UJIAN AKHIR SEMESTER MATEMATIKA TEKNIK

SENIN, 9 JANUARI 2012 | OPEN BOOK | WAKTU 120 MENIT
KLAS B DAN KLAS C

PETUNJUK

1) Saudara boleh menggunakan komputer untuk mengerjakan soal-soal ujian ini. Tabel hitungan dan kurva Saudara salin ke lembar jawab.
2) Tuliskan urutan/cara /formula yang Saudara pakai untuk mendapatkan jawaban (bukan hanya angka jawaban yang keluar di tabel *spreadsheet*).
3) Setiap butir soal memiliki bobot nilai yang hampir sama sesuai tingkat kesulitannya.

SOAL 1 NUMERICAL INTERPOLATION

a) Pakailah *spreadsheet* untuk menggambarkan 3 kurva polinomial Lagrange derajat 2 yang melewati titik-titik x = 1.0, 1.7, dan 2.3. / *Use spreadsheet application program to draw 3 curves of the Lagrange Polynomial of degree 2 that pass through x = 1.0, 1.7, and 2.3.*
b) Gambarkan kurva interpolasi Lagrange derajat 2 untuk menginterpolasikan pasangan titik-titik pada tabel di bawah ini. / *Draw the Lagrange Interpolating Polynomial for the following data.*

No.	x	y
0	1.0	0.56
1	1.7	0.25
2	2.3	0.33

PENYELESAIAN

Kurva polinomial Lagrange:

$$L_{x_i}(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \neq x_i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ketiga kurva polinomial Lagrange yang melewati ketiga titik tersebut adalah:

$$L_{1.0}(x) = \frac{x-1.7}{1.0-1.7}\,\frac{x-2.3}{1.0-2.3}$$

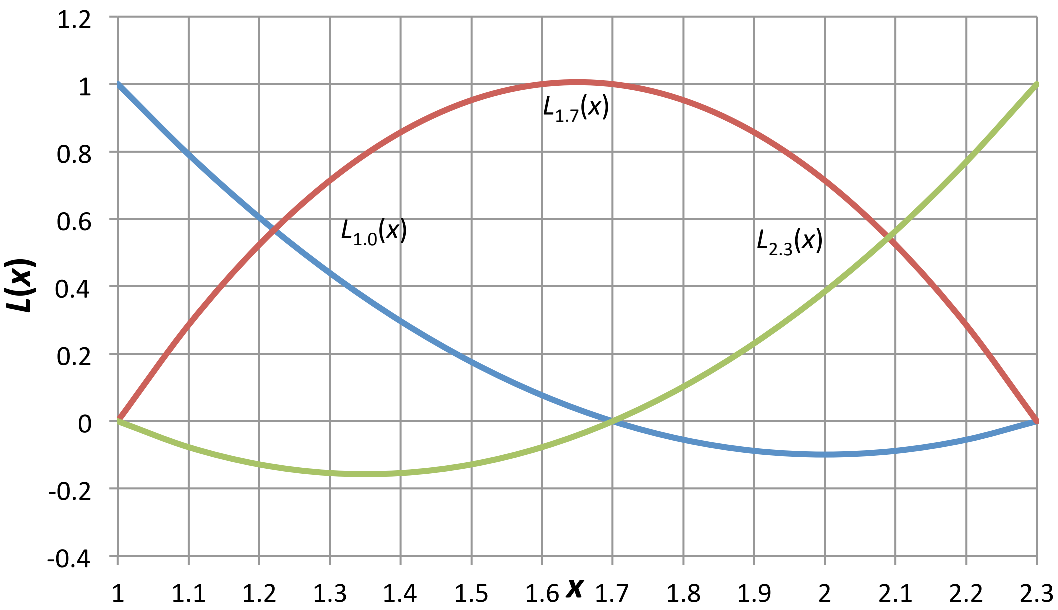
$$L_{1.7}(x) = \frac{x-1.0}{1.7-1.0}\,\frac{x-2.3}{1.7-2.3}$$

$$L_{2.3}(x) = \frac{x-1.0}{2.3-1.0}\,\frac{x-1.7}{2.3-1.7}$$

Untuk menggambarkan ketiga kurva dengan bantuan *spreadsheet*, dihitung titik-titik koordinat $[x, L_{1.0}(x)]$, $1.0 \le x \le 2.3$ dengan interval $\Delta x = 0.1$. Hitungan dilakukan dengan cara tabulasi seperti disajikan pada Tabel 1. Kurva disajikan pada Gambar 1.

