



UNIVERSITAS GADJAH MADA
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN
PRODI TEKNIK SIPIL

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Partial Differential Equations – PDE

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

❑ Acuan

- ❑ Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 23 dan 24, hlm. 707-749.

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- Suatu fungsi u yang bergantung pada x dan y : $u(x,y)$
 - Diferensial u terhadap x di sembarang titik (x,y)

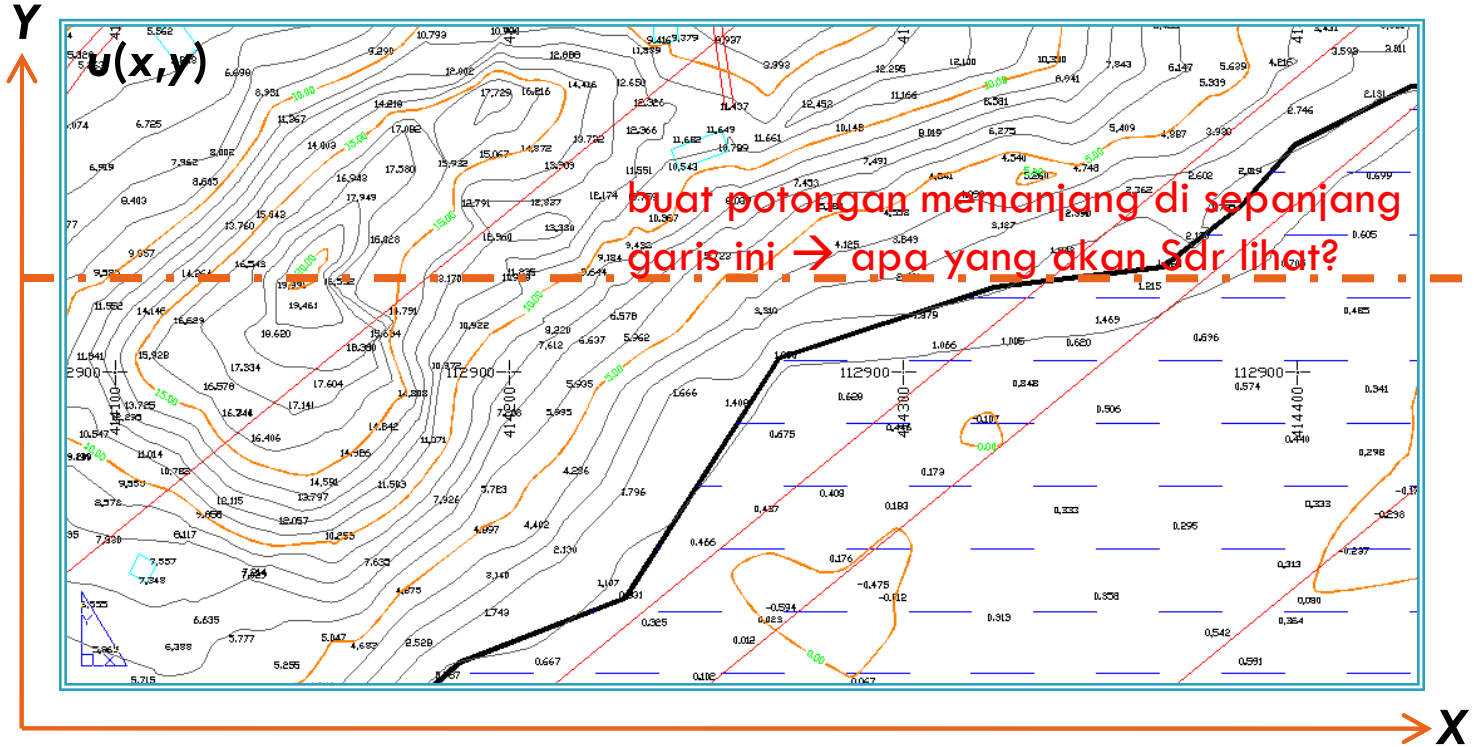
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

- Diferensial u terhadap y di sembarang titik (x,y)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

Contoh arti fisik:
 u elevasi tanah pada peta situasi.
 u ditunjukkan oleh garis-garis (kontour) elevasi tanah.



Persamaan Diferensial Parsial – PDE

5

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$(2) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

- ❑ Tingkat (*order*) PDE adalah tingkat tertinggi suku derivatif
- ❑ PDE merupakan fungsi linear apabila
 - ❑ fungsi tsb linear pada u dan derivatif u , dan
 - ❑ koefisien persamaan tsb hanya bergantung pada variabel bebas (x atau y) atau konstanta

PDE	Order	Linear
(1)	2	ya
(2)	3	ya
(3)	3	tidak
(4)	2	tidak

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

6

<https://istiarito.staff.ugm.ac.id>

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D = 0$$

A, B, C : fungsi x dan y

D : fungsi $x, y, u, \partial u/\partial x$, dan $\partial u/\partial y$

$B^2 - 4AC$	kategori
< 0	eliptik
$= 0$	parabolik
> 0	hiperbolik

- ❑ PDE yang dibahas pada makul Metode Numeris I hanya PDE linear bertingkat dua
- ❑ PDE linear bertingkat dua dan fungsi dua variabel bebas (x, y) dapat dikelompokkan menjadi:
 - ❑ eliptik
 - ❑ parabolik
 - ❑ hiperbolik

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

7

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$B^2 - 4AC$	Kategori	Nama	Persamaan
< 0	Eliptik	Persamaan Laplace (permanen, 2D spasial)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabolik	Persamaan konduksi panas (tak-permanen, 1D spasial)	$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$
> 0	Hiperbolik	Persamaan gelombang (tak-permanen, 1D spasial)	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

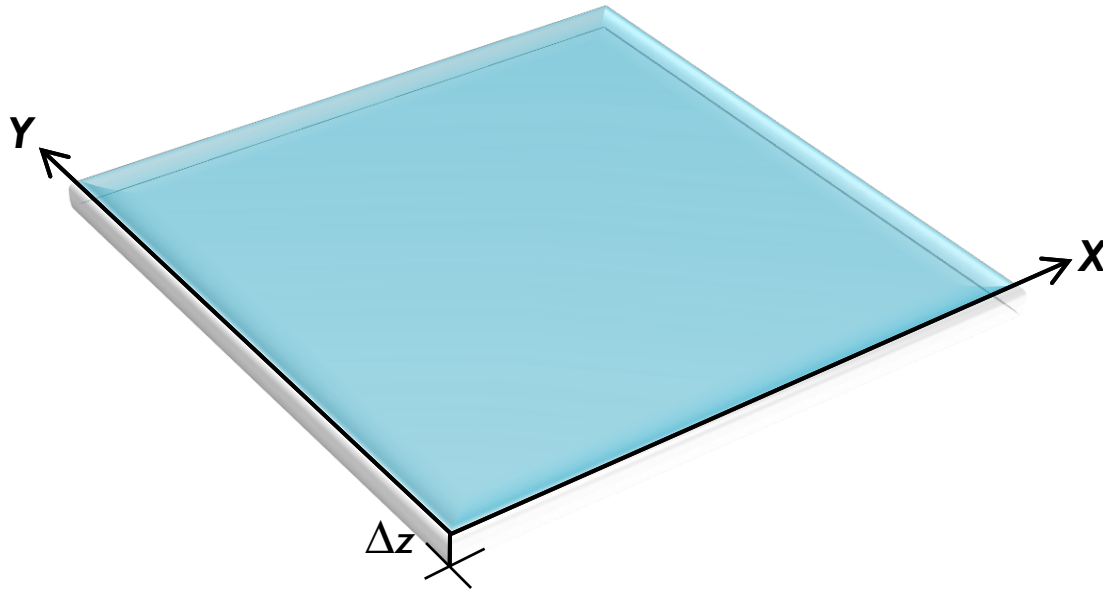
PDE Eliptik (Persamaan Laplace)

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

Persamaan Laplace

9

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

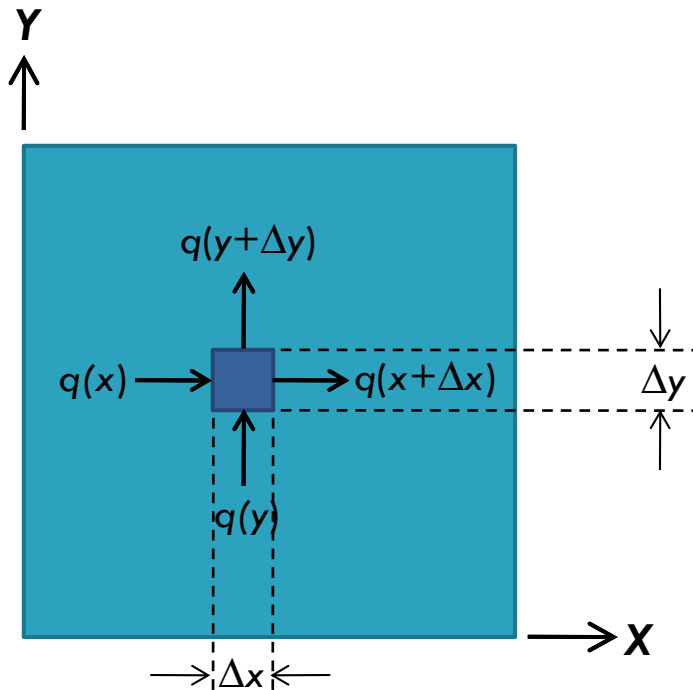


- Sebuah plat logam persegi tipis
 - kedua permukaan dilapisi dengan isolator panas
 - sisi-sisi plat diberi panas dengan temperatur tertentu
 - transfer panas hanya dimungkinkan pada arah x dan y
- Ditinjau pada saat transfer permanen telah tercapai (*steady-state condition*)

