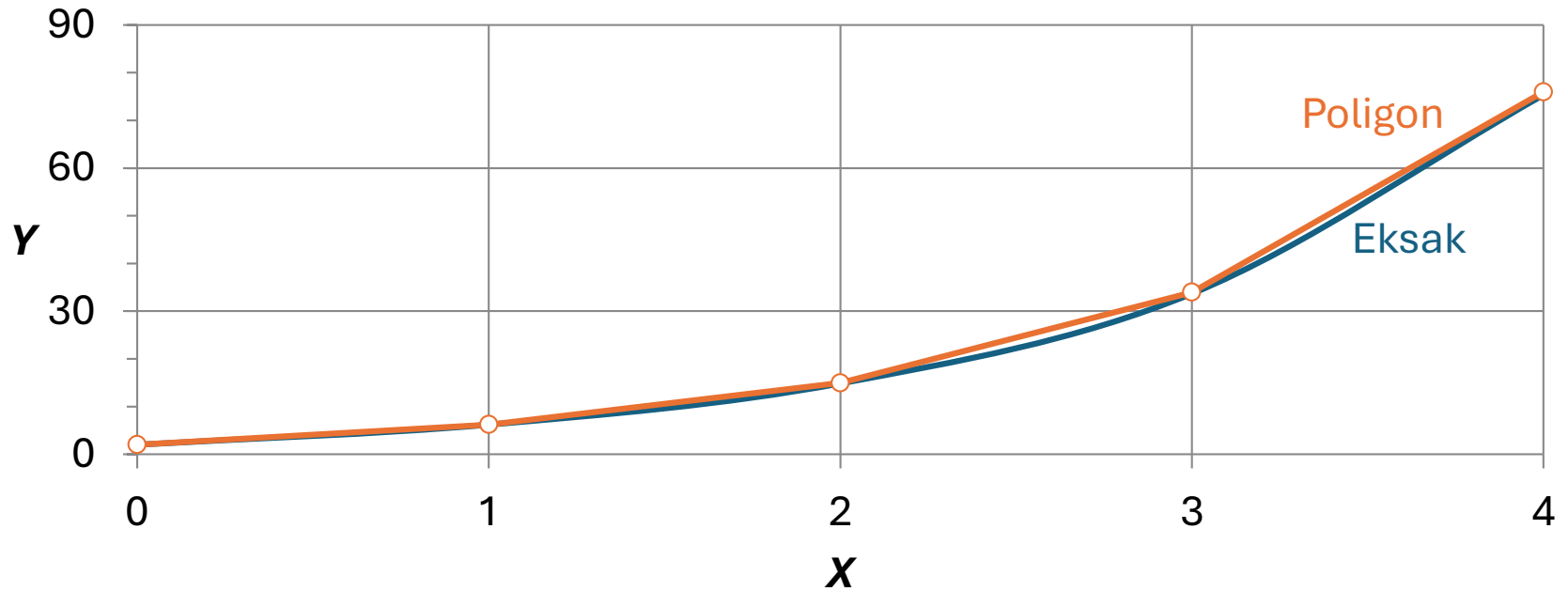
<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

i	x_i	$y_i(\text{eksak})$	$f(x_i, y_i)$	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$	y_i	ϵ_t
0	0	2	3	---	---	---	2	---
1	1	6.1946	5.7935	0.5	3.5000	4.2173	6.2173	-0.4%
2	2	14.8439	12.3418	1.5	9.1141	8.7234	14.9407	-0.7%
3	3	33.6772	27.1221	2.5	21.1116	19.0004	33.9412	-0.8%
4	4	75.3390	---	3.5	47.5022	42.0275	75.9686	-0.8%

Metode Poligon

40

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



41

Penyelesaian ODE

Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta

❑ Metode Euler

- ❑ kurang teliti
- ❑ ketelitian lebih baik diperoleh dengan cara memakai pias kecil atau memakai suku-suku derivatif berorde tinggi dalam Deret Taylor

❑ Metode Runge-Kutta

- ❑ lebih teliti daripada Metode Euler
- ❑ tanpa memerlukan suku derivatif

Metode Runge-Kutta

- Bentuk umum penyelesaian ODE dengan Metode Runge-Kutta adalah

$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) h$ $\phi(x_i, y_i, h)$ adalah *increment function* yang dapat diinterpretasikan sebagai *slope* atau gradien fungsi y dalam selang antara x_i s.d. x_{i+1}

- Fungsi ϕ dapat dituliskan dalam bentuk umum sbb.