TABEL 1. HITUNGAN KOORDINAT KURVA POLINOMIAL LAGRANGE

x	$L_{1.0}(x)$	$L_{1.7}(x)$	$L_{2.3}(x)$
1.0	1.0000	0.0000	0.0000
1.1	0.7912	0.2857	-0.0769
1.2	0.6044	0.5238	-0.1282
1.3	0.4396	0.7143	-0.1538
1.4	0.2967	0.8571	-0.1538
1.5	0.1758	0.9524	-0.1282
1.6	0.0769	1.0000	-0.0769
1.7	0.0000	1.0000	0.0000
1.8	-0.0549	0.9524	0.1026
1.9	-0.0879	0.8571	0.2308
2.0	-0.0989	0.7143	0.3846
2.1	-0.0879	0.5238	0.5641
2.2	-0.0549	0.2857	0.7692
2.3	0.0000	0.0000	1.0000



GAMBAR 1. TIGA KURVA POLINOMIAL LAGRANGE YANG MELEWATI x = 1.0, 1.7, DAN 2.3

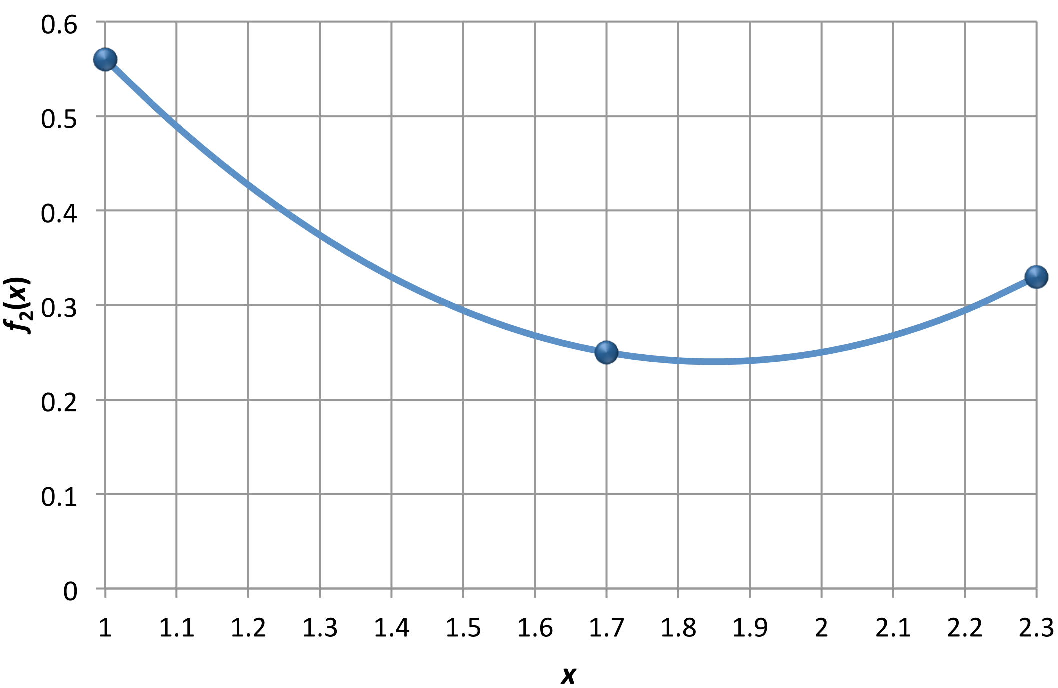
Kurva interpolasi polinomial Lagrange yang melewati ketiga pasang titik data dinyatakan dengan persamaan:

$$f_2(x) = L_{1.0}(x)\, f(1.0) + L_{1.7}(x)\, f(1.7) + L_{2.3}(x)\, f(2.3)$$

Hitungan dilakukan dengan bantuan tabulasi *spreadsheet* seperti disajikan pada Tabel 2 dan kurva interpolasi yang melewati ketiga titik disajikan pada Gambar 2.