Persamaan Laplace

10

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Pada *steady-state condition*, aliran ke dalam sebuah elemen (lihat gambar di samping) selama periode Δt haruslah sama dengan aliran yang keluar dari elemen tsb:

$$q(x) \Delta y \Delta z \Delta t + q(y) \Delta x \Delta z \Delta t =$$

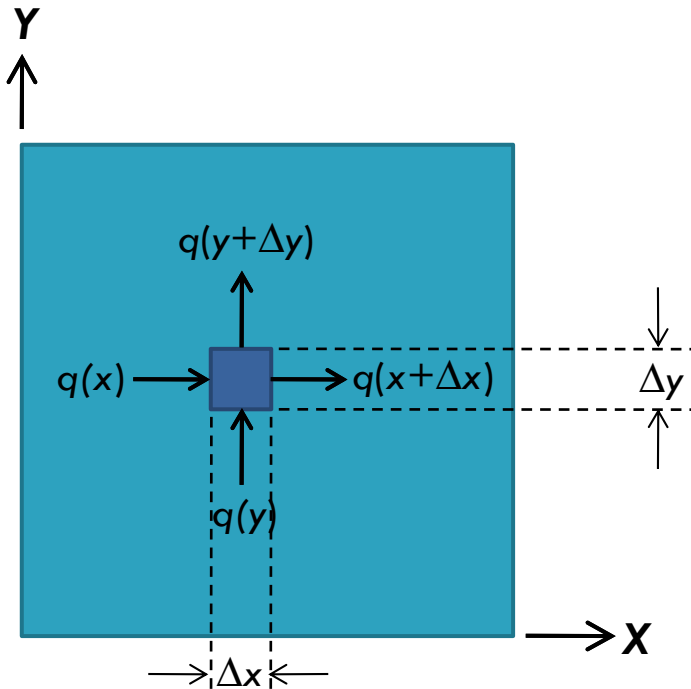
$$q(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \Delta t + q(y + \Delta y) \Delta x \Delta z \Delta t$$

$q(x)$ dan $q(y)$ berturut-turut adalah fluks panas arah x dan arah y , dalam satuan $\text{kal}/\text{cm}^2/\text{s}$.

Persamaan Laplace

11

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Jika semua suku pada persamaan tsb dibagi dengan $\Delta x \Delta y$, maka:

$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x = q(x + \Delta x)\Delta y + q(y + \Delta y)\Delta x$$

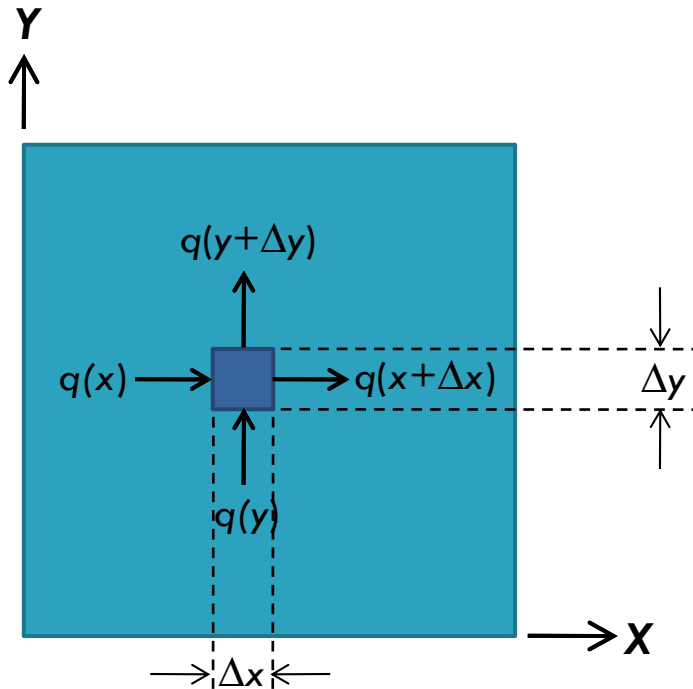
- Pengelompokan suku dan perkalian dengan $\Delta x/\Delta x$ atau $\Delta y/\Delta y$ menghasilkan:

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} \Delta y \Delta x = 0$$

Persamaan Laplace

12

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Pembagian dengan $\Delta x \Delta y$ menghasilkan:

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} = 0$$

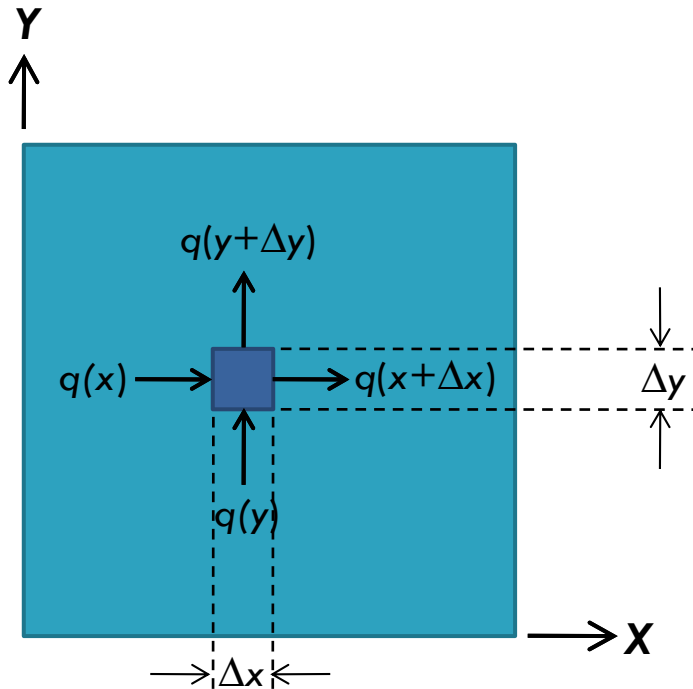
- Mengambil nilai limit persamaan tsb dan memperhatikan definisi diferensial parsial, maka diperoleh:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (\text{persamaan konservasi energi})$$

Persamaan Laplace

13

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

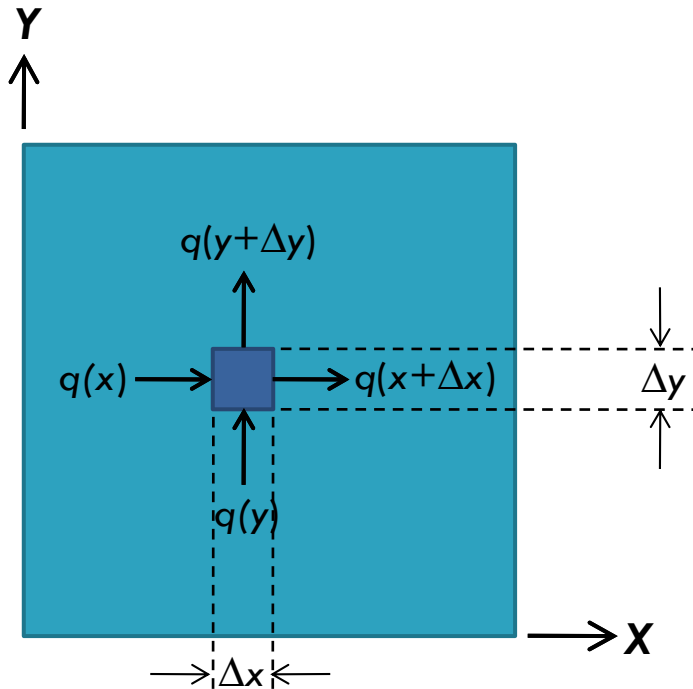
- ❑ Penyelesaian PDE tsb membutuhkan syarat batas fluks panas q ; padahal syarat batas yang diketahui adalah temperatur T .
- ❑ Oleh karena itu, PDE di atas diubah menjadi PDE dalam T dengan menerapkan Hukum Fourier untuk konduksi panas.

$$q_i = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial i} \quad (\text{Fourier's law of heat conduction})$$
$$= -k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

Persamaan Laplace

14

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



$$q_i = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial i} = -k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

q_i : fluks panas arah i (kal/cm²/s)

k : koefisien difusi thermal (cm²/s)

ρ : rapat massa medium (g/cm³)

C : kapasitas panas medium (kal/g/°C)

T : temperatur (°C)

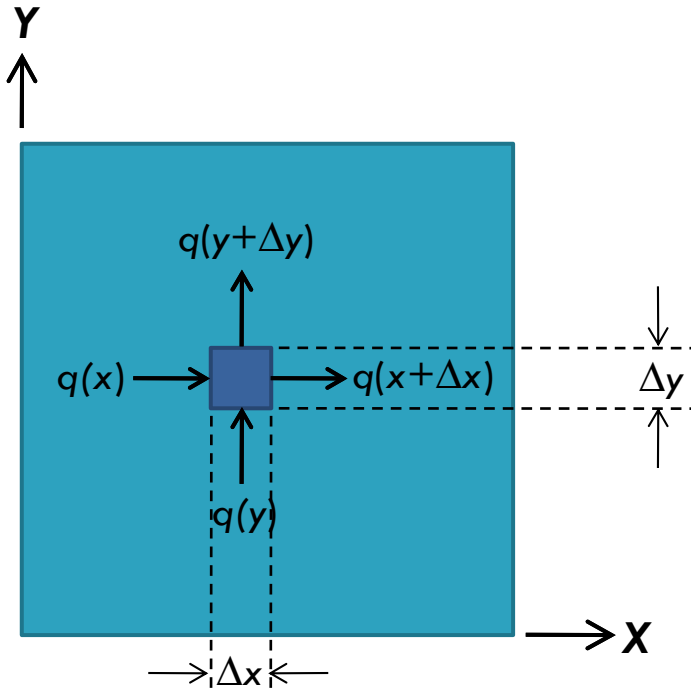
k' : konduktivitas thermal (kal/s/cm/°C)

- Persamaan di atas menunjukkan bahwa fluks panas tegak lurus sumbu i sebanding dengan gradien/slope temperatur pada arah i .

