

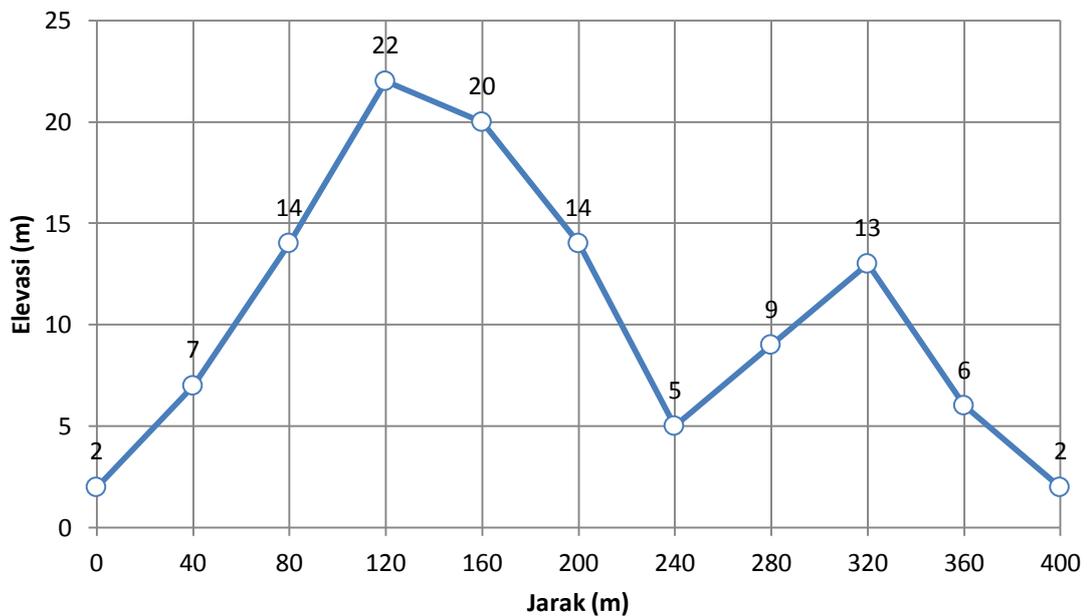
# UJIAN AKHIR SEMESTER MATEMATIKA TEKNIK

SABTU, 2 JULI 2011 | OPEN BOOK | WAKTU 100 MENIT

## PETUNJUK

- 1) Saudara boleh menggunakan komputer untuk mengerjakan soal-soal ujian ini. Tabel hitungan Saudara salin ke lembar jawab.
- 2) Harap Saudara memperhatikan satuan pada setiap variabel.
- 3) Setiap butir soal memiliki bobot nilai yang sama.

## SOAL 1



Gambar di atas menunjukkan profil tanah melintasi sebuah bukit. Bukit tersebut akan diratakan dengan cara dipotong (digali) hingga elevasi +0 m untuk keperluan pembangunan sebuah pabrik. Dengan asumsi profil tersebut identik pada arah tegak lurus bidang gambar, hitunglah dengan cara numeris volume potongan (per meter lebar tegak lurus bidang gambar) yang harus dilakukan.

## PENYELESAIAN

Volume potongan per meter lebar tegak lurus bidang gambar adalah sama dengan luas kawasan di bawah kurva profil muka tanah dan di atas bidang pada elevasi +0 m, serta dibatasi oleh jarak 0 m di sisi kiri dan 400 m di sisi kanan. Secara matematis, luas tersebut dinyatakan dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$A = \int_0^{400} y \, dx$$

Dalam persamaan tersebut  $A$  adalah luas ( $m^2$ ),  $y$  adalah elevasi muka tanah ( $m$ ), dan  $x$  adalah jarak ( $m$ ). Secara numeris, integral di atas dapat dihitung dengan memakai salah satu metoda yang telah dibahas pada saat kuliah. Di sini, dipilih metoda trapesium. Pada gambar tampak ada 10 buah trapesium dengan lebar seragam,  $h = \Delta x = 40 \, m$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{40} y \, dx + \int_{40}^{80} y \, dx + \dots + \int_{360}^{400} y \, dx \\ &= A_1 + A_2 + \dots + A_{10} \\ &\approx 40 \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right) + 40 \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right) + \dots + 40 \left( \frac{y_9 + y_{10}}{2} \right) \end{aligned}$$

Hitungan dilakukan dengan cara tabulasi seperti disajikan pada tabel di bawah ini.