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

a adalah konstanta dan k adalah

tiap k saling terhubung dengan k yang lain $\rightarrow k_1$ muncul dalam pers k_2 dan k_2 muncul dalam pers k_3 dst.

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$k_n = f\left(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h\right)$$

Metode Runge-Kutta

- Terdapat beberapa jenis Metode Runge-Kutta yang dibedakan dari jumlah suku dalam persamaan untuk menghitung ϕ
 - RK orde-1 (*first-order* RK) $n = 1$
 - RK orde-2 (*second-order* RK) $n = 2$
 - RK orde-3 (*third-order* RK) $n = 3$
 - RK orde-4 (*fourth-order* RK) $n = 4$

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) h$$
$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

- Order of magnitude* kesalahan penyelesaian Metode RK orde n
 - local truncation error* = $O(h^{n+1})$
 - global truncation error* = $O(h^n)$

Second-order Runge-Kutta Method

- Bentuk umum persamaan penyelesaian ODE menggunakan *2nd-order* RK

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \quad k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

a_1, a_2, p_1, q_{11} unknowns \rightarrow perlu 4 persamaan

- Deret Taylor

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + f'(x_i, y_i) \frac{h^2}{2} \longrightarrow f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2}$$

Second-order Runge-Kutta Method

- Ingat, Deret Taylor untuk fungsi yang memiliki 2 variabel

$$g(x + r, y + s) = g(x, y) + r \frac{\partial g}{\partial x} + s \frac{\partial g}{\partial y} + \dots$$

- Bentuk di atas diterapkan ke persamaan k_2

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

- Bentuk umum penyelesaian ODE metode *2nd-order* RK menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i, y_i) + a_2 h f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x} + O(h^3)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \{a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)\} h + \left\{ a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} h^2 + O(h^3)$$

Second-order Runge-Kutta Method

- Bandingkan persamaan di atas dengan persamaan semula

$$y_{i+1} = y_i + \{a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)\}h + \left\{ a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} h^2 + O(h^3)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2}$$

- Agar kedua persamaan di atas ekuivalen, maka

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = 1/2$$

$$a_2 q_{11} = 1/2$$



- Karena hanya ada 3 persamaan untuk 4 *unknowns*, maka nilai salah satu variabel harus ditetapkan.
- Misalnya, nilai a_2 ditetapkan, maka a_1 , p_1 , dan q_{11} dapat dihitung.

Second-order Runge-Kutta Method

- Jika a_2 ditetapkan, maka

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = 1/2 \\ a_2 q_{11} = 1/2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 1 - a_2 \\ p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \end{array}$$

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

- Karena ada sejumlah tak berhingga nilai a_2 , maka terdapat pula sejumlah tak berhingga *2nd-order* RK methods.
- Setiap versi *2nd-order* RK akan memberikan hasil yang persis sama jika fungsi penyelesaian ODE yang dicari adalah fungsi kuadrat, linear, atau konstanta.

Second-order Runge-Kutta Method

- Metode Heun dengan korektor tunggal

$$a_2 = 1/2 \Rightarrow a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 1 \quad y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) h \quad \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{aligned}$$

- Metode poligon yang diperbaiki (*improved polygon method*)

$$a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0, \quad p_1 = q_{11} = 1/2 \quad y_{i+1} = y_i + k_2 h \quad \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \end{aligned}$$

- Metode Ralston

$$a_2 = 2/3 \Rightarrow a_1 = 1/3, \quad p_1 = q_{11} = 3/4 \quad y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right) h \quad \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hk_1\right) \end{aligned}$$

Second-order Runge-Kutta Method

- Pakailah berbagai *2nd-order RK methods* untuk mengintegalkan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$, selang langkah $h = 0.5$

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb. adalah bahwa di titik $x = 0$, $y = 1$
- Bandingkan hasil-hasil penyelesaian dengan berbagai metode RK tsb.