Persamaan Laplace

15

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Dengan memakai Fick's Law, maka persamaan konservasi energi dapat dituliskan sbb.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Persamaan Laplace})$$

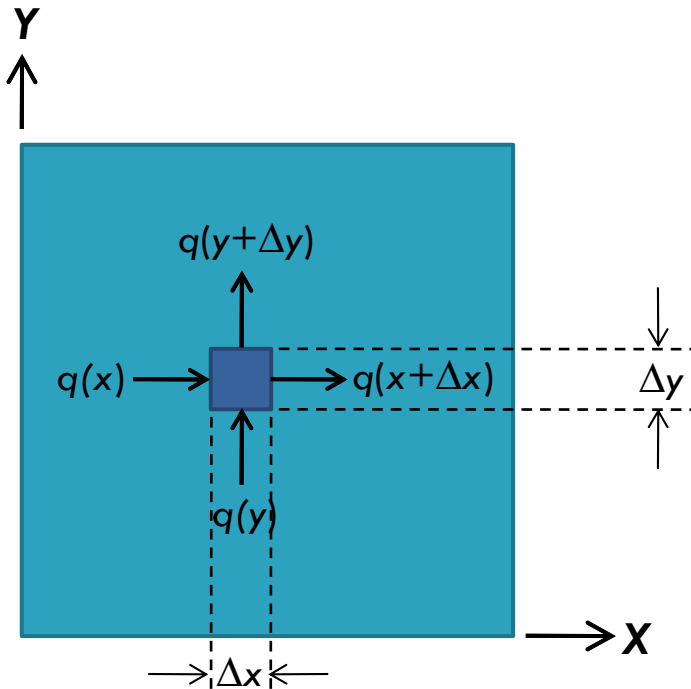
- Jika ada *source* atau *sink*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (\text{Persamaan Poisson})$$

Persamaan Laplace

16

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Persamaan tsb sama dengan persamaan aliran melalui medium porus (Hukum Darcy).

$$q_i = -K \frac{\partial H}{\partial i}$$

q_i : debit aliran arah i ($\text{m}^3/\text{m}/\text{s}$)

K : konduktivitas hidraulik (m^2/s)

H : tinggi energi hidraulik (m)

i : panjang lintasan, panjang aliran (m)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

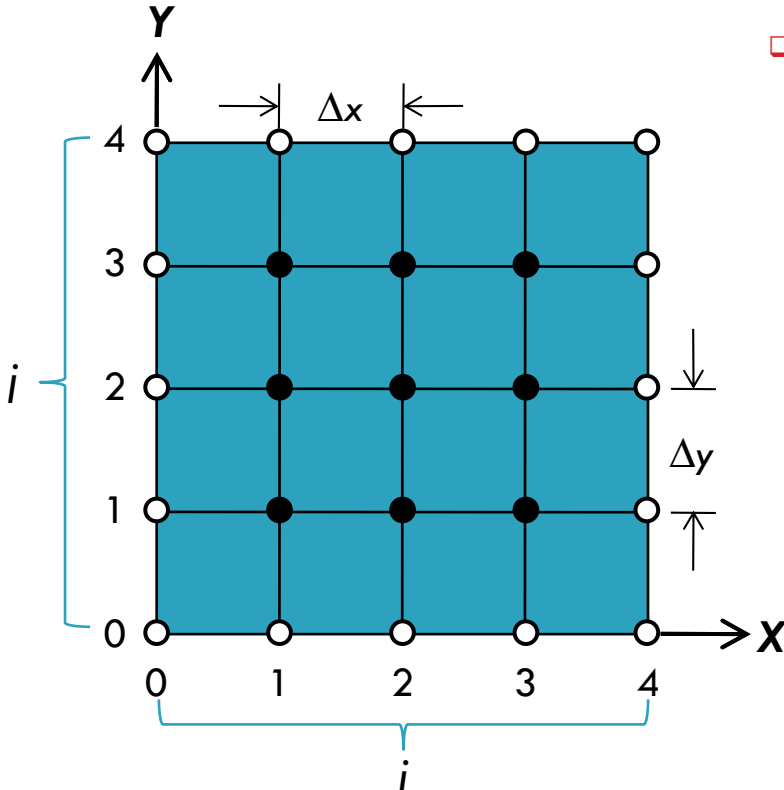
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- ❑ Penyelesaian persamaan Laplace, dan berbagai PDE di bidang enjiniring, hampir tidak pernah dilakukan secara analitis, kecuali untuk kasus-kasus yang sederhana.
- ❑ Penyelesaian hampir selalu dilakukan dengan cara numeris.
- ❑ Teknik penyelesaian PDE secara numeris
 - ❑ Metode beda hingga (*finite difference approximation, FDA*)
 - ❑ Metode elemen hingga (*finite element method, FEM*)
 - ❑ Metode volume hingga (*finite volume method, FVM*)

Finite Difference Approach – FDA

18

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Langkah pertama dalam FDA

- Domain fisik plat persegi dibagi menjadi sejumlah pias atau grid titik-titik diskrit.
- PDE Laplace diubah menjadi persamaan beda hingga di setiap titik hitung (i,j) .
- Di titik hitung interior (simbol bulat hitam):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

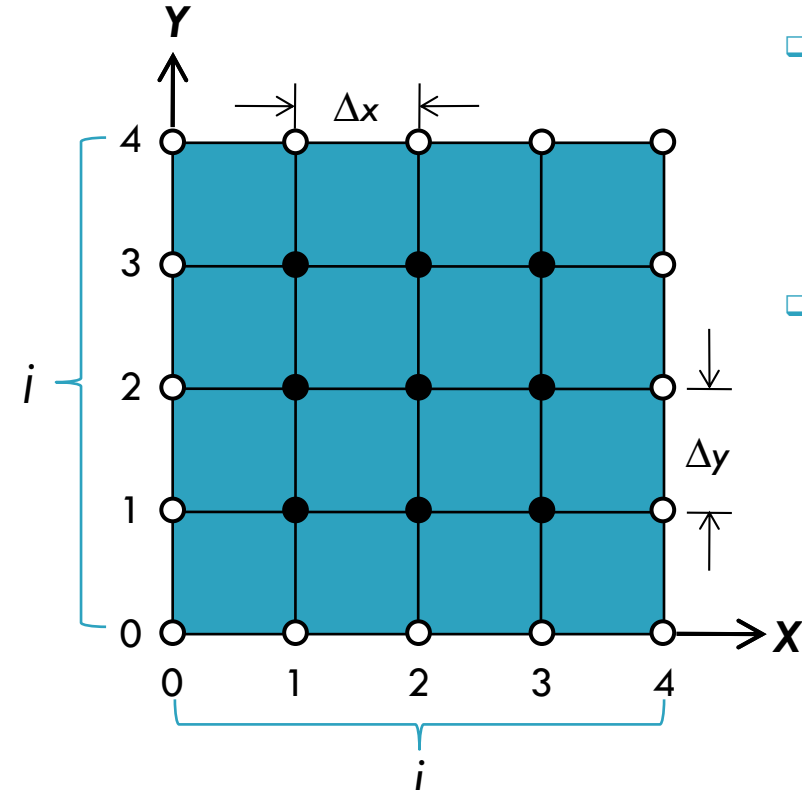
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- diferensi tengah (*central difference*)
- error = $O[(\Delta x)^2]$ &
- error = $O[(\Delta y)^2]$

Finite Difference Approach – FDA

19

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



- Persamaan Laplace dalam bentuk beda hinga:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

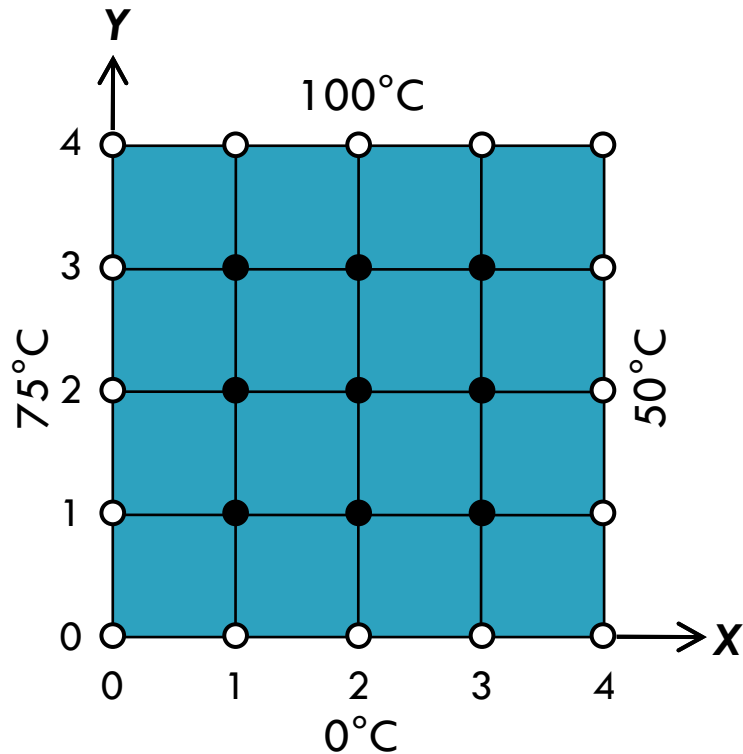
- Jika ukuran grid seragam, $\Delta x = \Delta y$, maka:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Finite Difference Approach – FDA