TABEL 2. HITUNGAN KURVA INTERPOLASI LAGRANGE MELEWATI TITIK-TITIK (1.0,0.56), (1.7,0.25), DAN (2.3,0.33)

x	$L_{1.0}(x)$	$L_{1.7}(x)$	$L_{2.3}(x)$	$f_2(x)$
1.0	1.0000	0.0000	0.0000	0.5600
1.1	0.7912	0.2857	-0.0769	0.4891
1.2	0.6044	0.5238	-0.1282	0.4271
1.3	0.4396	0.7143	-0.1538	0.3740
1.4	0.2967	0.8571	-0.1538	0.3297
1.5	0.1758	0.9524	-0.1282	0.2942
1.6	0.0769	1.0000	-0.0769	0.2677
1.7	0.0000	1.0000	0.0000	0.2500
1.8	-0.0549	0.9524	0.1026	0.2412
1.9	-0.0879	0.8571	0.2308	0.2412
2.0	-0.0989	0.7143	0.3846	0.2501
2.1	-0.0879	0.5238	0.5641	0.2679
2.2	-0.0549	0.2857	0.7692	0.2945
2.3	0.0000	0.0000	1.0000	0.3300



GAMBAR 2. KURVA INTERPOLASI LAGRANGE MELEWATI TIGA TITIK (1.0,0.56), (1.7,0.25), DAN (2.3,0.33)

SOAL 2

a) Bandingkan pendekatan nilai derivatif fungsi di bawah ini pada titik x = 0.31 dengan skema diferensi mundur, diferensi maju, dan diferensi tengah. Pakailah $h = \Delta x = 0.01$ / *Compare the approximation values of the derivative of the following function on x = 0.31 using the backward-difference formula, the forward-difference formula, and the central-difference formula. Use h (Δx) of 0.01.*
$f(x) = 0.9x^2 + 1.2\sin^2 x$.

b) Pakailah polinomial interpolasi Lagrange derajat 2 untuk mendekati nilai derivatif fungsi tersebut seperti pada soal butir a. Buatlah titik-titik bantu yang diperlukan dengan jarak 0.01 dari titik yang bersangkutan. / *Use the Lagrange Interpolating Polynomial of degree 2 to approximate the derivative of the above problem (2a). Take some necessary points to do so.*

PENYELESAIAN

Fungsi dan derivatif fungsi skema diferensi maju, diferensi mundur, dan diferensi tengah:

$$f(x) = 0.9x^2 + 1.2\sin^2 x$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(0.32) - f(0.31)}{0.01} = \frac{0.2109 - 0.19816}{0.01} = 1.27936$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(0.31) - f(0.30)}{0.01} = \frac{0.19816 - 0.1858}{0.01} = 1.23643$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(0.32) - f(0.30)}{2(0.01)} = \frac{0.2109 - 0.1858}{0.02} = 1.2552$$

Derivatif fungsi:

$$f'(x) = 2(0.9)x + 2(1.2)\sin x \cos x = 1.8\,x + 2.4\sin x \cos x$$

Fungsi polinomial Lagrange untuk mendekati fungsi di atas adalah:

$$f_2'(x) = L_{0.30}(x)\,f'(0.30) + L_{0.31}(x)\,f'(0.31) + L_{0.32}(x)\,f'(0.32)$$

Untuk nilai x = 0.31:

$$\begin{aligned} f_2'(0.31) &= \frac{0.31-0.31}{0.30-0.31}\,\frac{0.31-0.32}{0.30-0.32}\,f'(0.30) + \frac{0.31-0.30}{0.31-0.30}\,\frac{0.31-0.32}{0.31-0.32}\,f'(0.31) + \ldots \\ &\quad + \frac{0.31-0.30}{0.32-0.30}\,\frac{0.31-0.31}{0.32-0.31}\,f'(0.32) \\ &= 0 + 1\left[1.8\,(0.31) + 2.4\,(\sin 0.31)(\cos 0.31)\right] + 0 \\ &= 1.25524 \end{aligned}$$

