UNIVERSITAS GADJAH MADA
FAKULTAS TEKNIK
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Partial Differential Equations – PDE

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- Acuan
  - Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
    - Chapter 23 dan 24, hlm. 707-749.

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- Suatu fungsi u yang bergantung pada x dan y, $u(x, y)$
  - Diferensial u terhadap x di sembarang titik (x, y)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

  - Diferensial u terhadap y di sembarang titik (x, y)

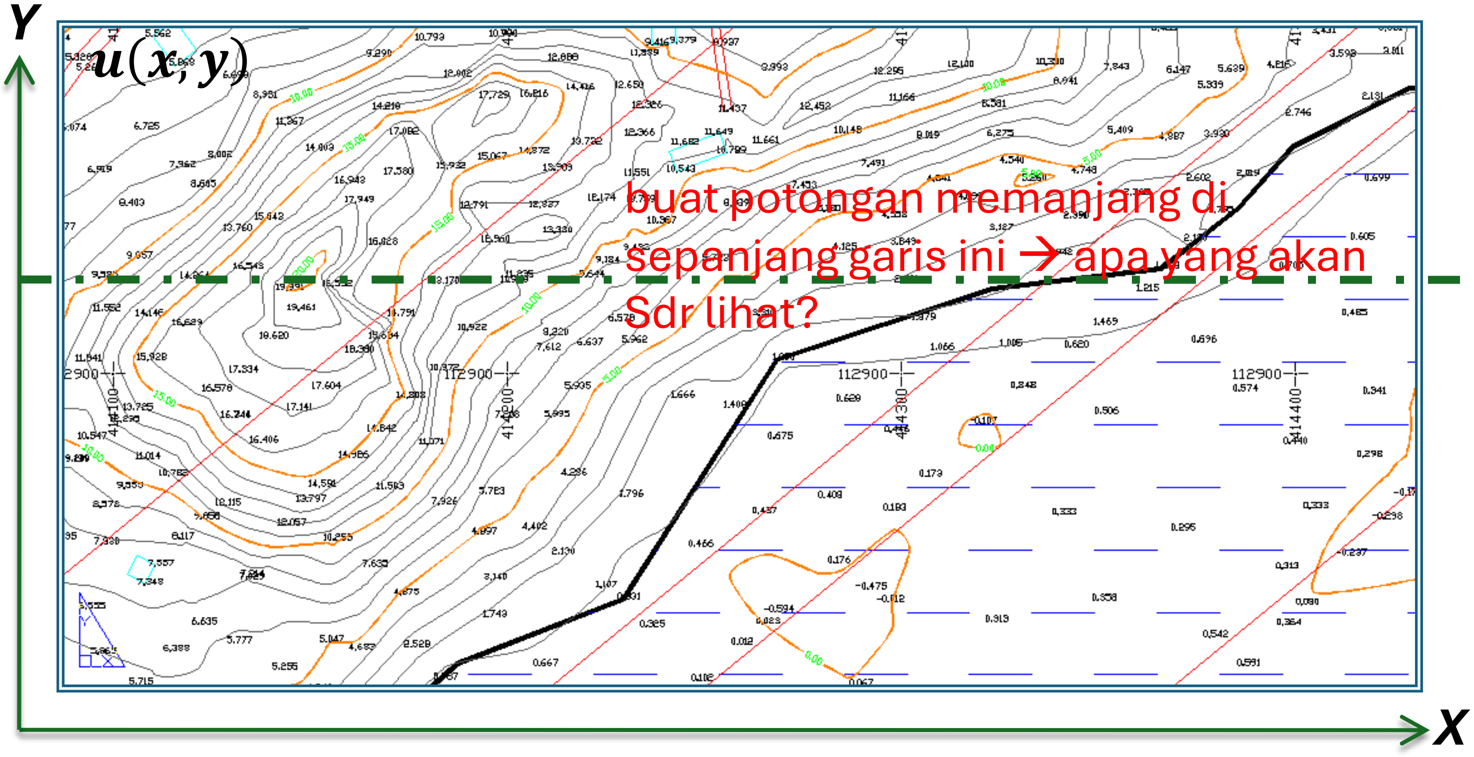
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

Contoh arti fisik

u elevasi tanah pada peta situasi.

u ditunjukkan oleh garis-garis (kontur) elevasi tanah.



Persamaan Diferensial Parsial – PDE

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

(2) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

(3) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

- Orde PDE adalah orde tertinggi suku derivatif
- PDE merupakan fungsi linear apabila
  - fungsi tsb linear dalam u dan derivatif u, dan
  - koefisien persamaan tsb hanya bergantung pada variabel bebas (x atau y) atau konstanta

PDE	Orde	Linear
(1)	2	ya
(2)	3	ya
(3)	3	tidak
(4)	2	tidak

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D = 0$$

A, B, C fungsi x dan y

D fungsi $x, y, u, \partial u/\partial x$, dan $\partial u/\partial y$

$B^2 - 4AC$	kategori
< 0	eliptik
= 0	parabolik
> 0	hiperbolik

- PDE yang dibahas di makul Metode Numerik hanya PDE linear orde dua
- PDE linear orde dua dan fungsi dua variabel bebas (x, y) dapat dikelompokkan menjadi
  - eliptik
  - parabolik
  - hiperbolik

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

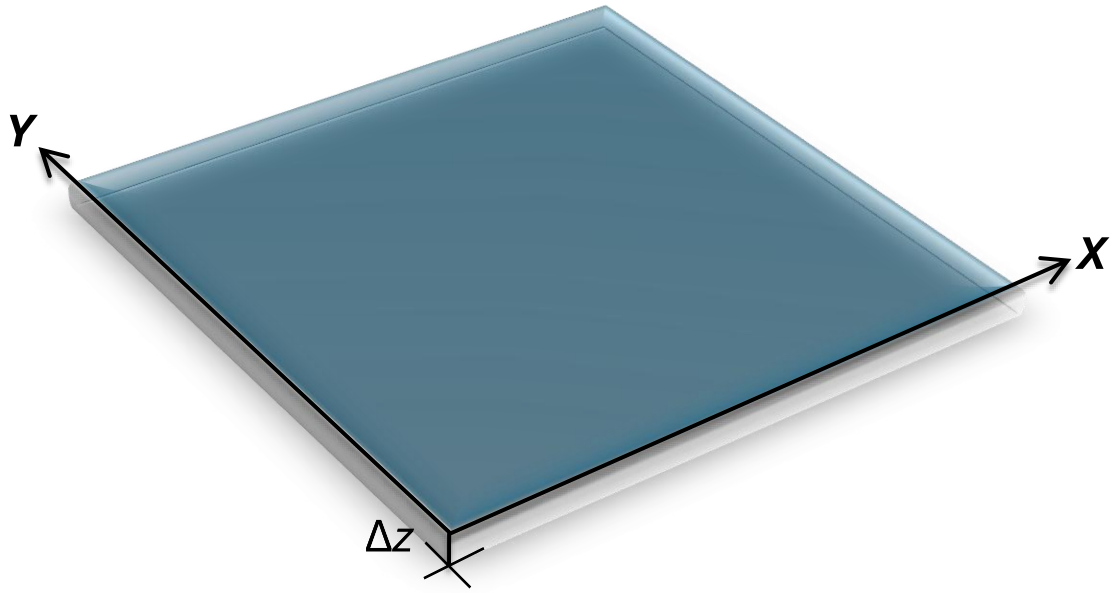
$B^2 - 4AC$	Kategori	Nama	Persamaan
< 0	Eliptik	Persamaan Laplace (permanen, 2D spasial)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabolik	Persamaan konduksi panas (tak-permanen, 1D spasial)	$k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$
> 0	Hiperbolik	Persamaan gelombang (tak-permanen, 1D spasial)	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

PDE Eliptik (Persamaan Laplace)

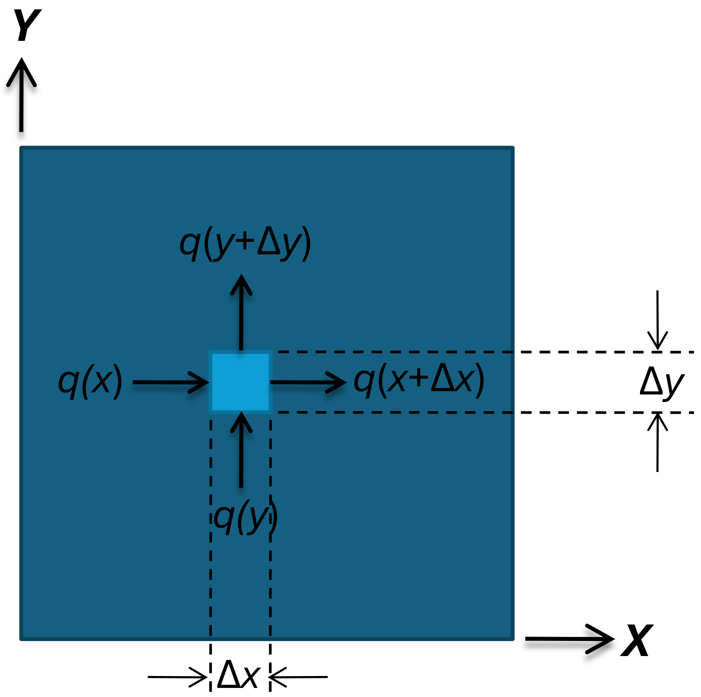
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

Persamaan Laplace



- Sebuah pelat logam persegi tipis
  - kedua permukaan dilapisi isolator panas
  - sisi-sisi pelat diberi termal temperatur tertentu
  - transfer termal hanya dimungkinkan dalam arah x dan y
- Ditinjau pada saat transfer permanen telah tercapai (*steady-state condition*)