20

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

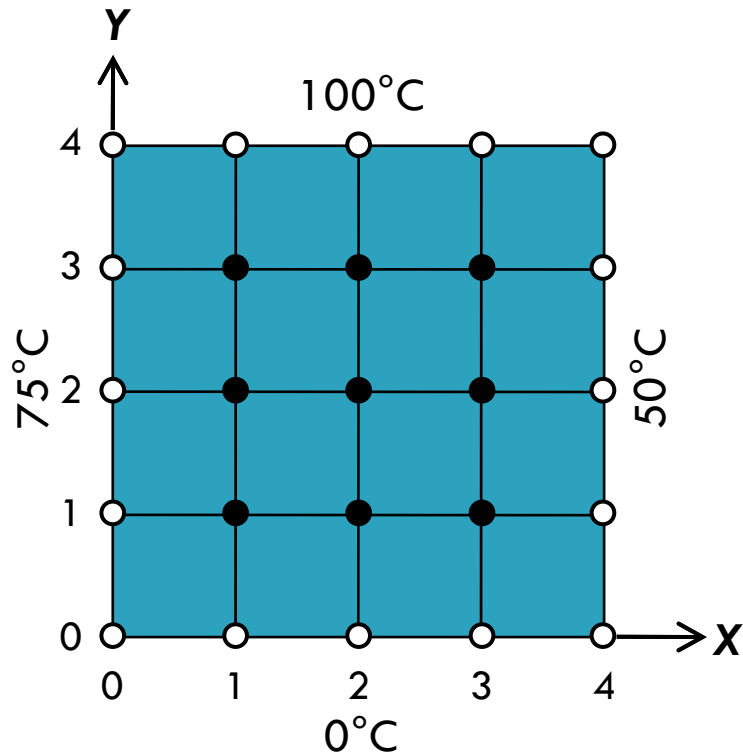


- Di titik-titik yang berada di batas domain (simbol bulat putih), berlaku syarat batas (*boundary conditions*) → temperatur diketahui/ditetapkan.
- BC semacam itu dikenal dengan nama **Dirichlet boundary condition**.
- Di titik (1,1):
$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$$
$$- 4T_{1,1} + T_{1,2} + T_{2,1} = -75 - 0$$
- Di 8 titik interior yang lain pun dapat dituliskan persamaan beda hingga diskrit semacam di atas.

Finite Difference Approach – FDA

21

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Dari 9 titik interior diperoleh sistem persamaan aljabar linear yang terdiri dari 9 persamaan dengan 9 *unknowns*.

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

□ 9 persamaan dengan 9 *unknowns*:

$$\begin{array}{rcll} 1) & -4T_{1,1} & + T_{2,1} & + T_{1,2} & = & -75 \\ 2) & T_{1,1} & - 4T_{2,1} & + T_{3,1} & + T_{2,2} & = & 0 \\ 3) & & T_{2,1} & - 4T_{3,1} & & + T_{3,2} & = & -50 \\ 4) & T_{1,1} & & & - 4T_{1,2} & + T_{2,2} & & + T_{1,3} & = & -75 \\ 5) & & T_{2,1} & & + T_{1,2} & - 4T_{2,2} & + T_{3,2} & & + T_{2,3} & = & 0 \\ 6) & & & T_{3,1} & & + T_{2,2} & - 4T_{3,2} & & & + T_{3,3} & = & -50 \\ 7) & & & & T_{1,2} & & & - 4T_{1,3} & + T_{2,3} & & = & -175 \\ 8) & & & & & T_{2,2} & & + T_{1,3} & - 4T_{2,3} & + T_{3,3} & = & -100 \\ 9) & & & & & & T_{3,2} & & + T_{2,3} & - 4T_{3,3} & = & -150 \end{array}$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- 9 persamaan dengan 9 *unknowns* dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -175 \\ -100 \\ -150 \end{Bmatrix}$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- ❑ Sistem persamaan aljabar yang dihasilkan dari penerapan persamaan beda hingga (*finite difference*) di semua titik interior
 - ❑ diselesaikan dengan salah satu Metode yang telah dibahas pada kuliah sebelum UTS
 - ❑ untuk 9 persamaan, penyelesaian masih dapat dilakukan dengan mudah memakai cara tabulasi *spreadsheet*
 - ❑ untuk jumlah persamaan yang banyak, seperti yang biasa ditemui dalam permasalahan *civil engineering*, perlu bantuan program komputer
 - MatLab (program aplikasi berbayar)
 - SciLab (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
 - **Octave** (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
 - *Numerical Recipes*
 - Etc. (dapat dicari di internet)

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Metode iteratif: *Gauss-Seidel iteration method*

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad \text{atau} \quad T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1}}{4}$$

- Dipakai SOR (*Successive Over Relaxation*) method untuk mempercepat konvergensi

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \lambda T_{i,j}^{n+1} + (1-\lambda)T_{i,j}^n \quad 1 < \lambda < 2$$

- Kriteria konvergensi

$$\max |\varepsilon_{i,j}| = \max \left| \frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^n}{T_{i,j}^{(n+1)}} \right| < 1\%$$

hitungan dilakukan
dengan bantuan
tabulasi spreadsheet

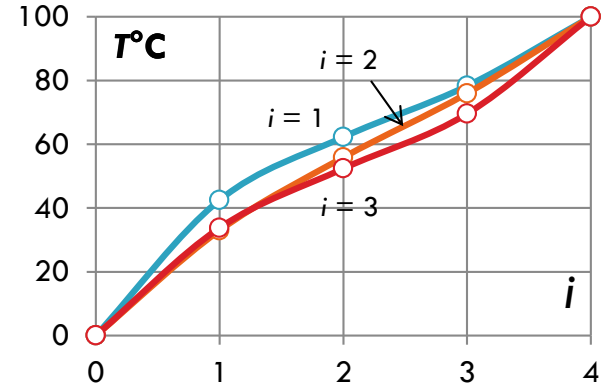
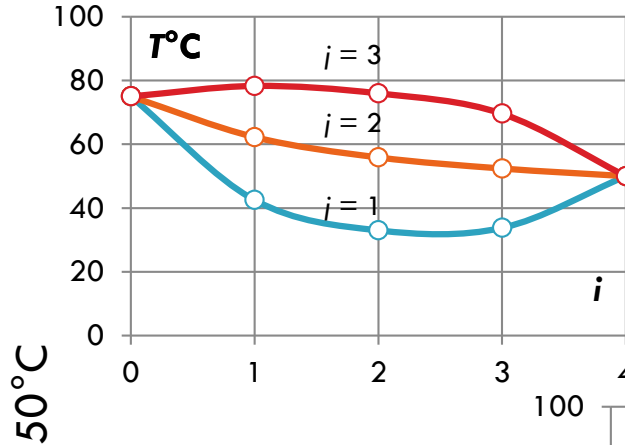
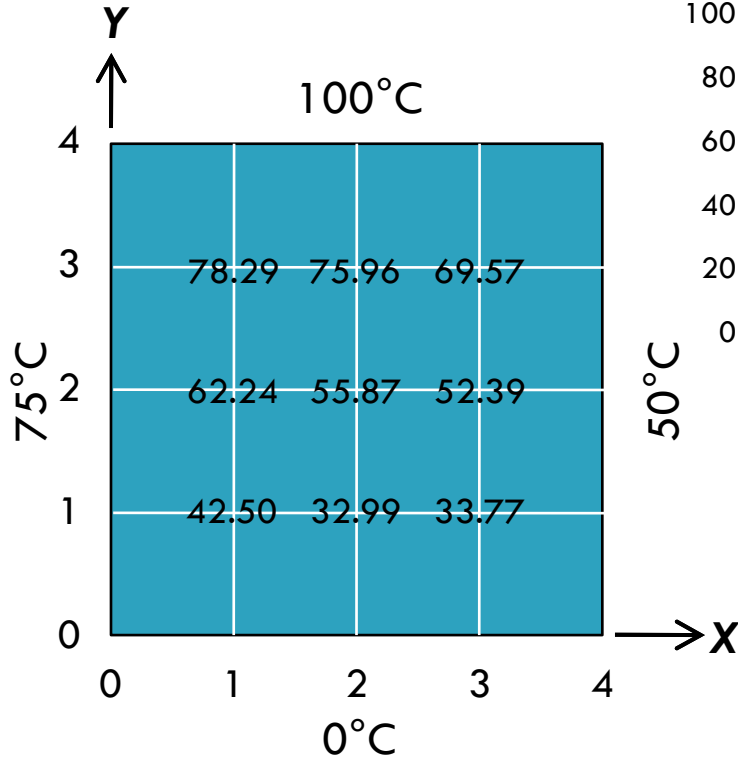
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

iterasi, n	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$	ΔT_{\max}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	---
1	28.1250	10.5469	22.7051	38.6719	18.4570	34.1858	80.1270	74.4690	96.9955	100.0%
2	32.5195	22.3572	28.6011	55.8311	60.8377	71.5700	74.4241	87.3620	67.3517	69.7%
3	41.1859	37.8056	45.4653	71.2290	70.0686	51.5471	87.8846	78.3084	71.2700	40.9%
4	48.4201	42.5799	31.3150	66.3094	54.4950	51.8814	75.9144	73.9756	67.8114	45.2%
5	44.7485	27.6695	32.9241	59.9274	52.7977	50.3842	77.8814	74.9462	69.3432	53.9%
6	38.5996	32.7858	33.4767	60.5401	55.5973	52.9643	77.4916	75.9389	69.9171	15.9%
7	43.8224	33.4432	34.4145	63.6144	56.9367	52.7435	79.2117	76.8051	69.8722	11.9%
8	42.6104	33.5140	33.8893	62.4499	56.0988	52.3259	78.2398	75.6765	69.3148	2.8%
9	42.8062	33.0409	33.8179	62.3681	55.7299	52.1605	78.2718	75.9054	69.6173	1.4%
10	42.5003	32.9976	33.7753	62.2418	55.8746	52.3950	78.2943	75.9671	69.5771	0.7%

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

27

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Persamaan Diferensial Parsial – PDE

PDE Parabolik

Penyelesaian PDE Parabolik

FDA Skema Eksplisit

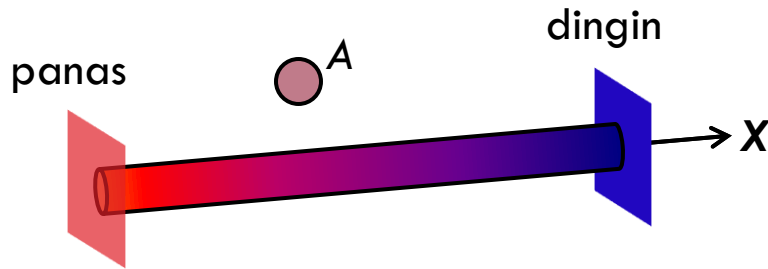
FDA Skema Implisit

FDA Skema Crank-Nicolson

PDE Parabolik

29

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator panas, kecuali di kedua ujung batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, panas dan dingin.