TABEL 1. HITUNGAN VOLUME GALIAN DENGAN INTEGRASI NUMERIS METODA TRAPESIUM

Titik ukur $i$	Jarak (m) $x_i$	Elevasi (m) $y_i$	Luas ( $m^2$ ) $A_i$
0	0	2	---
1	40	7	180
2	80	14	420
3	120	22	720
4	160	20	840
5	200	14	680
6	240	5	380
7	280	9	280
8	320	13	440
9	360	6	380
10	400	2	160
			4 480

Jadi luas atau volume pekerjaan galian tanah yang harus dilakukan untuk perataan tanah hingga elevasi +0 m adalah  $4\,480 \, m^3/m'$ .

Pada metoda trapesium, bentuk profil bukit didekati dengan garis lurus yang menghubungkan titik-titik data ukur elevasi tanah. Bentuk profil itu sendiri tidak diketahui karena data elevasi tanah di antara titik-titik ukur tidak diketahui. Metoda trapesium dapat memiliki kesalahan hitung yang besar, khususnya apabila bentuk profil bukit pada kenyataannya menyimpang dari garis-garis lurus antar titik-titik data ukur. Untuk meningkatkan ketelitian hasil hitungan, dapat dipakai metoda Simpson 1/3. Pada metoda ini, antara 3 titik data ukur dihubungkan dengan garis lengkung yang diperoleh dari fungsi polinomial orde 2. Karena ada 11 titik data, maka ada 5 pasang tiga titik data atau 5 pias yang masing-masing memiliki lebar 80 m. Simpson 1/3 diterapkan pada kelima pias tersebut:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{80} y \, dx + \int_{80}^{160} y \, dx + \int_{160}^{240} y \, dx + \int_{240}^{360} y \, dx + \int_{360}^{400} y \, dx \\
 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\
 &\approx 80 \left( \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \right) + 80 \left( \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} \right) + \dots + 80 \left( \frac{y_8 + 4y_9 + y_{10}}{6} \right)
 \end{aligned}$$

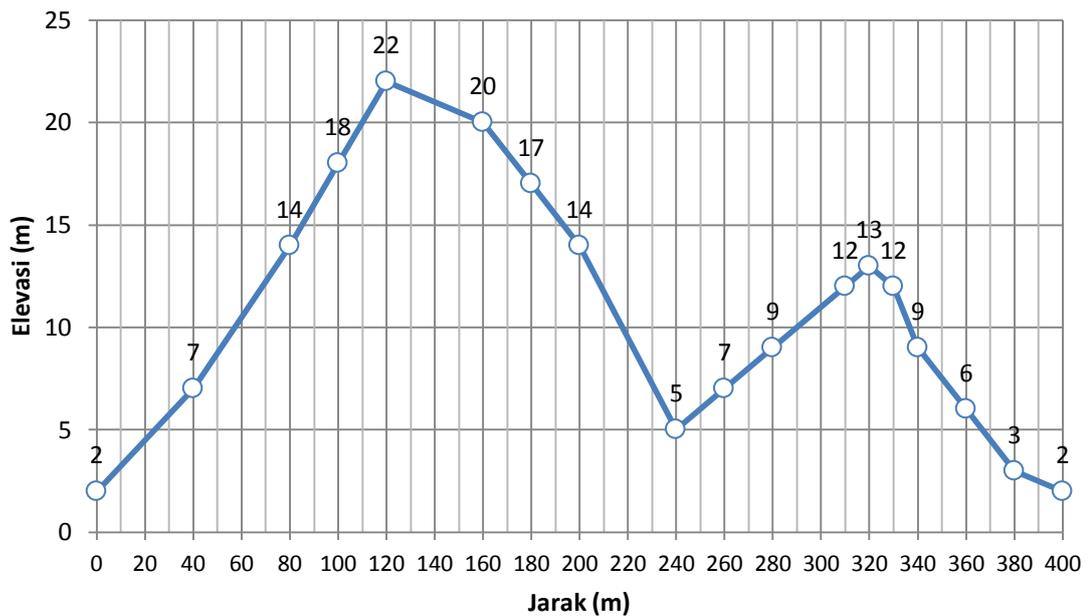
Hitungan dilakukan dengan cara tabulasi seperti disajikan pada tabel di bawah ini.