Persamaan Laplace



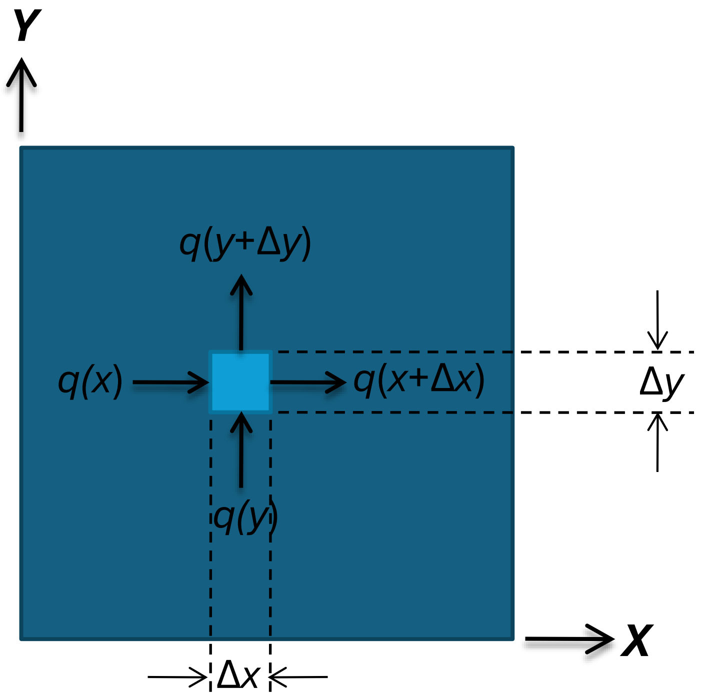
- Pada *steady-state condition*, aliran ke dalam sebuah elemen (lihat gambar di samping) selama periode Δt haruslah sama dengan aliran yang keluar dari elemen tsb.

$$q(x)\Delta y \Delta z \Delta t + q(y)\Delta x \Delta z \Delta t =$$

$$q(x+\Delta x)\Delta y \Delta z \Delta t + q(y+\Delta y)\Delta x \Delta z \Delta t$$

$q(x)$ dan $q(y)$ berturut-turut adalah fluks panas arah x dan arah y, dalam satuan kal/cm^2/s.

Persamaan Laplace



- Jika semua suku persamaan tsb dibagi dengan $\Delta z \Delta t$, maka

$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x =$$

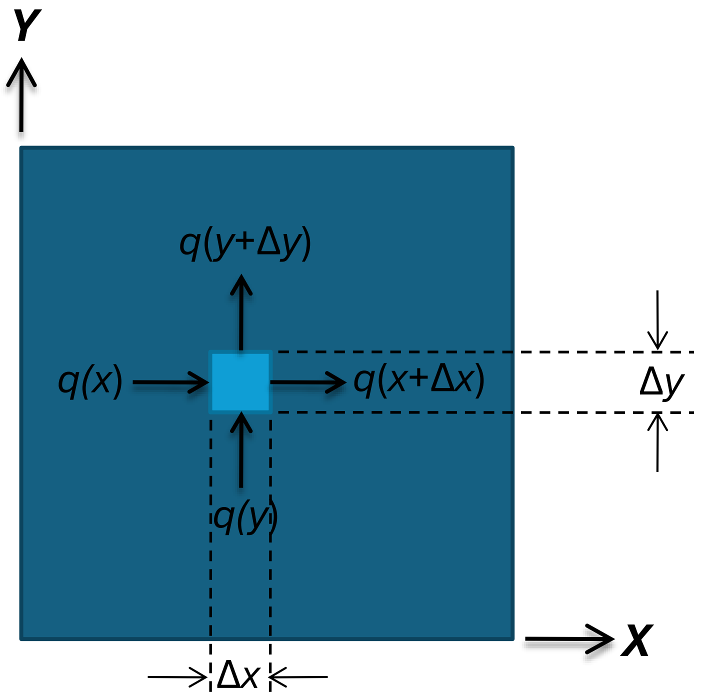
$$q(x + \Delta x)\Delta y + q(y + \Delta y)\Delta x$$

- Pengelompokan suku dan perkalian dengan $\Delta x/\Delta x$ atau $\Delta y/\Delta y$ menghasilkan

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x}\Delta x\Delta y$$

$$+ \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y}\Delta y\Delta x = 0$$

Persamaan Laplace



- Pembagian dengan $\Delta x \Delta y$ menghasilkan

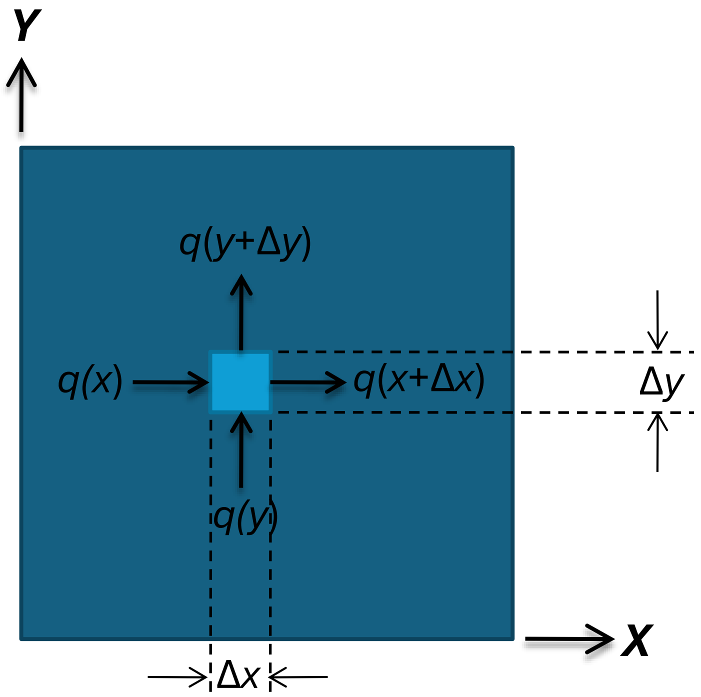
$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} = 0$$

- Mengambil nilai limit persamaan tsb dan memperhatikan definisi diferensial parsial, maka diperoleh

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

persamaan konservasi energi

Persamaan Laplace



$$-\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

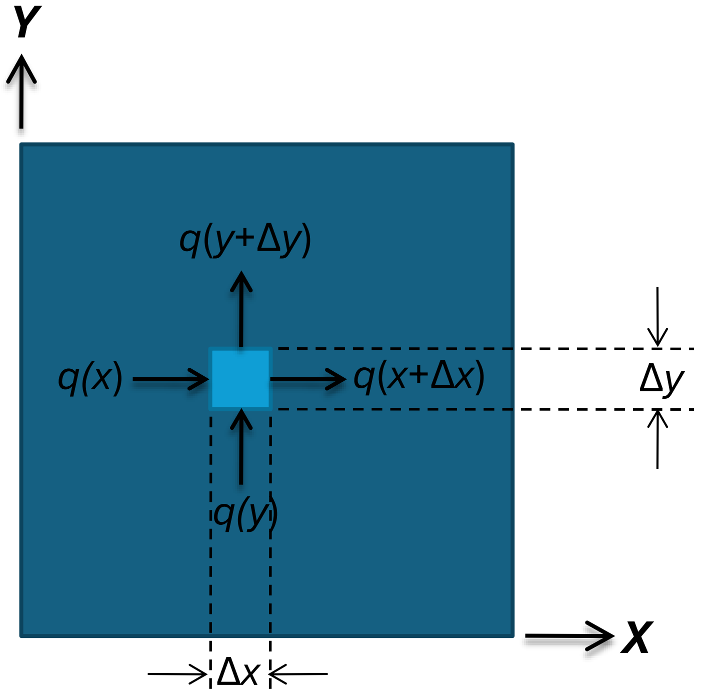
- Penyelesaian PDE tsb membutuhkan syarat batas fluks termal q; padahal syarat batas yang diketahui adalah temperatur T.
- Oleh karena itu, PDE di atas diubah menjadi PDE dalam T dengan menerapkan Hukum Fourier untuk konduksi termal.

$$q_i=-k\rho C\frac{\partial T}{\partial i}$$

Fourier's law of heat conduction

$$=-k'\frac{\partial T}{\partial i}$$

Persamaan Laplace

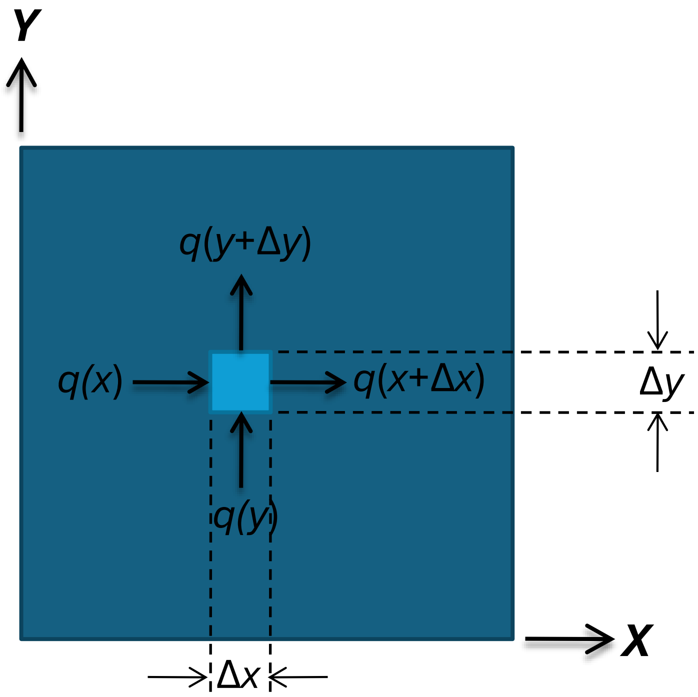


$$q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} = -k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

q_i	fluks termal arah *i* (kal/cm^2/s)
k	koefisien difusi termal (cm^2/s)
ρ	rapat massa medium (g/cm^3)
C	kapasitas termal medium (kal/g/°C)
T	temperatur (°C)
k'	konduktivitas termal (kal/s/cm/°C)

- Persamaan di atas menunjukkan bahwa fluks termal tegak lurus sumbu i sebanding dengan gradien/*slope* temperatur arah i.