- Heat balance di dalam batang

$$q(x)A\Delta t - q(x + \Delta x)A\Delta t = \Delta x A \rho C \Delta T$$

input output storage

- persamaan tsb dibagi vol = $\Delta x A \Delta t$

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

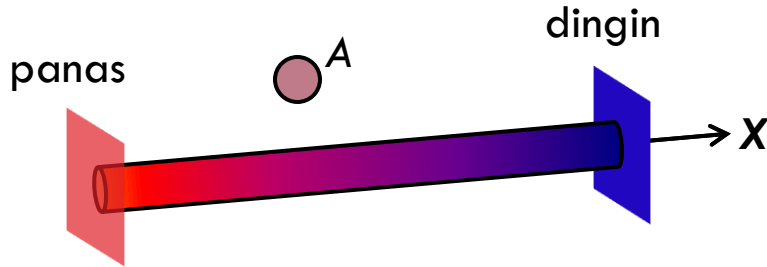
- limit persamaan tsb untuk $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

PDE Parabolik

30

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator panas, kecuali di kedua ujung batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, panas dan dingin.

- Hukum Fourier untuk konduksi panas

$$q = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial x}$$

- Persamaan *heat balance* menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{Persamaan konduksi panas}$$

- Persamaan di atas merupakan persamaan difusi
 - konduksi panas
 - transpor polutan
 - transpor sedimen suspensi

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- ❑ Temperatur batang merupakan fungsi waktu dan ruang
 - ❑ terhadap waktu, T berupa suku derivatif pertama
 - ❑ terhadap ruang, T berupa suku derivatif kedua
- ❑ Langkah hitungan pada FDA
 - ❑ T pada waktu $t+\Delta t$ dihitung berdasarkan T pada waktu t
 - ❑ T pada waktu t sudah diketahui dari nilai/syarat awal (**initial condition**) atau dari hasil hitungan langkah sebelumnya
 - ❑ saat menghitung T di suatu titik pada suku derivatif ruang, T yang mana yang dipakai?
 - jika T pada waktu t → dinamai skema eksplisit
 - jika T pada waktu $t+\Delta t$ → dinamai skema implisit

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{\text{di titik } i}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Skema Eksplisit

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Skema Implisit

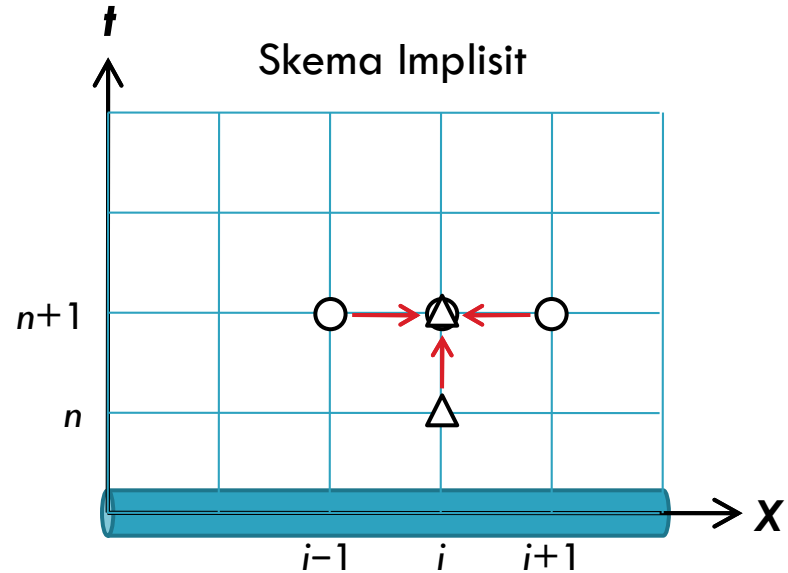
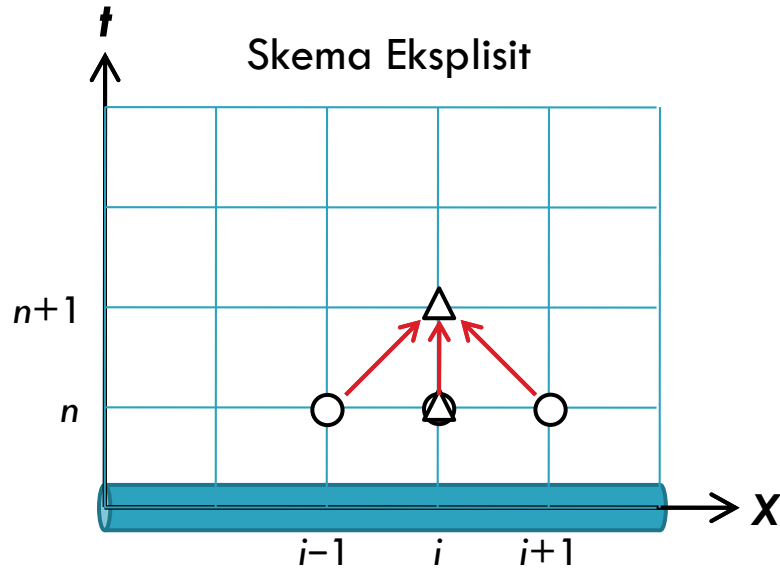
k konstan di sepanjang batang
dan di sepanjang waktu

Δx seragam di sepanjang batang

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

33

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



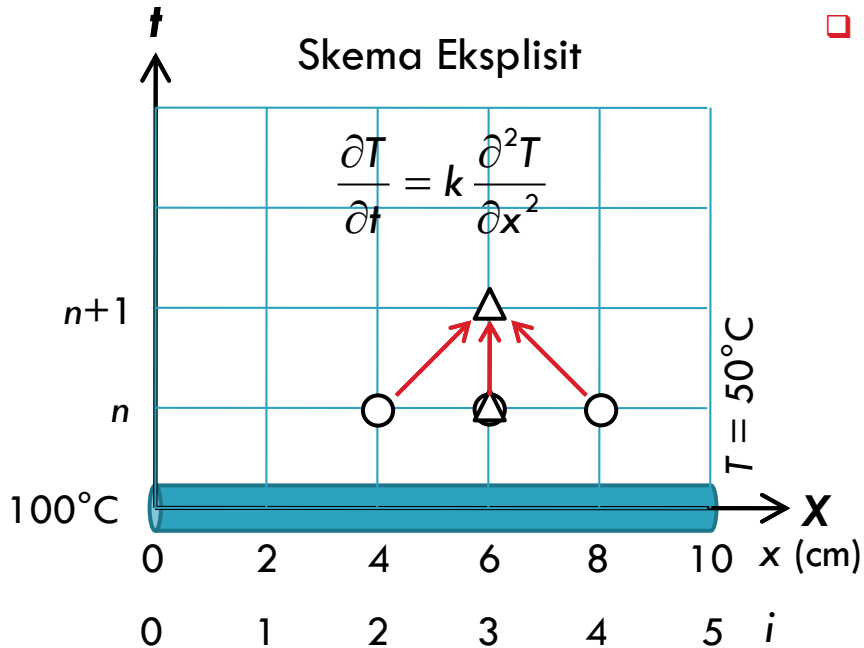
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA: Skema Eksplisit

34

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



□ Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang

- panjang batang, $L = 10$ cm, $\Delta x = 2$ cm
- time step, $\Delta t = 0.1$ s
- koefisien difusi thermal, $k = 0.835$ cm²/s
- syarat batas: $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
- nilai awal: $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