Second-order Runge-Kutta Method

51

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Single-corrector Heun							
i	x_i	y_i (eksak)	k_1	k_2	ϕ	y_i	ϵ_t
0	0	1	8.5	1.25	4.875	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-1.5	-0.125	3.4375	-6.8%
2	1	3	-1.5	-1.25	-1.375	3.375	-12.5%
3	1.5	2.21875	-1.25	0.5	-0.375	2.6875	-21.1%
4	2	2	0.5	2.25	1.375	2.5	-25.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.5	2.375	3.1875	-17.2%
6	3	4	2.5	-0.25	1.125	4.375	-9.4%
7	3.5	4.71875	-0.25	-7.5	-3.875	4.9375	-4.6%
8	4	3	---	---	---	3	0.0%

Second-order Runge-Kutta Method

<i>Improved Polygon</i>							
i	x_i	y_i (eksak)	k_1	k_2	ϕ	y_i	ϵ_t
0	0	1	8.5	4.21875	4.21875	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-0.59375	-0.59375	3.109375	3.4%
2	1	3	-1.5	-1.65625	-1.65625	2.8125	6.3%
3	1.5	2.21875	-1.25	-0.46875	-0.46875	1.984375	10.6%
4	2	2	0.5	1.46875	1.46875	1.75	12.5%
5	2.5	2.71875	2.25	2.65625	2.65625	2.484375	8.6%
6	3	4	2.5	1.59375	1.59375	3.8125	4.7%
7	3.5	4.71875	-0.25	-3.21875	-3.21875	4.609375	2.3%
8	4	3	---	---	---	3	0.0%

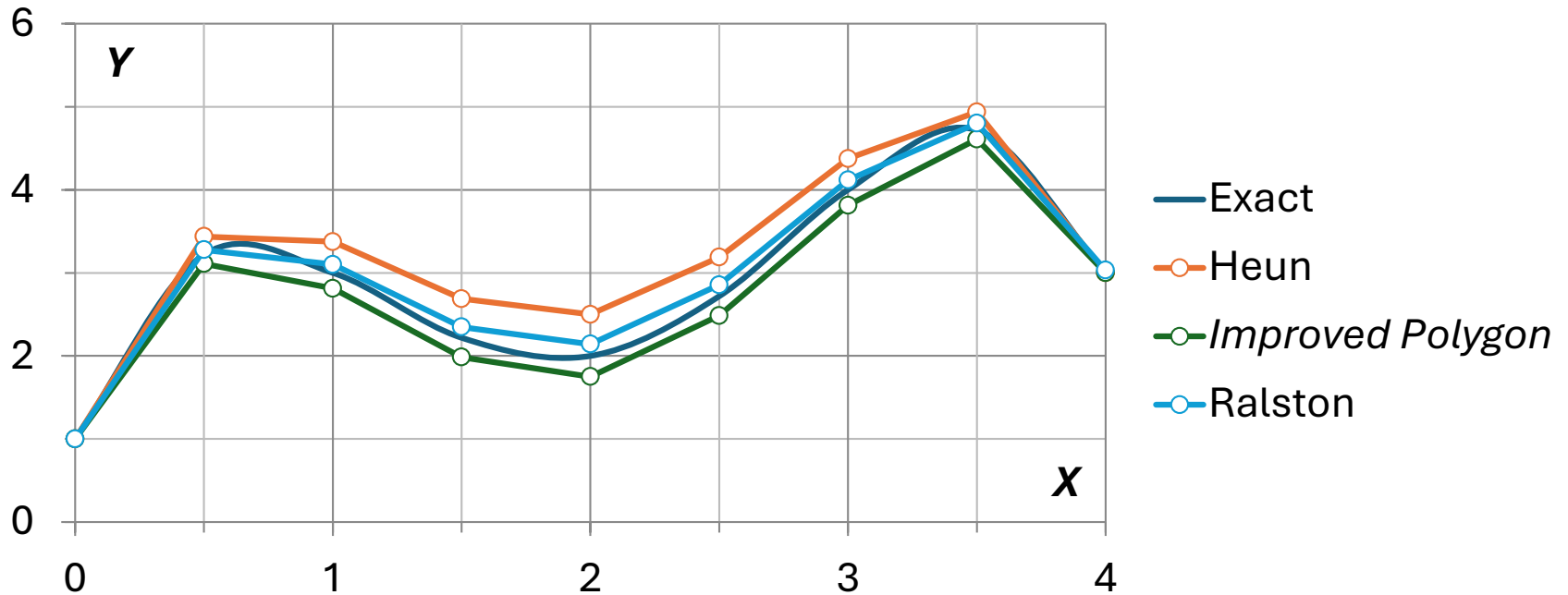
Second-order Runge-Kutta Method

<i>Second-order Ralston Runge-Kutta</i>							
i	x_i	y_i (eksak)	k_1	k_2	ϕ	y_i	ϵ_t
0	0	1	8.5	2.582031	4.554688	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-1.15234	-0.35156	3.277344	-1.8%
2	1	3	-1.5	-1.51172	-1.50781	3.101563	-3.4%
3	1.5	2.21875	-1.25	0.003906	-0.41406	2.347656	-5.8%
4	2	2	0.5	1.894531	1.429688	2.140625	-7.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.660156	2.523438	2.855469	-5.0%
6	3	4	2.5	0.800781	1.367188	4.117188	-2.9%
7	3.5	4.71875	-0.25	-5.18359	-3.53906	4.800781	-1.7%
8	4	3	---	---	---	3.03125	-1.0%