Persamaan Laplace



- Dengan memakai Fick's Law, maka persamaan konservasi energi dapat dituliskan sbb.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

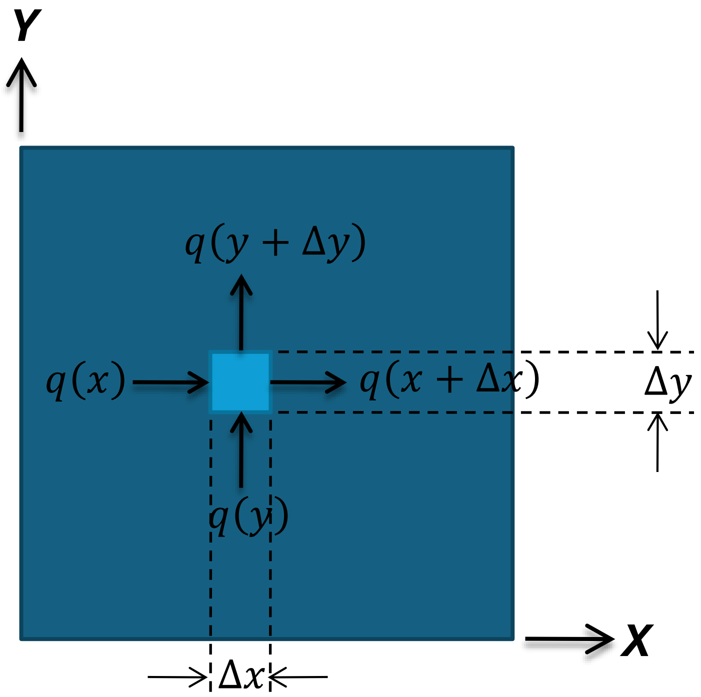
Persamaan Laplace

- Jika ada *source* atau *sink*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Persamaan Poisson

Persamaan Laplace



- Persamaan tsb sama dengan persamaan aliran melalui medium porus (Hukum Darcy).

$$q_i = -K \frac{\partial H}{\partial i}$$

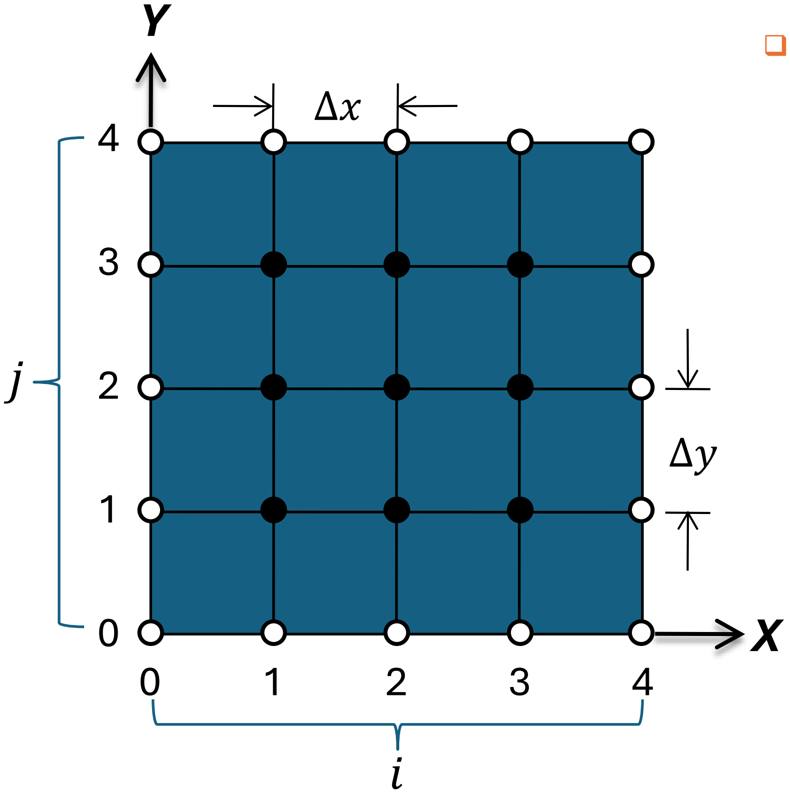
q_i	debit aliran arah i ($m^3/m/s$)
K	konduktivitas hidraulik (m^2/s)
H	tinggi energi hidraulik (m)
i	panjang lintasan, panjang aliran (m)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Penyelesaian persamaan Laplace, dan berbagai PDE di bidang enjiniring, hampir tidak pernah dilakukan secara analitis, kecuali untuk kasus-kasus yang sederhana.
- Penyelesaian hampir selalu dilakukan dengan cara numeris.
- Teknik penyelesaian PDE secara numeris
  - Metode beda hingga (*finite difference approximation*, FDA)
  - Metode elemen hingga (*finite element method*, FEM)
  - Metode volume hingga (*finite volume method*, FVM)

Finite Difference Approximation – FDA



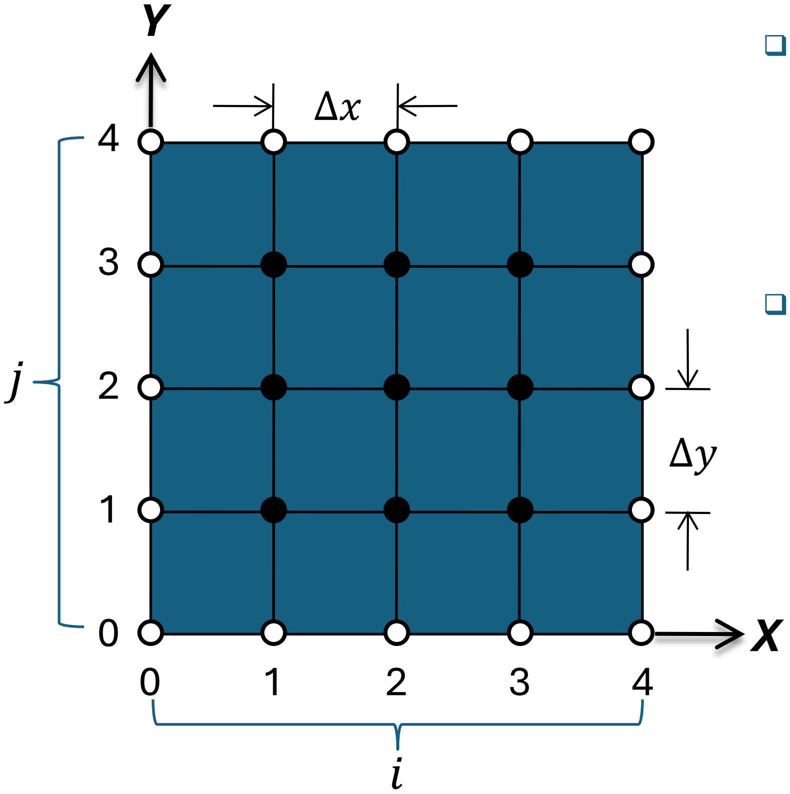
- Langkah pertama FDA
  - Domain fisik plat persegi dibagi menjadi sejumlah pias atau grid titik-titik diskrit.
  - PDE Laplace diubah menjadi persamaan beda hingga di tiap titik hitung (i, j).
  - Di titik hitung interior (simbol bulat hitam)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- diferensi tengah (*central difference*)
- error = $O[(\Delta x)^2]$ &
- error = $O[(\Delta y)^2]$

Finite Difference Approximation – FDA



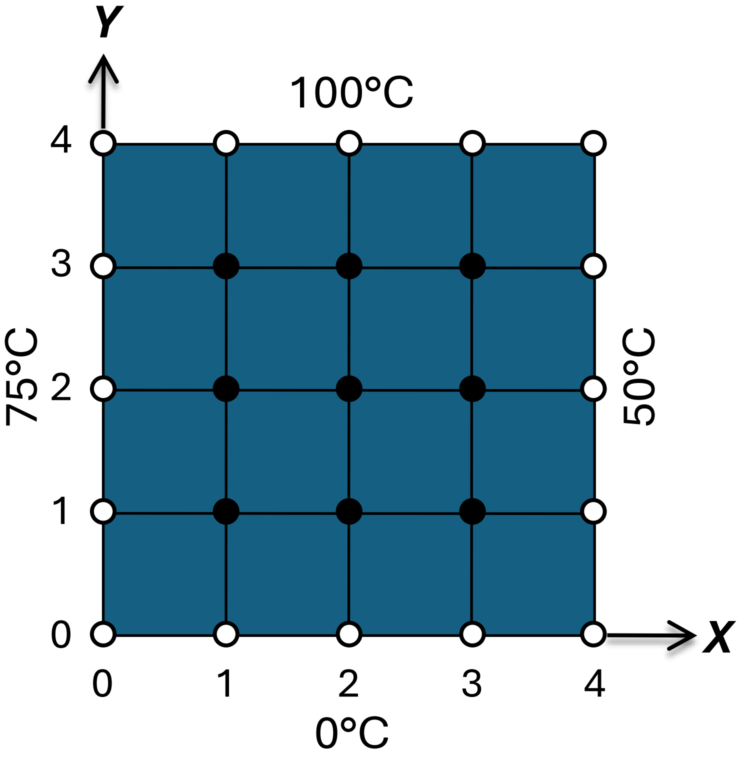
- Persamaan Laplace dalam bentuk beda hingga

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

- Jika ukuran grid seragam, $\Delta x = \Delta y$, maka

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Finite Difference Approximation – FDA