FDA: Skema Eksplisit

35

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

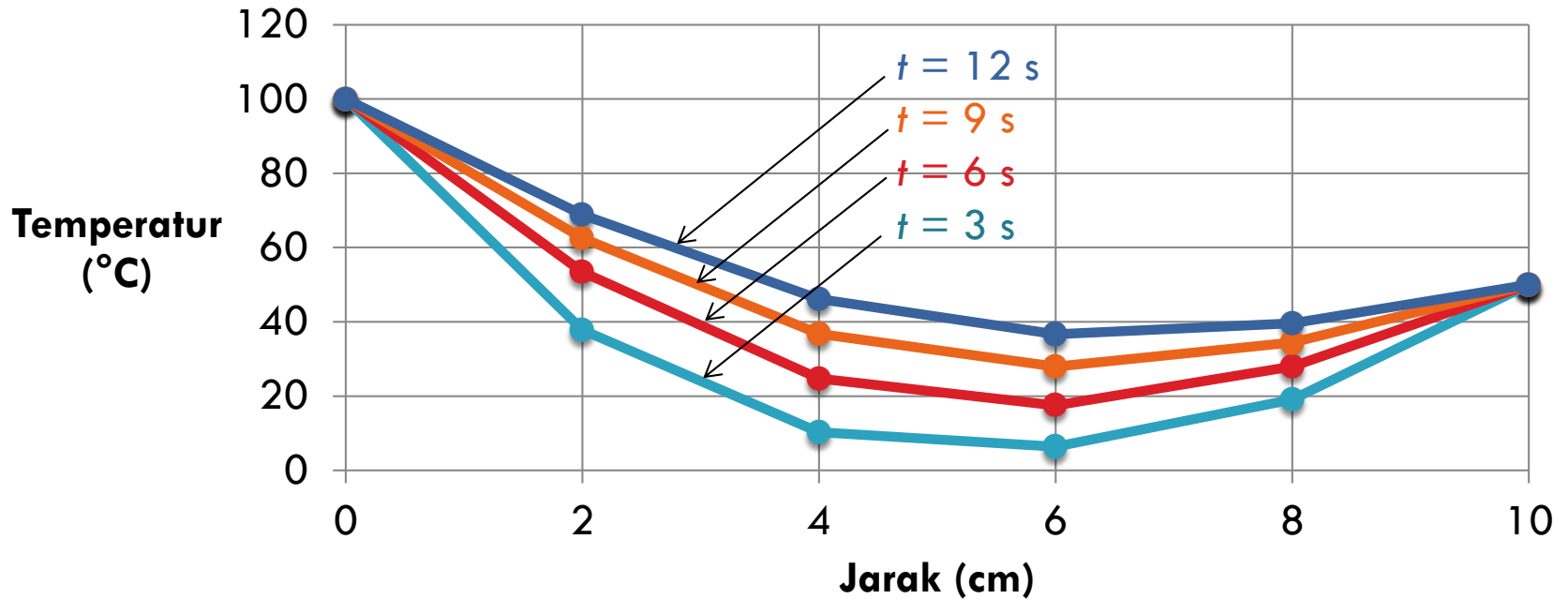
iterasi	waktu (s)	temperatur (°C) di titik hitung					
n	t	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
0	0	100	0	0	0	0	50
1	0.1	100	2.0875	0	0	1.0438	50
2	0.2	100	4.0878	0.0436	0.0218	2.0439	50
3	0.3	100	6.0056	0.1275	0.0645	3.0028	50
4	0.4	100	7.8450	0.2489	0.1271	3.9225	50
5	0.5	100	9.6102	0.4050	0.2089	4.8052	50

Hitungan diteruskan sampai $t = 12$ s

FDA: Skema Eksplisit

36

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



FDA: Skema Eksplisit

37

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Konvergensi dan stabilitas hitungan
 - ❑ Konvergensi berarti bahwa jika Δx dan Δt mendekati nol, maka penyelesaian FDA mendekati penyelesaian eksak.
 - ❑ Stabilitas berarti bahwa kesalahan hitungan di setiap tahap hitungan tidak mengalami amplifikasi, tetapi mengecil seiring dengan berjalannya hitungan.
- ❑ Skema eksplisit konvergen dan stabil jika:

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k}$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left\{ \begin{array}{l} \leq 1/2 \text{ dapat terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ \leq 1/4 \text{ tidak terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ = 1/6 \text{ meminimumkan } \textit{truncation error} \end{array} \right.$$

FDA: Skema Eksplisit

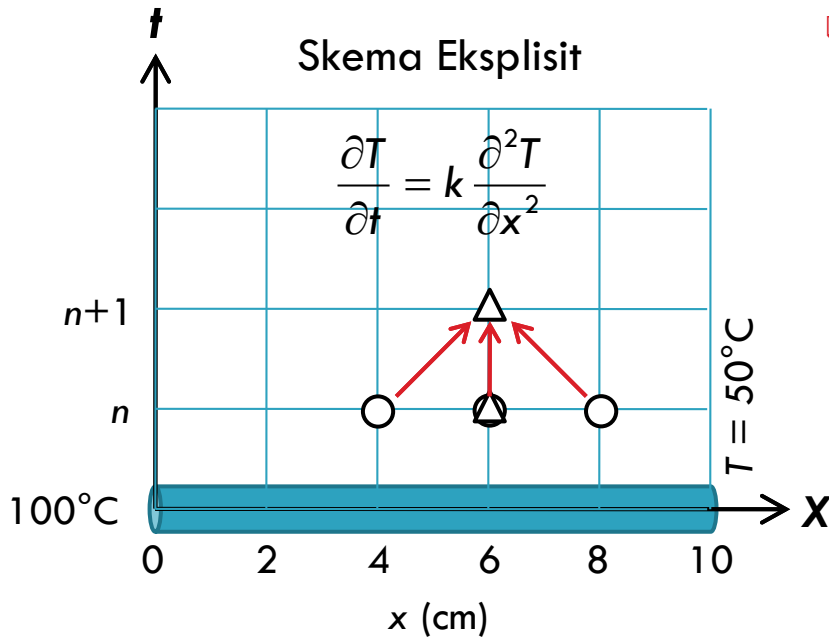
- ❑ Konvergensi dan stabilitas hitungan
 - ❑ untuk mendapatkan akurasi hasil hitungan, dibutuhkan Δx kecil, namun
 - ❑ konsekuensi Δx kecil adalah Δt pun harus kecil untuk menjamin konvergensi dan kestabilan hitungan
 - ❑ jika Δx dikalikan faktor $\frac{1}{2}$, maka Δt perlu dikalikan faktor $\frac{1}{4}$ untuk mempertahankan konvergensi dan kestabilan hitungan
 - ❑ skema eksplisit menjadi mahal, dalam arti beban hitungan bertambah besar

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

FDA: Skema Eksplisit

39

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - panjang batang, $L = 10$ cm, $\Delta x = 2$ cm
 - time step, $\Delta t = 0.1$ s
 - koefisien difusi thermal, $k = 0.835$ cm²/s
 - syarat batas: $T(x=0,t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=20,t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal: $T(x,t=0) = 0^\circ\text{C}$

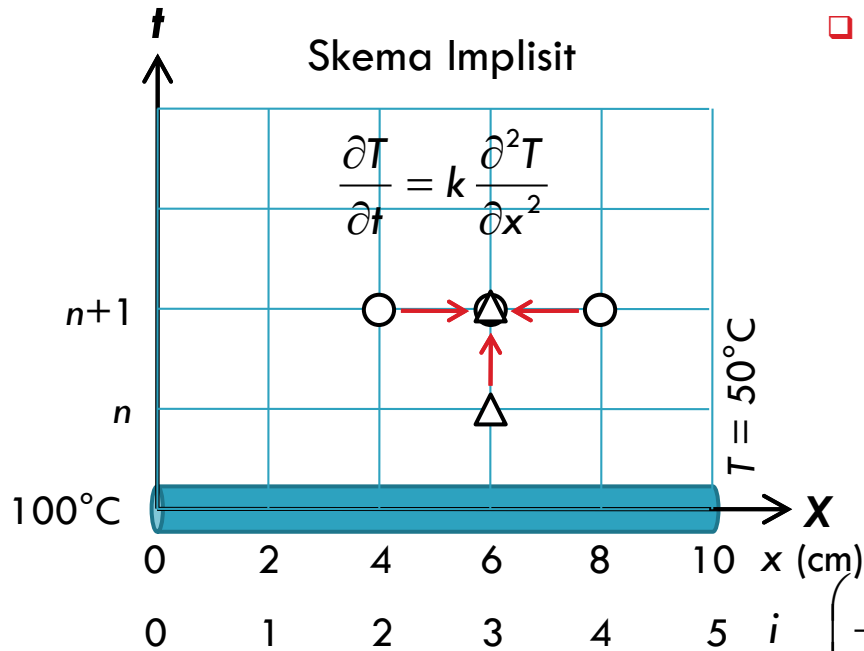
Hitung dengan skema eksplisit: $k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$

PR dikumpulkan minggu depan!

FDA: Skema Implisit

40

<https://istiarito.staff.ugm.ac.id>



□ Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang

- panjang batang, $L = 10$ cm, $\Delta x = 2$ cm
- time step, $\Delta t = 0.1$ s
- koefisien difusi thermal, $k = 0.835$ cm²/s
- syarat batas: $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=10, t) = 50^\circ\text{C}$
- nilai awal: $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA: Skema Implisit

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \quad 1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.05175$$

□ Hitungan pada saat $n+1=1$ atau $t+\Delta t = 0.1$ s:

$$\begin{array}{l} \text{node 1:} \quad 1.04175T_1^1 - 0.020875T_2^1 = T_1^0 + 0.020875T_0^0 \\ \text{node 2:} \quad -0.020875T_1^1 + 1.04175T_2^1 - 0.020875T_3^1 = T_2^0 \\ \text{node 3:} \quad -0.020875T_2^1 + 1.04175T_3^1 - 0.020875T_4^1 = T_3^0 \\ \text{node 4:} \quad -0.020875T_3^1 + 1.04175T_4^1 = T_4^0 + 0.020875T_5^0 \end{array}$$

FDA: Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}$$

matriks tridiagonal

- Apabila jumlah persamaan banyak, penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

FDA: Skema Implisit

43

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* MSEXcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1} \{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam MSEXcel

FDA: Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MScExcel adalah:

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 & 0 \\ 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 \\ 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 \\ 0 & 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0047 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 1.0023 \end{Bmatrix}$$

$\{T\}$ $[A]^{-1}$ $\{RHS\}$

FDA: Skema Implisit

- Hitungan pada saat $n+1=2$ atau $t+\Delta t = 0.2$ s:
 - Matriks koefisien persamaan $[A]$ tidak berubah
 - Matriks di sebelah kanan tanda “=” berubah dan merupakan fungsi T pada saat $n=1$

$$\{\text{RHS}\} = \begin{Bmatrix} T_1^1 + 0.020875 T_0 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 + 0.020875 T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 2.0461 \end{Bmatrix}$$