Second-order Runge-Kutta Method

54

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Third-order Runge-Kutta Method

- Persamaan penyelesaian ODE *3rd-order RK methods*

$$y_{i+1} = y_i + \left\{ \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \right\} h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$$

- Catatan
 - Jika derivatif berupa fungsi x saja, maka *3rd-order RK* sama dengan persamaan Metode Simpson $\frac{1}{3}$

Third-order Runge-Kutta Method

Third-order Runge-Kutta

i	x_i	y_i (eksak)	k_1	k_2	k_3	ϕ	y_i	ϵ_t
0	0	1	8.5	4.219	1.25	4.438	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-0.594	-1.5	-0.438	3.21875	0.0%
2	1	3	-1.5	-1.656	-1.25	-1.563	3	0.0%
3	1.5	2.21875	-1.25	-0.469	0.5	-0.438	2.21875	0.0%
4	2	2	0.5	1.469	2.25	1.438	2	0.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.656	2.5	2.563	2.71875	0.0%
6	3	4	2.5	1.594	-0.25	1.438	4	0.0%
7	3.5	4.71875	-0.25	-3.219	-7.5	-3.438	4.71875	0.0%
8	4	3	---	---	---	---	3	0.0%

Fourth-order Runge-Kutta Method

- Persamaan penyelesaian ODE *4th-order RK methods*

$$y_{i+1} = y_i + \left\{ \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right\} h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

- Catatan:

- Jika derivatif berupa fungsi x saja, maka *4th-order RK* sama dengan persamaan Metode Simpson $\frac{1}{3}$

Fourth-order Runge-Kutta Method

<i>Fourth-order Runge-Kutta</i>									
i	x_i	y_i (eksak)	k_1	k_2	k_3	k_4	ϕ	y_i	ϵ_t
0	0	1	8.5	4.219	4.219	1.25	4.44	1	0.0%
1	0.5	3.21875	1.25	-0.594	-0.594	-1.5	-0.44	3.21875	0.0%
2	1	3	-1.5	-1.656	-1.656	-1.25	-1.56	3	0.0%
3	1.5	2.21875	-1.25	-0.469	-0.469	0.5	-0.44	2.21875	0.0%
4	2	2	0.5	1.469	1.469	2.25	1.44	2	0.0%
5	2.5	2.71875	2.25	2.656	2.656	2.5	2.56	2.71875	0.0%
6	3	4	2.5	1.594	1.594	-0.25	1.44	4	0.0%
7	3.5	4.71875	-0.25	-3.219	-3.219	-7.5	-3.44	4.71875	0.0%
8	4	3	---	---	---	---	---	3	0.0%

3rd- and 4th-order Runge-Kutta Methods

- Pakailah *3rd-order* dan *4th-order RK methods* untuk mengintegrasikan ODE di bawah ini, dari $x = 0$ s.d. $x = 4$, selang langkah $h = 0.5$

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Syarat awal yang diterapkan pada ODE tsb adalah bahwa di titik $x = 0$, $y = 1$

3rd- and 4th-order Runge-Kutta Methods

<i>Node</i>	<i>Exact Solution</i>		<i>Third-order RK</i>		<i>Fourth-order RK</i>	
<i>i</i>	x_i	y_i	y_i	ϵ_t	y_i	ϵ_t
0	0	1	1	0.0%	1	0.0%
1	0.5	3.21875	3.21875	0.0%	3.21875	0.0%
2	1	3	3	0.0%	3	0.0%
3	1.5	2.21875	2.21875	0.0%	2.21875	0.0%
4	2	2	2	0.0%	2	0.0%
5	2.5	2.71875	2.71875	0.0%	2.71875	0.0%
6	3	4	4	0.0%	4	0.0%
7	3.5	4.71875	4.71875	0.0%	4.71875	0.0%
8	4	3	3	0.0%	3	0.0%

Sekian