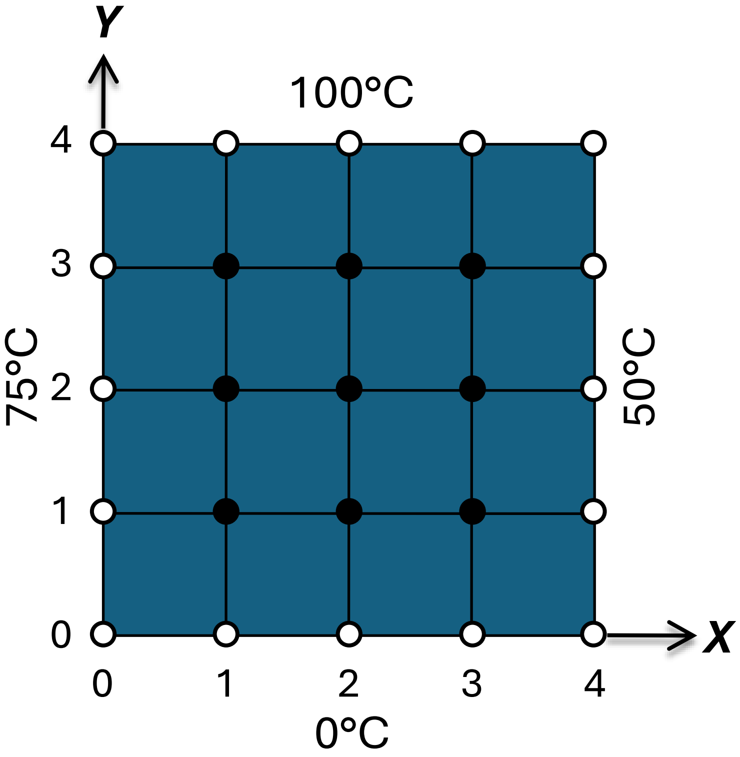
- Di titik-titik yang berada di batas domain (simbol bulat putih), berlaku syarat batas (*boundary conditions*) → temperatur diketahui/ditetapkan.
- BC semacam itu dikenal dengan nama ***Dirichlet boundary condition***.
- Di titik (1,1)

$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$$

$$-4T_{1,1} + T_{1,2} + T_{2,1} = -75 - 0$$

- Di 8 titik interior yang lain pun dapat dituliskan persamaan beda hingga diskret semacam di atas.

Finite Difference Approximation – FDA



- Dari 9 titik interior diperoleh sistem persamaan aljabar linear yang terdiri dari 9 persamaan yang memiliki 9 *unknowns*.

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- 9 persamaan, 9 *unknowns*

$$
\begin{array}{llllllllllll}
1) & -4T_{1,1} & +T_{2,1} & & +T_{1,2} & & & & & & = & -75 \\
2) & T_{1,1} & -4T_{2,1} & +T_{3,1} & & +T_{2,2} & & & & & = & 0 \\
3) & & T_{2,1} & -4T_{3,1} & & & +T_{3,2} & & & & = & -50 \\
4) & T_{1,1} & & & -4T_{1,2} & +T_{2,2} & & +T_{1,3} & & & = & -75 \\
5) & & T_{2,1} & & +T_{1,2} & -4T_{2,2} & +T_{3,2} & & +T_{2,3} & & = & 0 \\
6) & & & T_{3,1} & & +T_{2,2} & -4T_{3,2} & & & +T_{3,3} & = & -50 \\
7) & & & & T_{1,2} & & & -4T_{1,3} & +T_{2,3} & & = & -175 \\
8) & & & & & T_{2,2} & & +T_{1,3} & -4T_{2,3} & +T_{3,3} & = & -100 \\
9) & & & & & & T_{3,2} & & +T_{2,3} & -4T_{3,3} & = & -150
\end{array}
$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- 9 persamaan, 9 *unknowns*, dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -175 \\ -100 \\ -150 \end{Bmatrix}$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Sistem persamaan aljabar yang dihasilkan dari penerapan persamaan beda hingga (*finite difference*) di semua titik interior
  - diselesaikan dengan salah satu metode yang telah dibahas dalam kuliah sebelum UTS
  - untuk 9 persamaan, penyelesaian masih dapat dilakukan dengan mudah memakai cara tabulasi *spreadsheet*
  - untuk jumlah persamaan yang banyak, seperti yang biasa ditemui dalam permasalahan teknik (TS, TSDA), perlu bantuan program komputer
    - MatLab (program aplikasi berbayar)
    - SciLab (mirip MatLab, program aplikasi open source, platform Windows, MacOS, Linux)
    - Octave (mirip MatLab, program aplikasi open source, platform Windows, MacOS, Linux)
    - Numerical Recipes
    - **Python**
    - Etc. (dapat dicari di internet)

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Metode iteratif: *Gauss-Seidel iteration method*

$$T_{i.j} = \frac{T_{i+1.j} + T_{i-1.j} + T_{i.j+1} + T_{i.j-1}}{4} \quad \text{atau} \quad T_{i.j} = \frac{T_{i.j-1} + T_{i-1.j} + T_{i+1.j} + T_{i.j+1}}{4}$$

  - Dipakai SOR (*Successive Over Relaxation*) method untuk mempercepat konvergensi

$$T_{i.j}^{(n+1)} = \lambda T_{i,j}^{n+1} + (1-\lambda)T_{i,j}^{n} \qquad 1 < \lambda < 2$$

  - Kriteria konvergensi

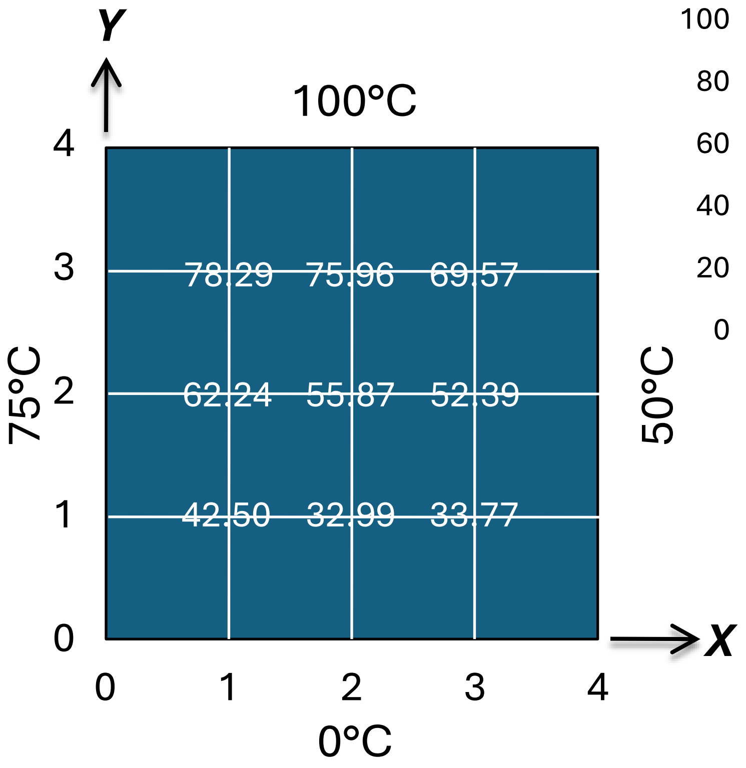
$$\max\left|\varepsilon_{i,j}\right| = \max\left|\frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{n}}{T_{i,j}^{(n+1)}}\right| < 1\%$$

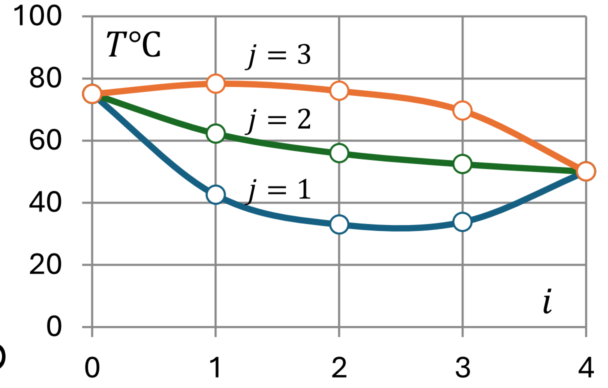
hitungan dilakukan dengan bantuan tabulasi spreadsheet

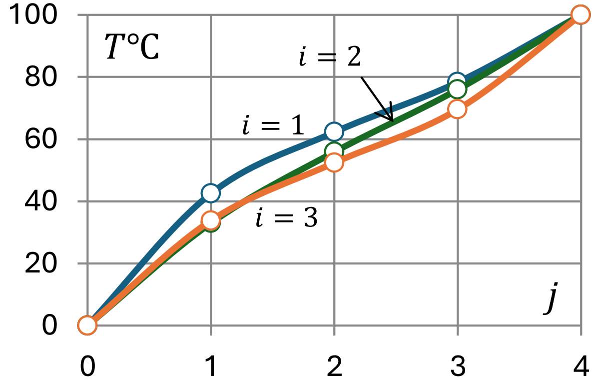
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

iterasi, n	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$	ΔT_{maks}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	---
1	28.1250	10.5469	22.7051	38.6719	18.4570	34.1858	80.1270	74.4690	96.9955	100.0%
2	32.5195	22.3572	28.6011	55.8311	60.8377	71.5700	74.4241	87.3620	67.3517	69.7%
3	41.1859	37.8056	45.4653	71.2290	70.0686	51.5471	87.8846	78.3084	71.2700	40.9%
4	48.4201	42.5799	31.3150	66.3094	54.4950	51.8814	75.9144	73.9756	67.8114	45.2%
5	44.7485	27.6695	32.9241	59.9274	52.7977	50.3842	77.8814	74.9462	69.3432	53.9%
6	38.5996	32.7858	33.4767	60.5401	55.5973	52.9643	77.4916	75.9389	69.9171	15.9%
7	43.8224	33.4432	34.4145	63.6144	56.9367	52.7435	79.2117	76.8051	69.8722	11.9%
8	42.6104	33.5140	33.8893	62.4499	56.0988	52.3259	78.2398	75.6765	69.3148	2.8%
9	42.8062	33.0409	33.8179	62.3681	55.7299	52.1605	78.2718	75.9054	69.6173	1.4%
10	42.5003	32.9976	33.7753	62.2418	55.8746	52.3950	78.2943	75.9671	69.5771	0.7%

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace



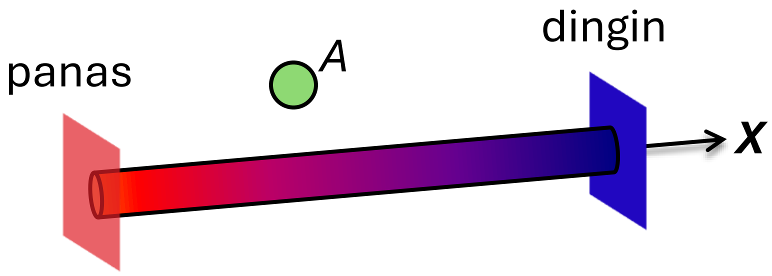




Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- PDE Parabolik
- Penyelesaian PDE Parabolik
  - FDA Skema Eksplisit
  - FDA Skema Implisit
  - FDA Skema Crank-Nicolson

PDE Parabolik



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator panas, <u>kecuali</u> di kedua ujung batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, panas dan dingin.