TABEL 2. HITUNGAN VOLUME GALIAN DENGAN INTEGRASI NUMERIS METODA SIMPSON 1/3

Titik ukur <i>i</i>	Jarak (m) <i>x<sub>i</sub></i>	Elevasi (m) <i>y<sub>i</sub></i>	Luas (m <sup>2</sup> ) <i>A<sub>i</sub></i>
0	0	2	---
1	40	7	---
2	80	14	586.667
3	120	22	---
4	160	20	1626.667
5	200	14	---
6	240	5	1080
7	280	9	---
8	320	13	720
9	360	6	---
10	400	2	520
			4533.333

Jadi luas atau volume pekerjaan galian tanah yang harus dilakukan untuk perataan tanah hingga elevasi +0 m adalah 4 533.333 m<sup>3</sup>/m'.

### SOAL 2



Menjelang pelaksanaan pemotongan bukit pada Soal 1, dilakukan pengukuran ulang dengan penambahan titik ukur. Hasil pengukuran ulang disajikan pada gambar di bawah ini.

Hitung kembali volume pekerjaan pemotongan bukit tersebut dengan metoda numeris. Gunakan metoda integrasi numeris Simpson 1/3 atau 3/8. Pada pias yang tidak memungkinkan penggunaan metoda Simpson, pakailah metoda trapesium. Tunjukkan pada tabel hitungan Saudara, metoda yang dipakai pada setiap pias.

**PENYELESAIAN**

Metoda Simpson 1/3 membutuhkan 3 pasang titik data berjarak seragam dan metoda Simpson 3/8 membutuhkan 4 pasang titik data berjarak seragam. Luas di bawah kurva atau nilai integral menurut metoda Simpson 3/8 untuk suatu pias adalah:

$$A_i = \int_{x_0}^{x_3} y \, dx$$

$$\approx (x_3 - x_0) \left( \frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8} \right)$$

Pada Soal 2, ada beberapa pias yang luasnya dapat dihitung dengan metoda Simpson 3/8, sebagian yang lain dihitung dengan metoda Simpson 1/3, dan ada pula yang hanya dapat dihitung dengan metoda trapesium. Hitungan disajikan pada Tabel 3.

Hitungan integrasi numeris dengan berbagai metoda menunjukkan bahwa luas atau volume pekerjaan galian tanah untuk perataan tanah hingga elevasi +0 m adalah 4 446.667 m<sup>3</sup>/m'.

TABEL 3. HITUNGAN VOLUME GALIAN DENGAN INTEGRASI NUMERIS METODA SIMPSON 3/8, SIMPSON 1/3, DAN TRAPESIUM

Titik ukur <i>i</i>	Jarak (m) <i>x<sub>i</sub></i>	Elevasi (m) <i>y<sub>i</sub></i>	Lebar pias $\Delta x_i$	Luas (m <sup>2</sup> ) <i>A<sub>i</sub></i>	Metoda
0	0	2	---	---	
1	40	7	40	---	
2	80	14	40	586.667	Simpson 1/3
3	100	18	20	---	
4	120	22	20	720	Simpson 1/3
5	160	20	40	840	Trapesium
6	180	17	20	---	
7	200	14	20	680	Simpson 1/3
8	240	5	40	380	Trapesium
9	260	7	20	---	
10	280	9	20	280	Simpson 1/3
11	310	12	30	315	Trapesium
12	320	13	10	---	
13	330	12	10	---	
14	340	9	10	360	Simpson 3/8
15	360	6	20	---	
16	380	3	20	---	
17	400	2	20	285	Simpson 3/8
				4446.667	

### SOAL 3

Sebuah benda bergerak naik turun dengan kecepatan yang berubah-ubah. Dari pengukuran selama 2 detik dengan selang pengukuran 0.1 detik (frekuensi sampling 10 Hertz), diperoleh informasi bahwa kecepatan gerak benda tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$v = \frac{dy}{dt} = y \cos(3.2645t - 0.5) - y \sin(3.2645t - 0.5), \text{ pada } t = 0 \text{ s} \Rightarrow y = 1 \text{ m}$$

Dalam persamaan di atas  $v$  adalah kecepatan gerak benda (m/s),  $y$  adalah elevasi (m), dan  $t$  adalah waktu (s). Pada saat pengukuran dimulai,  $t = 0$  s, posisi benda berada pada elevasi  $y = 1$  m.