SOAL 3

a) Dekati integral fungsi pada soal 2a di antara titik x = 0.1 dan titik x = 0.4 dengan metode trapesium. / *Approximate the integral of the function in Problem 2a, between two x values of 0.1 and 0.4 using the trapezoidal rule.*

b) Hitung soal pada butir a di atas dengan metode Kuadratur Gauss derajat 2. / *Approximate the solution of Problem a using the Gauss Quadrature of degree 2.*

PENYELESAIAN

Integral fungsi:

$$\int_{0.1}^{0.4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0.1}^{0.4} \left(0.9x^2 + 1.2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$$

yang dihitung dengan metode trapesium adalah:

$$\int_{0.1}^{0.4} f(x)\,\mathrm{d}x = (0.4-0.1)\frac{f(0.4)+f(0.1)}{2} = 0.15\left[0.9\left(0.4^2\right)+1.2\sin^2 0.4+0.9\left(0.1^2\right)+1.2\sin^2 0.1\right]$$
$$= 0.05024$$

Nilai integral fungsi tersebut dapat pula dihitung dengan metode Kuadratur Gauss. Di sini dipakai Kuadratur Gauss 2 TItik atau dikenal pula sebagai Gauss-Legendre. Dalam metode ini, variabel x diubah menjadi:

$$x = a_0 + a_1 x_d \rightarrow \mathrm{d}x = a_1\,\mathrm{d}x_d$$

$$a_0 = \frac{b+a}{2} \text{ dan } a_1 = \frac{b-a}{2}$$

a dan b masing-masing adalah batas bawah dan batas atas integrasi. Jadi a = 0.1 dan b = 0.4, sehingga: a_0 = 0.25 dan a_1 = 0.15, serta dx = 0.15 dx_d. Integral fungsi dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$\int_{0.1}^{0.4} f(x)\,\mathrm{d}x = f\left(x_d = -1/\sqrt{3}\right) + f\left(x_d = 1/\sqrt{3}\right)$$

$$x_d = -1/\sqrt{3} \Rightarrow x = 0.25 + 0.15\left(-1/\sqrt{3}\right) = 0.1634$$
$$x_d = 1/\sqrt{3} \Rightarrow x = 0.25 + 0.15\left(1/\sqrt{3}\right) = 0.3366$$

$$\int_{0.1}^{0.4} f(x)\,\mathrm{d}x = f\left(x_d = -1/\sqrt{3}\right) + f\left(x_d = 1/\sqrt{3}\right)$$
$$= f(x = 0.1634) + f(x = 0.3366)$$
$$= 0.00837 + 0.03493$$
$$= 0.0433$$

SOAL 4 INITIAL VALUE PROBLEM OF ODE

Pakailah metode Euler dan Runge-Kutta orde 2 untuk mendekati solusi soal berikut pada t = 0.8. Bandingkan hasilnya dan tuliskan komentar Saudara. / *Use the Euler and the 2nd Order Runge-Kutta Methods to approximate the solutions of the following initial value problems at t = 0.8. Compare the results obtained by the two methods (give your comment).*

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -t\,y + \frac{4.1t}{y}, \quad 0 \le t \le 0.8, \quad y(t=0) = 1, \quad h = \Delta t = 0.2.$$

PENYELESAIAN

Penyelesaian persamaan diferensial ordiner (*ordinary differential equations,* ODE) dengan syarat awal yang diketahui seperti pada Soal 4 ini dilakukan dengan beda hingga yang diekspresikan dalam bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Dalam persamaan tersebut y_{i+1} dan y_i berturut-turut adalah nilai y pada waktu t_{i+1} dan t_i, h adalah selang t, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, dan ϕ adalah slope atau gradien penggal kurva antara y_i dan y_{i+1}. Gradien ϕ merupakan fungsi t dan y, $\phi = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f(t,y)$. Metode Euler dan Runge-Kutta berbeda dalam menetapkan gradien ϕ:

a) pada metode Euler, ϕ ditetapkan sebagai gradien di titik t_i, $f(t_i,y_i)$,
b) pada metode Runge-Kutta orde 2, ϕ ditetapkan sebagai *increment function* yang dapat dibaca sebagai gradien fungsi y pada selang antara t_i dan t_{i+1}.