- *Heat balance* di dalam batang

$$q(x)A\Delta t - q(x+\Delta x)A\Delta t = \Delta x A \rho C \Delta T$$

input output storage

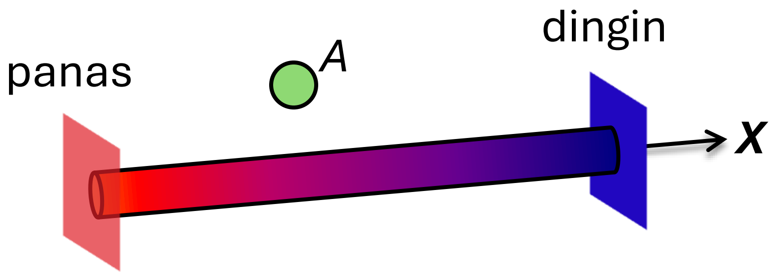
- persamaan tsb dibagi vol $=\Delta x A \Delta t$

$$\frac{q(x) - q(x+\Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

- limit persamaan tsb untuk $\Delta x, \Delta t \to 0$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

PDE Parabolik



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator panas, kecuali di kedua ujung batang yang diberi panas dengan temperatur berbeda, panas dan dingin.

- Hukum Fourier untuk konduksi panas

$$q = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial x}$$

- Persamaan *heat balance* menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ Persamaan konduksi panas

- Persamaan di atas merupakan persamaan difusi
  - konduksi panas
  - transpor polutan
  - transpor sedimen suspensi

FDA Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- Temperatur batang merupakan fungsi waktu dan ruang
  - terhadap waktu, T berupa suku derivatif pertama
  - terhadap ruang, T berupa suku derivatif kedua
- Langkah hitungan pada FDA
  - T pada waktu $t + \Delta t$ dihitung berdasarkan T pada waktu t
  - T pada waktu t sudah diketahui dari nilai/syarat awal (***initial condition***) atau dari hasil hitungan langkah sebelumnya
  - saat menghitung T di suatu titik pada suku derivatif ruang, T yang mana yang dipakai?
    - jika T pada waktu t → dinamai skema eksplisit
    - jika T pada waktu $t + \Delta t$ → dinamai skema implisit

FDA Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{\text{di titik } i}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_i$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Skema Eksplisit

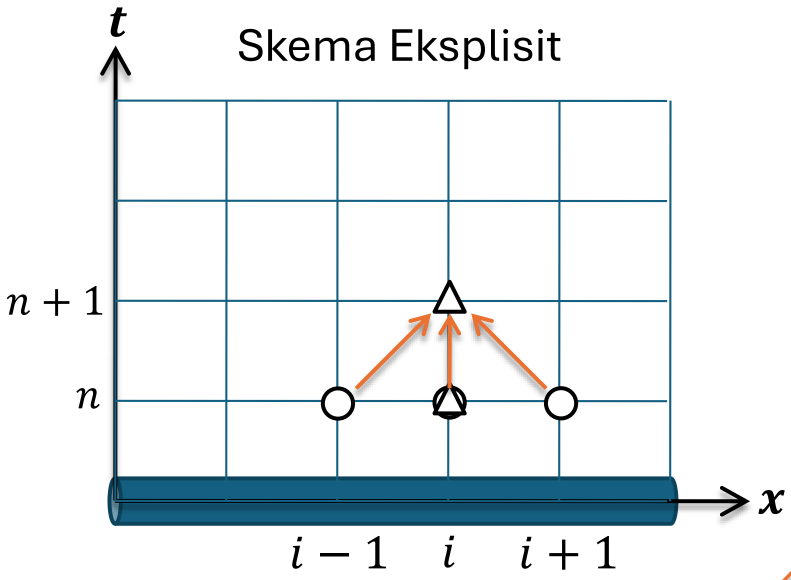
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

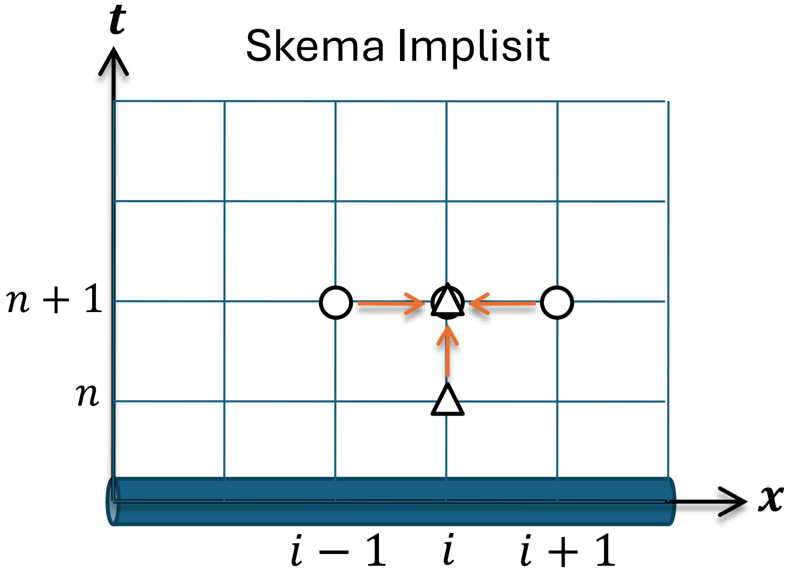
Skema Implisit

k konstan di sepanjang batang dan pada sepanjang waktu

Δx seragam di sepanjang batang

FDA Skema Eksplisit dan Skema Implisit

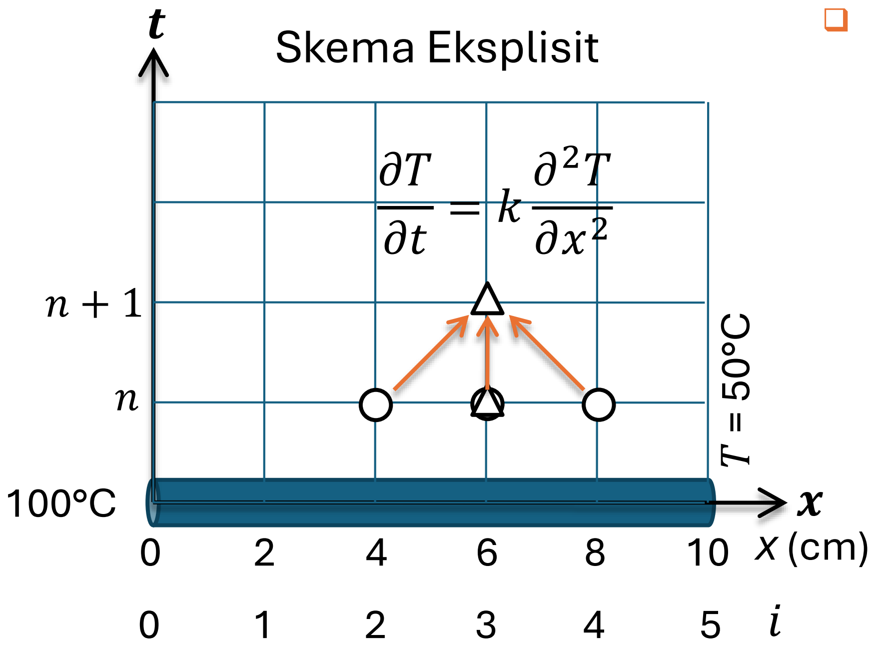




$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right)$$

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA Skema Eksplisit



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - time step, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi thermal, k = 0.835 cm^2/s
  - syarat batas: $T(x=0,t)$= 100°C dan $T(x=20,t)$ = 50°C
  - nilai awal: $T(x,t=0)$ = 0°C