Hitunglah dengan cara numeris posisi benda tersebut setiap selang waktu  $h = \Delta t = 0.1$  s pada rentang waktu  $t = 0$  s.d. 2 s. Pakailah **salah satu** metoda: Euler, Heun, atau Poligon. Apabila Saudara menambahkan metoda Runge-Kutta untuk menghitung posisi benda tersebut, tambahan (bonus) nilai akan diberikan.

### PENYELESAIAN

Penyelesaian persamaan diferensial ordiner (*ordinary differential equations*, ODE) dengan syarat awal yang diketahui seperti pada Soal 3 ini dilakukan dengan beda hingga yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Dalam persamaan tersebut  $y_{i+1}$  dan  $y_i$  berturut-turut adalah posisi atau elevasi benda pada waktu  $t_{i+1}$  dan  $t_i$ ,  $h$  adalah selang waktu atau  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ , dan  $\phi$  adalah *slope* atau gradien penggal kurva antara  $y_i$  dan  $y_{i+1}$ . Gradien  $\phi$  merupakan fungsi  $t$  dan  $y$ ,  $\phi = dy/dt = f(t, y)$ . Dalam hal ini, gradien  $\phi$  tidak lain adalah kecepatan benda,  $v$ , saat bergerak dari  $y_i$  ke  $y_{i+1}$ . Tiga metoda hitungan, yaitu Euler, Heun, dan Poligon berbeda dalam menetapkan gradien  $\phi$ :

- pada metoda Euler,  $\phi$  ditetapkan sebagai gradien di titik  $t_i$ ,
- pada metoda Heun,  $\phi$  ditetapkan sebagai gradien rata-rata antara gradien di titik  $t_i$  dan gradien di titik  $t_{i+1}$ ,
- pada metoda Poligon,  $\phi$  ditetapkan sebagai gradien di titik tengah antara  $t_i$  dan  $t_{i+1}$ .

Metoda penyelesaian yang paling mudah dan cepat untuk diselesaikan adalah metoda Euler:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h = y_i + v_i h, \quad h = 0.1 \text{ s}$$

Hitungan disajikan dalam pada Tabel 4.

Sampai di sini, Saudara telah selesai menjawab semua soal ujian. Namun demikian, apabila Saudara masih memiliki waktu, Saudara dapat mencoba menyelesaikan Soal 3 ini dengan memakai metoda-metoda yang lain. Pada tabel Tabel 5, Tabel 6, dan Tabel 7 disajikan hitungan penyelesaian ODE secara numeris dengan memakai metoda Heun, Poligon, dan Runge-Kutta. Pada pemakaian metoda Heun, hanya dilakukan satu kali koreksi, jadi  $y_{i+1}$  yang diperoleh dari langkah pertama sebagai prediktor dikoreksi pada langkah kedua yang menghasilkan korektor. Setelah itu, hitungan berlanjut pada langkah waktu  $t$  berikutnya. Metoda ini dikenal sebagai single-corrector Heun.

$$y_{i+1}^{prediktor} = y_i + f(t_i, y_i)h = y_i + v_i h$$

$$\phi_{rata-rata} = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{prediktor})}{2}$$

$$y_{i+1}^{korektor} = y_i + \phi_{rata-rata} h$$

Metoda Poligon mendefinisikan gradien gradien  $\phi$  (yaitu kecepatan  $v$ ) antara  $y_i$  dan  $y_{i+1}$  sebagai gradien di titik  $y_{i+1/2}$ , yaitu titik di tengah antara  $y_i$  dan  $y_{i+1}$ . Langkah hitungan adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1/2} = y_i + f(t_i, y_i) \frac{h}{2} = y_i + v_i \frac{h}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

Metoda Runge-Kutta (RK) ada beberapa jenis, antara lain *second-order* RK, *third-order* RK, atau *fourth-order* RK. Pada Tabel 7 disajikan penyelesaian ODE dengan metoda *fourth-order* RK. Persamaan-persamaan yang dipakai pada metoda ini adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} h$$