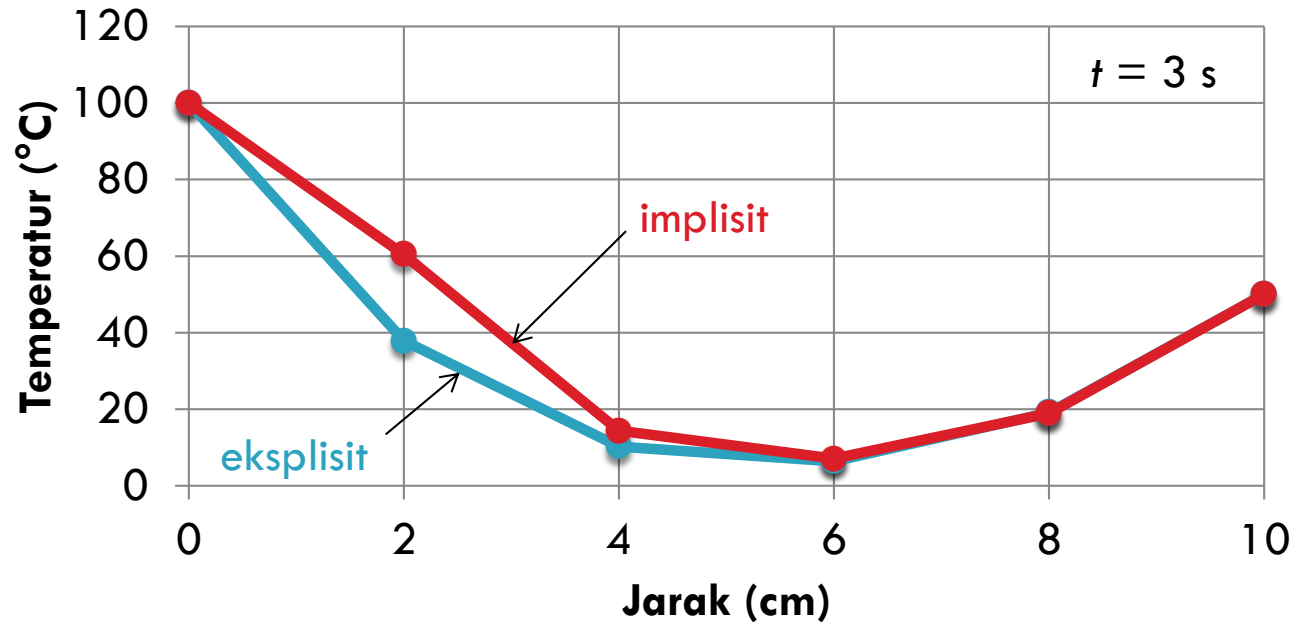
$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 & 0 \\ 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 \\ 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 \\ 0 & 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 2.0461 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0101 \\ 0.1206 \\ 0.0619 \\ 1.9653 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Implisit

46

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Konduksi atau perambatan panas hasil hitungan dengan skema implisit tampak lebih cepat daripada hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada $t = 3$ s).



FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

Skema eksplisit

- ❑ Persamaan dan teknik penyelesaiannya *straight-forward*, penyelesaian dilakukan *node per node*
- ❑ Rentan terhadap konvergensi dan stabilitas hitungan
- ❑ *Time step* terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

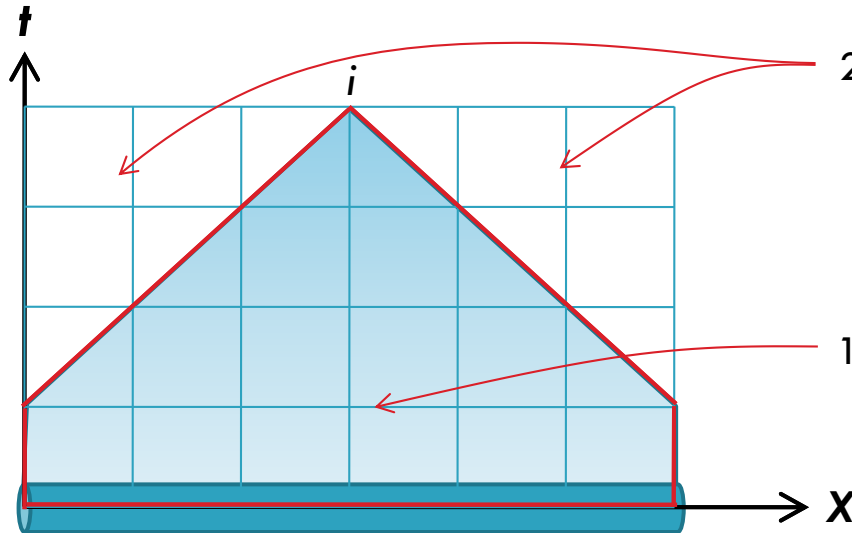
Skema implisit

- ❑ Persamaan dan teknik penyelesaian lebih “rumit”, penyelesaian dilakukan secara simultan untuk seluruh node
- ❑ Konvergensi dan stabilitas hitungan lebih mudah dijaga
- ❑ *Time step* tidak terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

48

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



2) Saat menghitung T di i , titik-titik hitung (*nodes*) di kedua zona ini tidak diperhitungkan, padahal secara fisik, justru node-node di sini berpengaruh thd T di titik i .


1) Saat menghitung T di i , hanya titik-titik hitung (*nodes*) di dalam segitiga ini yang berpengaruh dalam hitungan.

Skema Eksplisit

FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$


$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

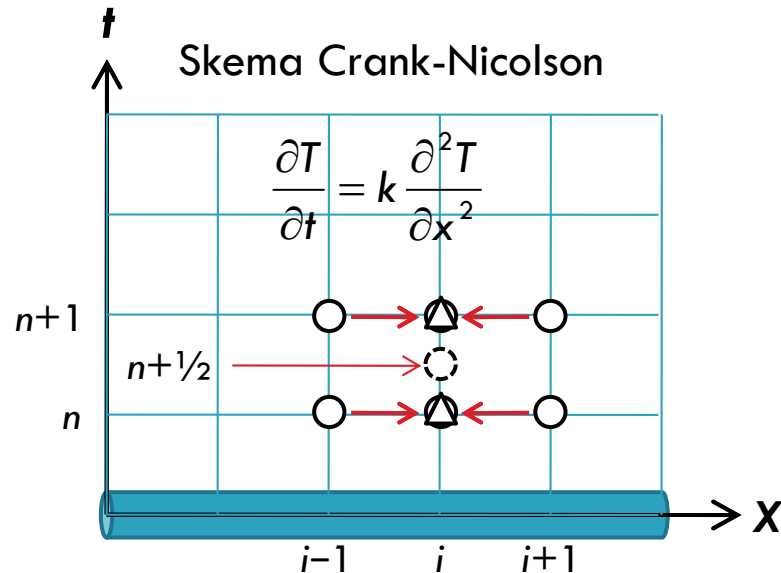
1st order accurate *2nd order accurate*

- 1) Skema implisit menjamin konvergensi dan stabilitas hitungan, namun aproksimasi suku derivatif waktu dan suku derivatif ruang memiliki akurasi berbeda.
- 2) Skema implisit yang memiliki akurasi yang sama pada aproksimasi suku derivatif waktu dan ruang adalah Metode **Crank-Nicolson**.

FDA: Metode Crank-Nicolson

50

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



- Aproksimasi suku derivatif waktu ditempatkan pada waktu $n+1/2$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

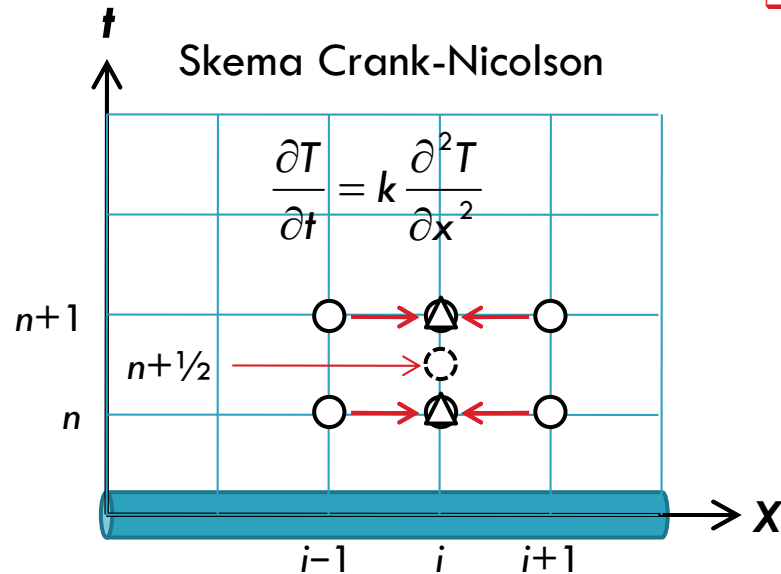
- Aproksimasi suku derivatif ruang pada waktu $n+1/2$ dianggap sbg nilai rata-rata derivatif pada waktu n dan $n+1$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