Metode penyelesaian yang mudah dipakai dan cepat memberikan hasil adalah metode Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \phi\, h$$
$$\phi = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t_i,y_i}$$

Hitungan disajikan pada Tabel 3.

TABEL 3. PENYELESAIAN ODE SECARA NUMERIS MEMAKAI METODE EULER

t	y	$\phi = f(t,y)$
0	1	0
0.2	1	0.62
0.4	1.124	1.009475
0.6	1.325895	1.059814
0.8	1.537858	0.902551

Metode Runge-Kutta (RK) orde 2:

$$y_{i+1} = y_i + \phi\, h$$
$$\phi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,y,h) = a_1\, k_1 + a_2\, k_2$$
$$k_1 = f(t,y)$$
$$k_2 = f(t + p_1\, h, y + q_{11}\, k_1\, h)$$

Ada beberapa metode untuk menghitung ϕ, antara lain metode Heun, metode *improved polygon*, atau metode Ralston. Di sini dipakai metode Heun:

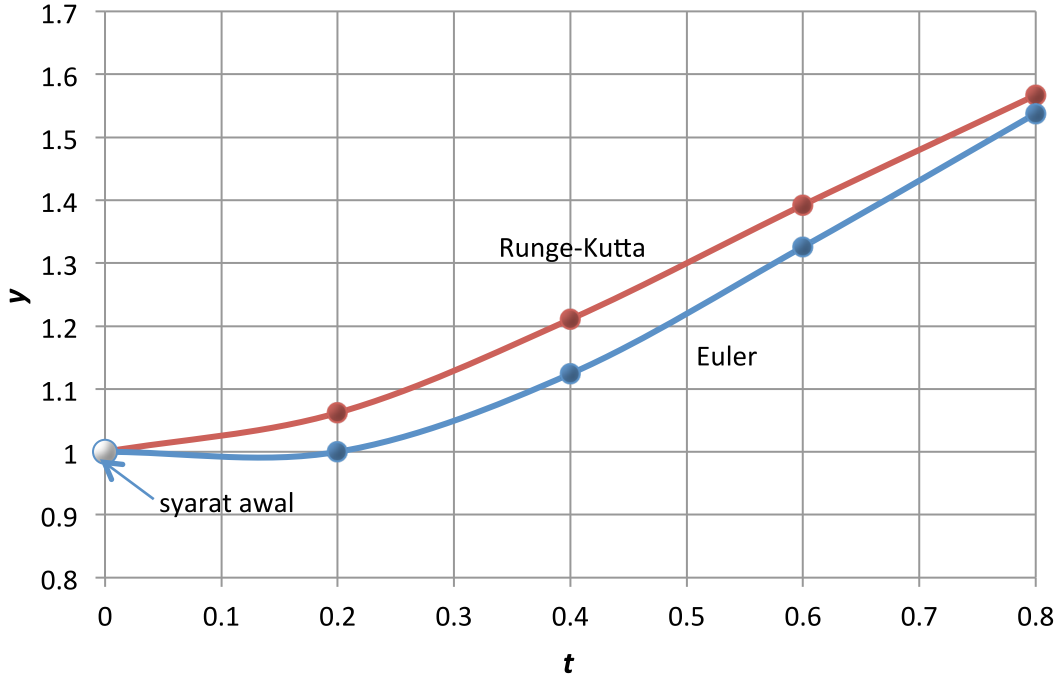
$$\phi = \tfrac{1}{2} k_1 + \tfrac{1}{2} k_2$$
$$k_1 = f(t,y)$$
$$k_2 = f(t+h, y + h\, k_1)$$

Hitungan lengkap disajikan pada Tabel 4.

TABEL 4. PENYELESAIAN ODE SECARA NUMERIS MEMAKAI 2ND-ORDER RUNGE-KUTTA

t	y	k_1	$t + h$	$y + h\, k_1$	k_2	ϕ
0	1	0	0.2	1	0.62	0.31
0.2	1.062	0.559728	0.4	1.173946	0.92742	0.743574
0.4	1.210715	0.870286	0.6	1.384772	0.945603	0.907944
0.6	1.392304	0.931474	0.8	1.578598	0.814914	0.873194
0.8	1.566942	0.839695	1	1.734881	0.628393	0.734044

Profil *y* pada nilai *t* = 0 s.d. 0.8 yang diperoleh dengan metode Euler dan Runge-Kutta disajikan pada gambar di bawah ini.