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right)$$

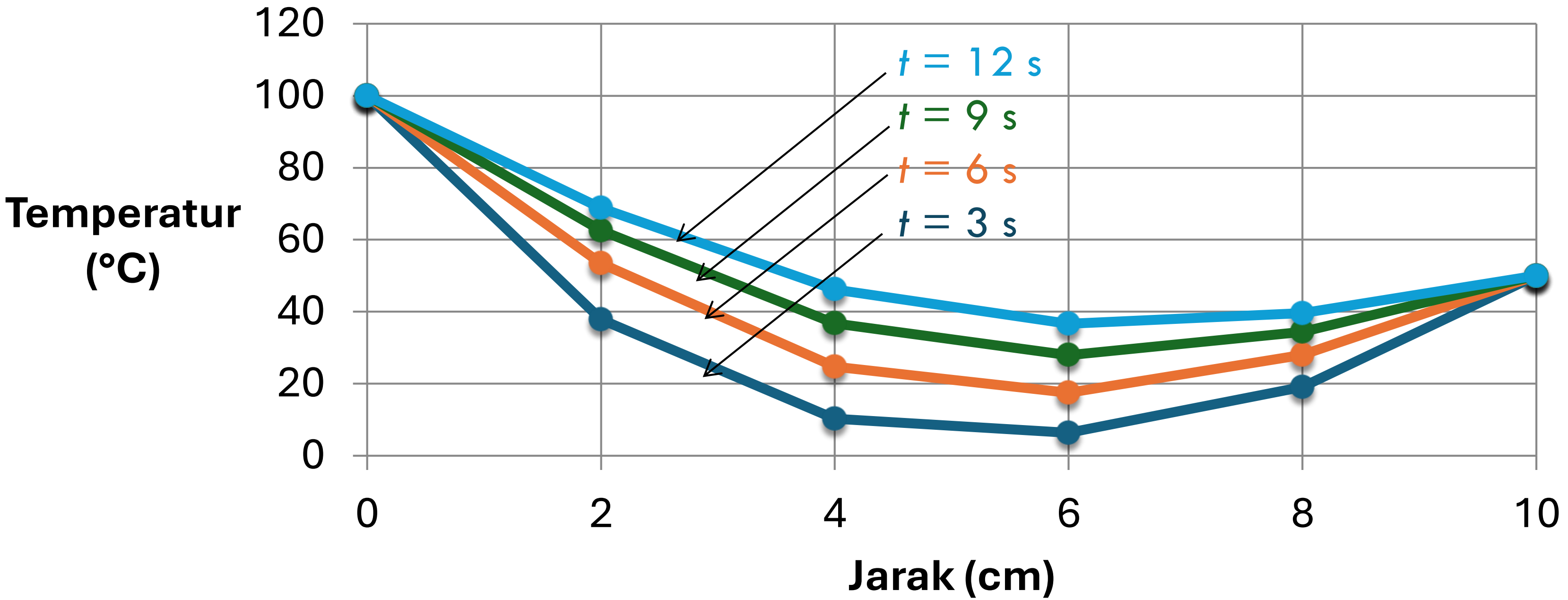
FDA Skema Eksplisit

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right) \quad i = 1,2,3,4$$

iterasi	waktu (s)	temperatur (°C) di titik hitung					
n	t	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
0	0	100	0	0	0	0	50
1	0.1	100	2.0875	0	0	1.0438	50
2	0.2	100	4.0878	0.0436	0.0218	2.0439	50
3	0.3	100	6.0056	0.1275	0.0645	3.0028	50
4	0.4	100	7.8450	0.2489	0.1271	3.9225	50
5	0.5	100	9.6102	0.4050	0.2089	4.8052	50

Hitungan diteruskan sampai $t = 12$ s

FDA Skema Eksplisit



FDA Skema Eksplisit

- Konvergensi dan stabilitas hitungan
  - Konvergensi berarti bahwa jika Δx dan Δt mendekati nol, maka penyelesaian FDA mendekati penyelesaian eksak.
  - Stabilitas berarti bahwa kesalahan hitungan di setiap tahap hitungan tidak mengalami amplifikasi, tetapi mengecil seiring dengan berjalannya hitungan.
- Skema eksplisit konvergen dan stabil jika

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k}$$

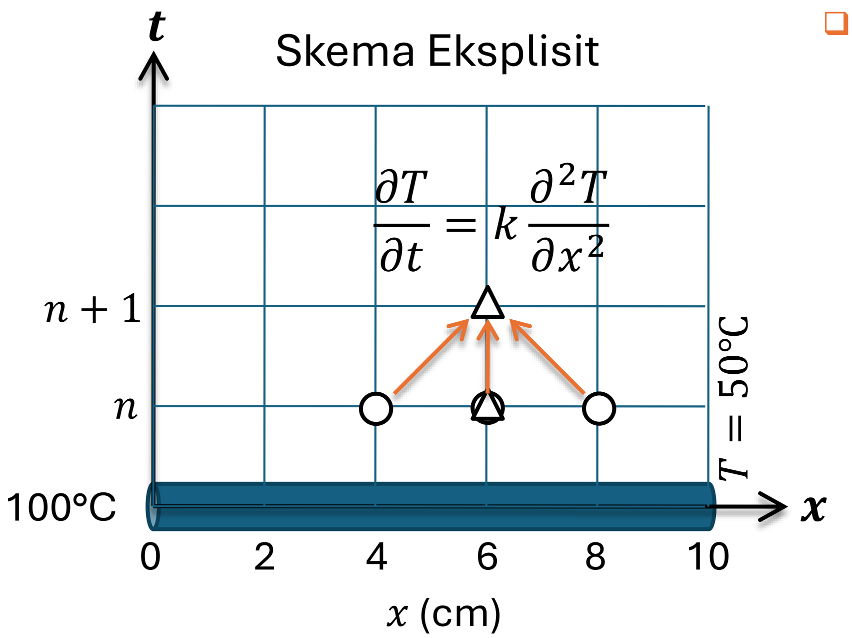
$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{cases} \leq \frac{1}{2} & \text{dapat terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ \leq \frac{1}{4} & \text{tidak terjadi oskilasi kesalahan hitungan} \\ = 1/6 & \text{meminimumkan } \textit{truncation error} \end{cases}$$

FDA Skema Eksplisit

- Konvergensi dan stabilitas hitungan
  - untuk mendapatkan akurasi hasil hitungan, dibutuhkan Δx kecil, namun
  - konsekuensi Δx kecil adalah Δt pun harus kecil untuk menjamin konvergensi dan kestabilan hitungan
  - jika Δx dikalikan faktor ½, maka Δt perlu dikalikan faktor ¼ untuk mempertahankan konvergensi dan kestabilan hitungan
  - skema eksplisit menjadi mahal, dalam arti beban hitungan bertambah besar

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

FDA Skema Eksplisit

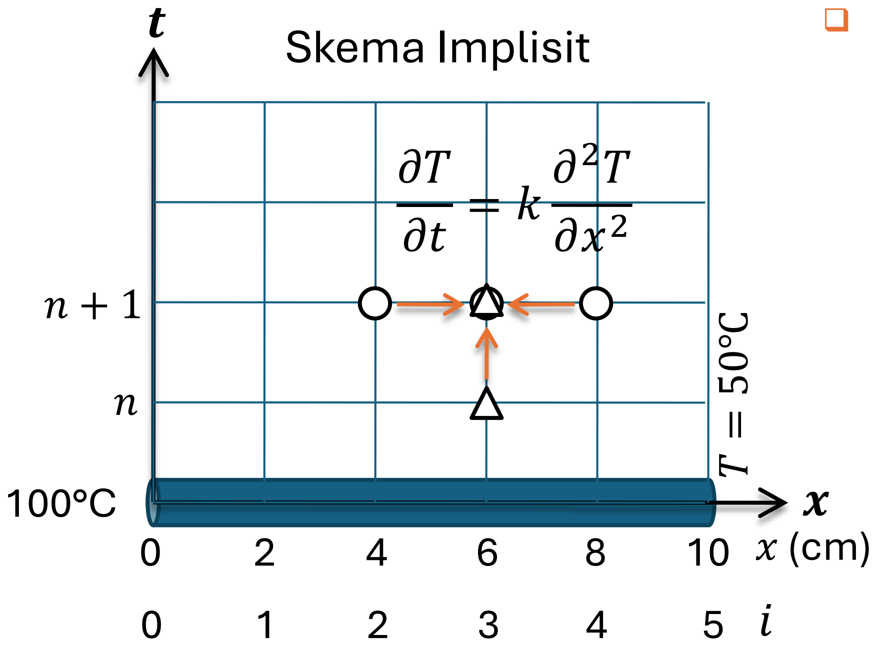


- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - time step, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi thermal, k = 0.835 cm²/s
  - syarat batas $T(x=0,t) = 100°C$ dan $T(x=20,t) = 50°C$
  - nilai awal $T(x,t=0) = 0°C$

Hitung dengan skema eksplisit $k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$

PR dikumpulkan minggu depan!

FDA Skema Implisit



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - time step, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi thermal, k = 0.835 cm²/s
  - syarat batas $T(x=0,t) = 100°\text{C}$ dan $T(x=20,t) = 50°\text{C}$
  - nilai awal $T(x,t=0) = 0°\text{C}$

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + \left(1+2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA Skema Implisit

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

$$k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \qquad 1 + 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.05175$$

- Hitungan pada saat $n + 1 = 1$ atau $t + \Delta t = 0.1$ s

$$\begin{array}{lccccl}
\text{node 1:} & 1.04175T_1^1 & -0.020875T_2^1 & & & = T_1^0 + 0.020875T_0 \\
\text{node 2:} & -0.020875T_1^1 & +1.04175T_2^1 & -0.020875T_3^1 & & = T_2^0 \\
\text{node 3:} & & -0.020875T_2^1 & +1.04175T_3^1 & -0.020875T_4^1 & = T_3^0 \\
\text{node 4:} & & & -0.020875T_3^1 & +1.04175T_4^1 & = T_4^0 + 0.020875T_5
\end{array}$$

FDA Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan yang memiliki 4 *unknowns*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix}}_{\text{matriks tridiagonal}} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}$$

- Apabila jumlah persamaan banyak, penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

FDA Skema Implisit

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* MSExcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1}\{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam MSExcel

FDA Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MSExcel adalah:

$$\underset{\{T\}}{\begin{Bmatrix}T_1^1\\T_2^1\\T_3^1\\T_4^1\end{Bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 & 0\\0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859\\0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508\\0 & 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309\end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \begin{Bmatrix}2.0875\\0\\0\\1.04375\end{Bmatrix} = \underset{\{RHS\}}{\begin{Bmatrix}2.0047\\0.0406\\0.0209\\1.0023\end{Bmatrix}}$$