FDA: Metode Crank-Nicolson

51

<https://istianto.staff.ugm.ac.id>



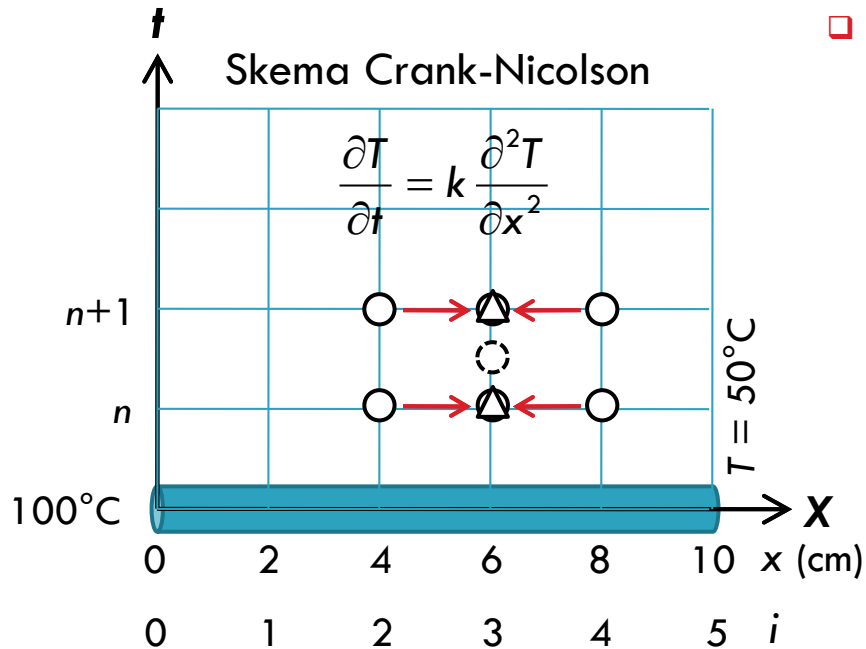
- Bentuk beda hingga persamaan parabola dengan demikian dapat dituliskan sbb.

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} =$$
$$\left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^n + 2\left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^n$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

52

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - panjang batang, $L = 10$ cm, $\Delta x = 2$ cm
 - time step, $\Delta t = 0.1$ s
 - koefisien difusi thermal, $k = 0.835$ cm²/s
 - syarat batas: $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal: $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^n + 2\left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^n$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \quad 1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.05175$$

- Hitungan pada saat $n+1=1$ atau $t+\Delta t = 0.1$ s:

$$\begin{array}{l} \text{node 1:} \quad 2.04175T_1^1 - 0.020875T_2^1 \quad \quad \quad = 4.1750 \\ \text{node 2:} \quad -0.020875T_1^1 + 2.04175T_2^1 - 0.020875T_3^1 \quad \quad = 0 \\ \text{node 3:} \quad \quad \quad -0.020875T_2^1 + 2.04175T_3^1 - 0.020875T_4^1 \quad = 0 \\ \text{node 4:} \quad \quad \quad \quad \quad -0.020875T_3^1 + 2.04175T_4^1 \quad = 2.0875 \end{array}$$

FDA: Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}$$

matriks tridiagonal

- Apabila jumlah persamaan banyak, penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

FDA: Skema Implisit

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan spreadsheet MSEXcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1} \{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam MSEXcel

FDA: Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MScExcel adalah:

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 & 0 \\ 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 \\ 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 \\ 0 & 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.0450 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0450 \\ 0.0210 \\ 0.0107 \\ 1.0225 \end{Bmatrix}$$

$\{T\}$ $[A]^{-1}$ $\{RHS\}$

FDA: Skema Crank-Nicolson

57

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- Hitungan pada saat $n+1=2$ atau $t+\Delta t = 0.2$ s:
 - Matriks koefisien persamaan $[A]$ tidak berubah
 - Matriks di sebelah kanan tanda “=” berubah dan merupakan fungsi T pada saat $n=1$

$$\{\text{RHS}\} = \begin{Bmatrix} 8.1797 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{Bmatrix}$$



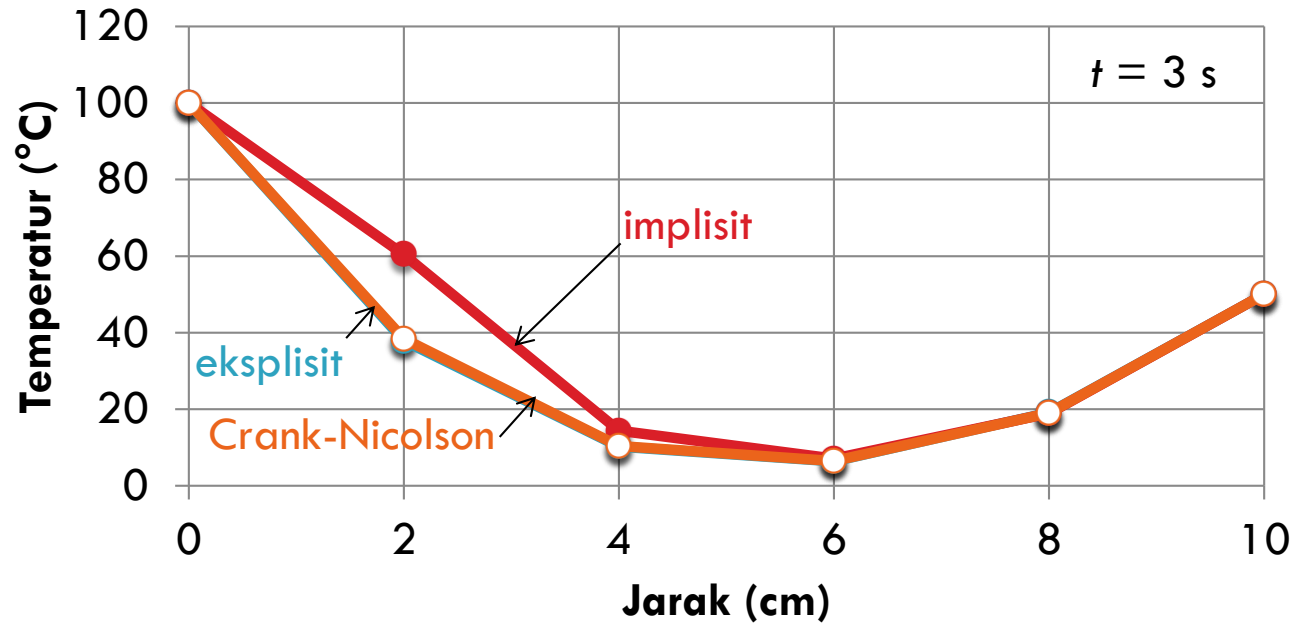
$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 & 0 \\ 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 \\ 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 \\ 0 & 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8.1797 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0071 \\ 0.0826 \\ 0.0422 \\ 2.0036 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

58

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>

Konduksi atau perambatan panas hasil hitungan dengan skema Crank-Nicolson tampak mirip dengan hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada $t = 3$ s).



FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



FDA



$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \phi \left(k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \phi) \left(k \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

□ Skema FDA

- $\phi = 0$: skema eksplisit
- $\phi = 1$: skema implisit
- $\phi = 1/2$: skema Crank-Nicolson

FDA Persamaan Parabolik

- Bentuk umum FDA persamaan diferensial parsial parabolik

$$\left(-\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = \left[(1-\phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_{i-1}^n + \left[1 - 2(1-\phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_i^n + \left[(1-\phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_{i+1}^n$$

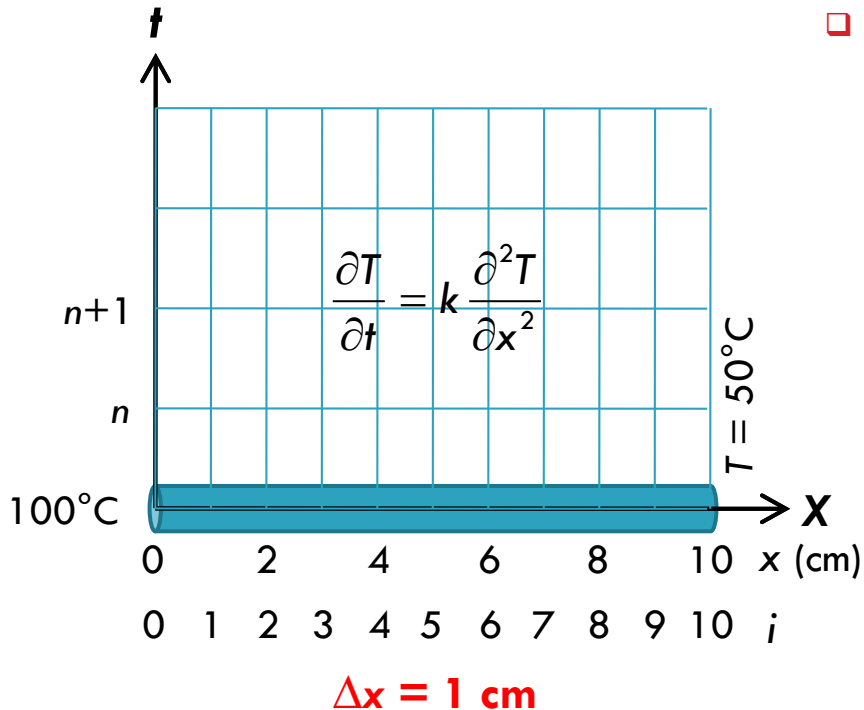
- Skema FDA

- $\phi = 0$: skema eksplisit
- $\phi = 1$: skema implisit
- $\phi = 1/2$: skema Crank-Nicolson

FDA: Persamaan Parabolik

61

<https://istiarto.staff.ugm.ac.id>



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - **panjang batang, $L = 10 \text{ cm}$, $\Delta x = 1 \text{ cm}$ (!!)**
 - time step, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$
 - koefisien difusi thermal, $k = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$
 - syarat batas: $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=20, t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal: $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

- Hitung sampai *steady-state condition*
 - Skema eksplisit
 - Skema implisit
 - Skema Crank-Nicolson

PR/
Tugas

Sekian