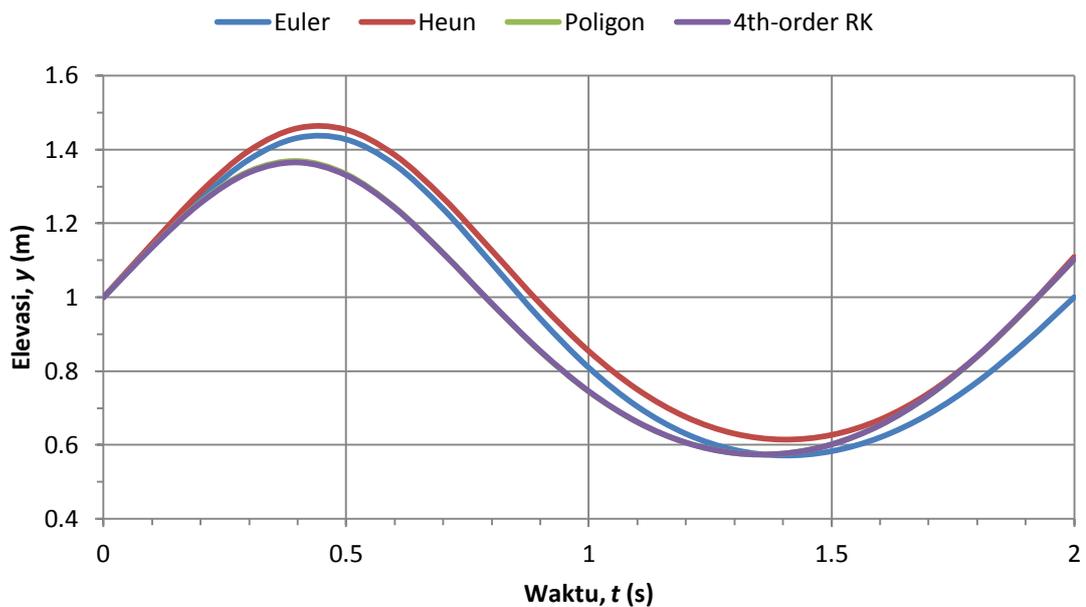
$$k_1 = f(t_i, y_i) = v_i$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$$

Hasil hitungan posisi benda pada waktu  $t = 0$  s.d. 2 detik dengan berbagai metoda disajikan pada gambar di bawah ini.



TABEL 4. HITUNGAN POSISI BENDA DENGAN PENYELESAIAN ODE SECARA NUMERIS MEMAKAI METODA EULER

$i$	$t_i$ (s)	$f(t_i, y_i)$	$y_i$ (m)
0	0	1.357	1
1	0.1	1.315	1.136
2	0.2	1.059	1.267
3	0.3	0.585	1.373
4	0.4	-0.041	1.432
5	0.5	-0.686	1.427
6	0.6	-1.198	1.359
7	0.7	-1.474	1.239
8	0.8	-1.498	1.092
9	0.9	-1.327	0.942
10	1	-1.050	0.809
11	1.1	-0.739	0.704
12	1.2	-0.435	0.630
13	1.3	-0.151	0.587
14	1.4	0.115	0.572
15	1.5	0.373	0.583
16	1.6	0.627	0.620
17	1.7	0.871	0.683
18	1.8	1.081	0.770
19	1.9	1.216	0.878
20	2	---	1

TABEL 5. HITUNGAN POSISI BENDA DENGAN PENYELESAIAN ODE SECARA NUMERIS MEMAKAI METODA HEUN

$i$	$t_i$ (s)	$f(t_i, y_i)$ (m/s)	$y_{i(\text{prediktor})}$ (m)	$f(t_i, y_i)$ (m/s)	$\phi_{\text{rata-rata}}$ (m/s)	$y_{i(\text{korektor})}$ (m)
0	0	1.357				1
1	0.1	1.325	1.136	1.541	1.449	1.145
2	0.2	1.074	1.277	1.479	1.402	1.285
3	0.3	0.595	1.393	1.164	1.119	1.397
4	0.4	-0.042	1.457	0.621	0.608	1.458
5	0.5	-0.699	1.454	-0.042	-0.042	1.454
6	0.6	-1.222	1.384	-0.665	-0.682	1.385
7	0.7	-1.509	1.263	-1.114	-1.168	1.269
8	0.8	-1.546	1.118	-1.330	-1.420	1.127
9	0.9	-1.385	0.972	-1.334	-1.440	0.983
10	1	-1.108	0.844	-1.190	-1.287	0.854
11	1.1	-0.787	0.743	-0.965	-1.036	0.750
12	1.2	-0.466	0.672	-0.705	-0.746	0.676
13	1.3	-0.162	0.629	-0.434	-0.450	0.631
14	1.4	0.124	0.614	-0.158	-0.160	0.615
15	1.5	0.402	0.627	0.127	0.125	0.627
16	1.6	0.676	0.667	0.427	0.414	0.669
17	1.7	0.943	0.736	0.744	0.710	0.740
18	1.8	1.179	0.834	1.063	1.003	0.840
19	1.9	1.338	0.958	1.345	1.262	0.966
20	2	---	1.100	1.523	1.430	1.109