FDA Skema Implisit

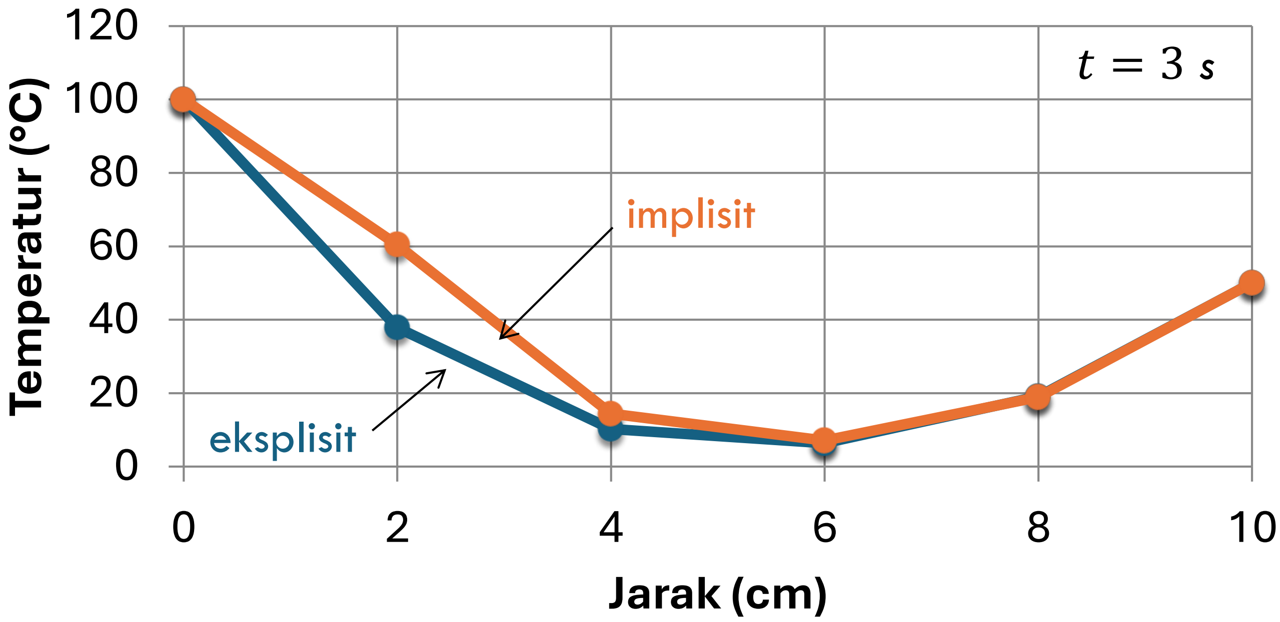
- Hitungan pada saat $n+1=2$ atau $t+\Delta t=0.2$ s
  - Matriks koefisien persamaan $[A]$ tidak berubah
  - Matriks di sebelah kanan tanda “=“ berubah dan merupakan fungsi T pada saat $n=1$

$$\{RHS\}=\begin{Bmatrix} T_1^1+0.020875\ T_0 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1+0.020875\ T_5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 2.0461 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 & 0 \\ 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 & 0.0003859 \\ 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 & 0.0192508 \\ 0 & 0.0003859 & 0.0192508 & 0.960309 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 2.0461 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4.0101 \\ 0.1206 \\ 0.0619 \\ 1.9653 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Implisit

Konduksi atau perambatan panas hasil hitungan dengan skema implisit tampak lebih cepat daripada hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada $t = 3$ s).



FDA Skema Eksplisit dan Implisit

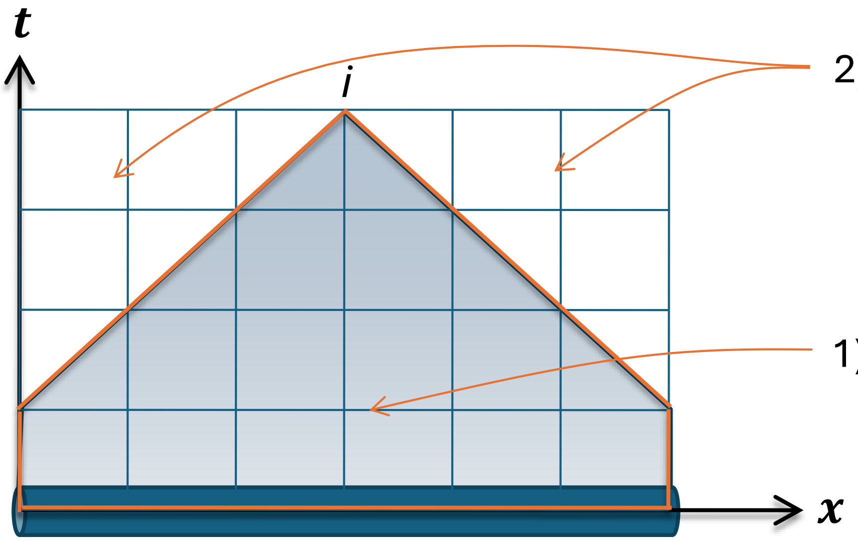
Skema eksplisit

- Persamaan dan teknik penyelesaiannya *straight-forward*, penyelesaian dilakukan *node* per *node*
- Rentan terhadap konvergensi dan stabilitas hitungan
- *Time step* terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

Skema implisit

- Persamaan dan teknik penyelesaian lebih “rumit”, penyelesaian dilakukan secara simultan untuk seluruh node
- Konvergensi dan stabilitas hitungan lebih mudah dijaga
- *Time step* tidak terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

FDA Skema Eksplisit dan Implisit



Skema Eksplisit

2) Saat menghitung T di i, titik-titik hitung (*nodes*) di kedua zona ini tidak diperhitungkan, padahal secara fisik, justru node-node di sini berpengaruh terhadap T di titik i.

1) Saat menghitung T di i, hanya titik-titik hitung *(nodes)* di dalam segitiga ini yang berpengaruh dalam hitungan.

FDA Skema Eksplisit dan Implisit

Skema Implisit

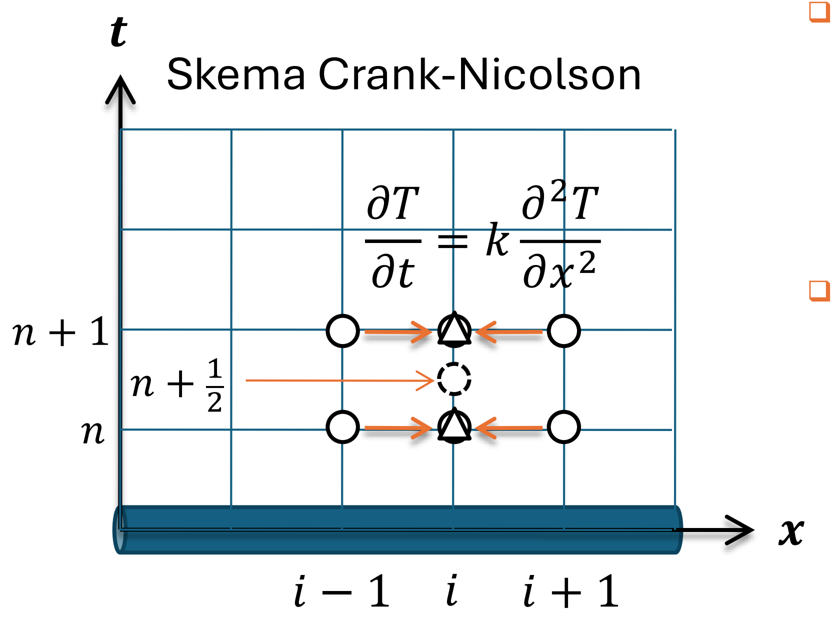
$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

1st order accurate *2nd order accurate*

1) Skema implisit menjamin konvergensi dan stabilitas hitungan, namun aproksimasi suku derivatif waktu dan suku derivatif ruang memiliki akurasi berbeda.
2) Skema implisit yang memiliki akurasi yang sama pada aproksimasi suku derivatif waktu dan ruang adalah Metode **Crank-Nicolson**.

FDA Metode Crank-Nicolson



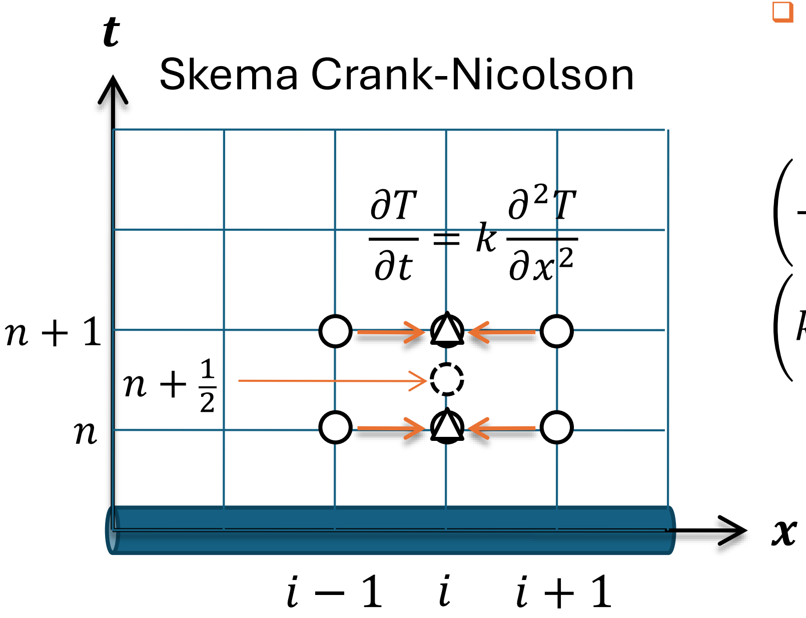
- Aproksimasi suku derivatif waktu ditempatkan pada waktu *n*+½

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

- Aproksimasi suku derivatif ruang pada waktu *n*+½ dianggap sbg nilai rata-rata derivatif pada waktu *n* dan *n*+1

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)$$

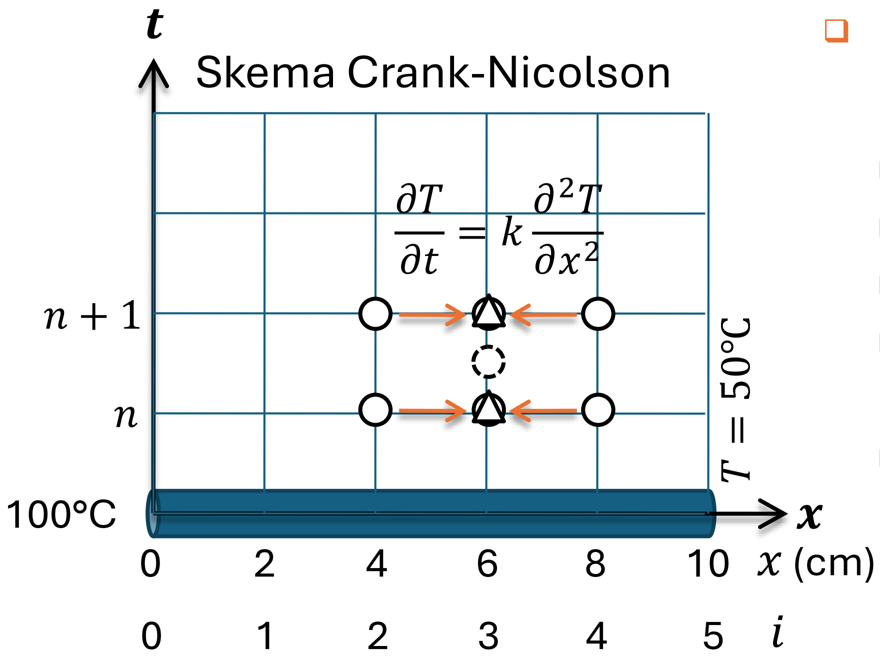
FDA Metode Crank-Nicolson



- Bentuk beda hingga persamaan parabola dengan demikian dapat dituliskan sbb.