TABEL 6. HITUNGAN POSISI BENDA DENGAN PENYELESAIAN ODE SECARA NUMERIS MEMAKAI METODA POLIGON

$i$	$t_i$ (s)	$f(t_i, y_i)$ (m/s)	$t_{i+\frac{1}{2}}$ (s)	$y_{i+\frac{1}{2}}$ (m)	$f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ (m/s)	$y_i$ (m)
0	0	1.357				1
1	0.1	1.315	0.050	1.068	1.361	1.136
2	0.2	1.051	0.150	1.202	1.214	1.257
3	0.3	0.572	0.250	1.310	0.838	1.341
4	0.4	-0.039	0.350	1.370	0.276	1.369
5	0.5	-0.641	0.450	1.367	-0.353	1.334
6	0.6	-1.097	0.550	1.301	-0.899	1.244
7	0.7	-1.331	0.650	1.189	-1.248	1.119
8	0.8	-1.348	0.750	1.052	-1.366	0.982
9	0.9	-1.203	0.850	0.915	-1.290	0.853
10	1	-0.966	0.950	0.793	-1.088	0.744
11	1.1	-0.694	1.050	0.696	-0.828	0.662
12	1.2	-0.418	1.150	0.627	-0.553	0.606
13	1.3	-0.149	1.250	0.586	-0.281	0.578
14	1.4	0.116	1.350	0.571	-0.016	0.577
15	1.5	0.385	1.450	0.583	0.249	0.602
16	1.6	0.661	1.550	0.621	0.519	0.654
17	1.7	0.934	1.650	0.687	0.795	0.733
18	1.8	1.178	1.750	0.780	1.058	0.839
19	1.9	1.337	1.850	0.898	1.268	0.966
20	2	---	1.950	1.033	1.362	1.102

TABEL 7. HITUNGAN POSISI BENDA DENGAN PENYELESAIAN ODE SECARA NUMERIS MEMAKAI 4TH-ORDER RUNGE-KUTTA

$i$	$t_i$ (s)	$k_1$ (m/s)	$k_2$ (m/s)	$k_3$ (m/s)	$k_4$ (m/s)	$\phi$ (m/s)	$y_i$ (m)
0	0	1.357	1.361	1.361	1.315	1.353	1
1	0.1	1.314	1.213	1.208	1.050	1.201	1.135
2	0.2	1.050	0.836	0.830	0.570	0.825	1.255
3	0.3	0.570	0.275	0.272	-0.039	0.271	1.338
4	0.4	-0.039	-0.352	-0.348	-0.639	-0.346	1.365
5	0.5	-0.640	-0.897	-0.888	-1.095	-0.884	1.330
6	0.6	-1.095	-1.246	-1.238	-1.330	-1.233	1.242
7	0.7	-1.331	-1.366	-1.364	-1.348	-1.356	1.119
8	0.8	-1.349	-1.291	-1.295	-1.203	-1.287	0.983
9	0.9	-1.204	-1.090	-1.097	-0.966	-1.091	0.854
10	1	-0.967	-0.829	-0.837	-0.694	-0.832	0.745
11	1.1	-0.695	-0.553	-0.559	-0.418	-0.556	0.662
12	1.2	-0.418	-0.281	-0.284	-0.149	-0.283	0.606
13	1.3	-0.149	-0.016	-0.016	0.116	-0.016	0.578
14	1.4	0.116	0.249	0.251	0.385	0.250	0.577
15	1.5	0.385	0.519	0.525	0.661	0.522	0.602
16	1.6	0.661	0.795	0.803	0.936	0.799	0.654
17	1.7	0.935	1.059	1.068	1.180	1.061	0.734
18	1.8	1.179	1.270	1.276	1.340	1.269	0.840
19	1.9	1.339	1.364	1.366	1.345	1.357	0.967
20	2						1.102