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1+k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} =$$
$$\left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n} + 2\left(1-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n} + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n}$$

FDA Skema Crank-Nicolson



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - panjang batang, L = 10 cm, Δx = 2 cm
  - time step, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi thermal, k = 0.835 cm²/s
  - syarat batas $T(x = 0, t) = 100$℃ dan $T(x = 20, t) = 50$℃
  - nilai awal $T(x, t = 0) = 0$℃

FDA Skema Crank-Nicolson

$$\left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1} + 2\left(1 + k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} + \left(-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1} = \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n} + 2\left(1 - k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n} + \left(k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n}$$

$$k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \qquad 1 + 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.05175$$

- Hitungan pada saat $n + 1 = 1$ atau $t + \Delta t = 0.1$ s

$$\begin{array}{lrrrrcr}
\text{node 1:} & 2.04175T_1^1 & -0.020875T_2^1 & & & = & 4.1750 \\
\text{node 2:} & -0.020875T_1^1 & +2.04175T_2^1 & -0.020875T_3^1 & & = & 0 \\
\text{node 3:} & & -0.020875T_2^1 & +2.04175T_3^1 & -0.020875T_4^1 & = & 0 \\
\text{node 4:} & & & -0.020875T_3^1 & +2.04175T_4^1 & = & 2.0875
\end{array}$$

FDA Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix}}_{\text{matriks tridiagonal}} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}$$

- Apabila jumlah persamaan banyak, penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer.
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet.

FDA Skema Implisit

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan spreadsheet MSExcel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1}\{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam MSExcel

FDA Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet MSExcel adalah

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 & 0 \\ 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 \\ 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 \\ 0 & 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.0450 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}} = \begin{Bmatrix} 2.0450 \\ 0.0210 \\ 0.0107 \\ 1.0225 \end{Bmatrix}$$

FDA Skema Crank-Nicolson

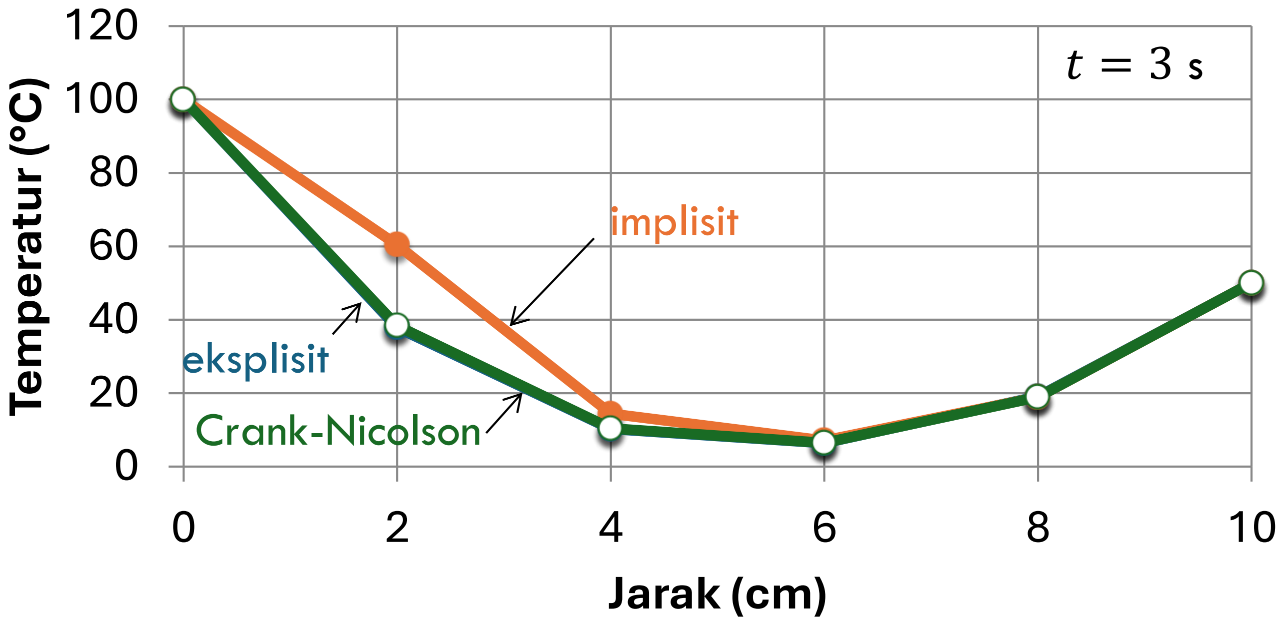
- Hitungan pada saat $n + 1 = 2$ atau $t + \Delta t = 0.2$ s
  - Matriks koefisien persamaan $[A]$ tidak berubah
  - Matriks di sebelah kanan tanda "=" berubah dan merupakan fungsi T pada saat $n = 1$

$$\{RHS\} = \begin{Bmatrix} 8.1797 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 & 0 \\ 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 & 0.0000512 \\ 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 & 0.0050086 \\ 0 & 0.0000512 & 0.0050086 & 0.4898271 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8.1797 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0071 \\ 0.0826 \\ 0.0422 \\ 2.0036 \end{Bmatrix}$$

FDA Skema Crank-Nicolson

Konduksi atau perambatan panas hasil hitungan dengan skema Crank-Nicolson tampak mirip dengan hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada $t = 3$ s).



FDA Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

FDA

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \theta\left(k\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + (1-\theta)\left(k\frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}\right)$$

- Skema FDA
  - $\theta = 0$ skema eksplisit
  - $\theta = 1$ skema implisit
  - $\theta = \frac{1}{2}$ skema Crank-Nicolson

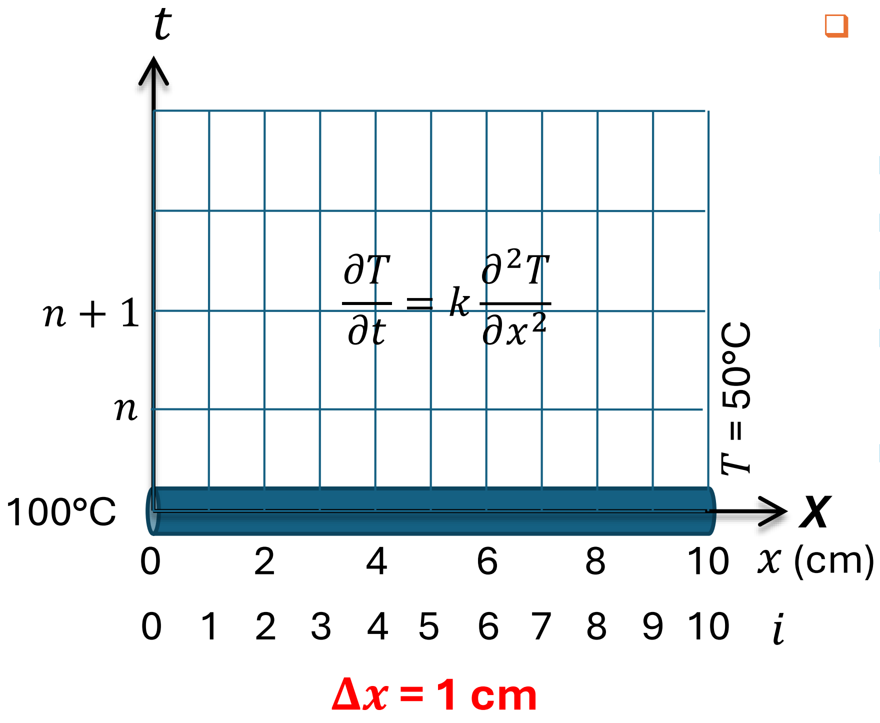
FDA Persamaan Parabolik

- Bentuk umum FDA persamaan diferensial parsial parabolik

$$\left(-\theta k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1}+\left(1+2\theta k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1}+\left(-\theta k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}=\left\{(1-\theta)k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right\}T_{i-1}^{n}+\left\{1-2(1-\theta)k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right\}T_i^{n}+\left\{(1-\theta)k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right\}T_{i+1}^{n}$$

- Skema FDA
  - $\theta=0$ skema eksplisit
  - $\theta=1$ skema implisit
  - $\theta=\frac{1}{2}$ skema Crank-Nicolson

FDA Persamaan Parabolik



- Konduksi panas di sebuah batang aluminium pipih panjang
  - **panjang batang, L = 10 cm, Δx = 1 cm (!!)**
  - time step, Δt = 0.1 s
  - koefisien difusi thermal, k = 0.835 cm^2/s
  - syarat batas $T(x = 0, t)$ = 100°C dan $T(x = 20, t)$ = 50°C
  - nilai awal $T(x, t = 0)$ = 0°C

- Hitung sampai *steady-state condition*
  - Skema eksplisit
  - Skema implisit
  - Skema Crank-Nicolson

PR/ Tugas

Sekian