GAMBAR 3. PROFIL *Y* PADA NILAI *T* = 0 S.D. 0.8 YANG DIPEROLEH DENGAN METODE EULER DAN METODE RUNGE-KUTTA

SOAL 5 BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ODE

Pakailah metode beda hingga untuk mendekati solusi soal aliran air tanah tidak tertekan berikut ini. Pakailah sub-interval 10 m pada rentang antara Sta. 0 m dan Sta. 100 m, serta nilai *k* = 0.0012. / *Use the finite difference method to approximate the solution of the following boundary value problem of unconfined groundwater depth at all 10 m sub-interval nodes within the Sta. 0 m to Sta. 100 m. Use the value of k = 0.0012.*

$$k\frac{\partial^2\left(h^2\right)}{\partial x^2} = -0.0002\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 100, \quad h(0) = 18, \quad h(100) = 42.$$

PENYELESAIAN

Persamaan aliran air tanah pada soal di atas dapat dituliskan dalam bentuk sbb.

$$k\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = -0.0002\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = \frac{-0.0002}{k}\sqrt{x}$$

Bentuk persamaan beda hingga persamaan aliran air tanah tersebut di suatu lokasi (posisi) x_i adalah:

$$\frac{\left(h^2\right)_{i-1} - 2\left(h^2\right)_i + \left(h^2\right)_{i+1}}{(\Delta x)^2} = -\frac{0.0002}{k}\sqrt{x_i} \quad \Leftrightarrow \quad \left(h^2\right)_{i-1} - 2\left(h^2\right)_i + \left(h^2\right)_{i+1} = -\frac{0.0002}{k}(\Delta x)^2\sqrt{x_i}$$

Perhatikan sketsa di bawah ini.

i =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i =	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
h_i =	18	…	…	…	…	…	…	…	…	…	90

Persamaan beda hingga aliran air tanah berlaku di setiap titik pada selang Sta. 0 m s.d. Sta. 100 m. Di antara Sta. 0 m dan Sta. 100 m ini, terdapat 9 titik, i = 1, 2, …, 9 yang berada pada posisi x_i = 10, 20, …, 90. Di setiap titik i ini ada 3 variabel tak diketahui, yaitu $(h^2)_i$ dan h^2 di kiri dan kanannya, $(h^2)_{i-1}$ dan $(h^2)_{i+1}$. Di kedua ujung berlaku syarat batas, yaitu di x_0 = 0 berlaku syarat batas h_0 = 18 dan di x_{10} = 100 berlaku syarat batas h_{10} = 42. Apabila kesembilan persamaan disusun berurut, diperoleh bentuk sbb.:

$[A].\{H\} = \{C\}$

$[A]$ adalah matriks 9×9 yang elemen-elemennya merupakan koefisien pada persamaan, $\{H\}$ adalah vektor 9×1 yang elemennya adalah h^2 di setiap x_i dan $\{C\}$ adalah vektor 9×1 yang elemennya adalah konstanta.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h^2{}_{10} \\ h^2{}_{20} \\ h^2{}_{30} \\ h^2{}_{40} \\ h^2{}_{50} \\ h^2{}_{60} \\ h^2{}_{70} \\ h^2{}_{80} \\ h^2{}_{90} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -329.27 \\ -7.45356 \\ -9.12871 \\ -10.5409 \\ -11.7851 \\ -12.9099 \\ -13.9443 \\ -14.9071 \\ -1779.81 \end{Bmatrix}$$

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan persamaan-persamaan di atas. Cara-cara penyelesaian ini telah dibahas pada kuliah periode sebelum UTS. Dengan memakai *spreadsheet*, misal MSExcel, cara penyelesaian langsung dengan matriks inversi sangat mudah untuk dilakukan. Vektor $\{H\}$ diperoleh dengan perkalian matriks sbb.:

$$\{H\} = [A]^{-1} \cdot \{C\}$$

Dengan MSExcel, persamaan di atas diselesaikan dengan perintah:

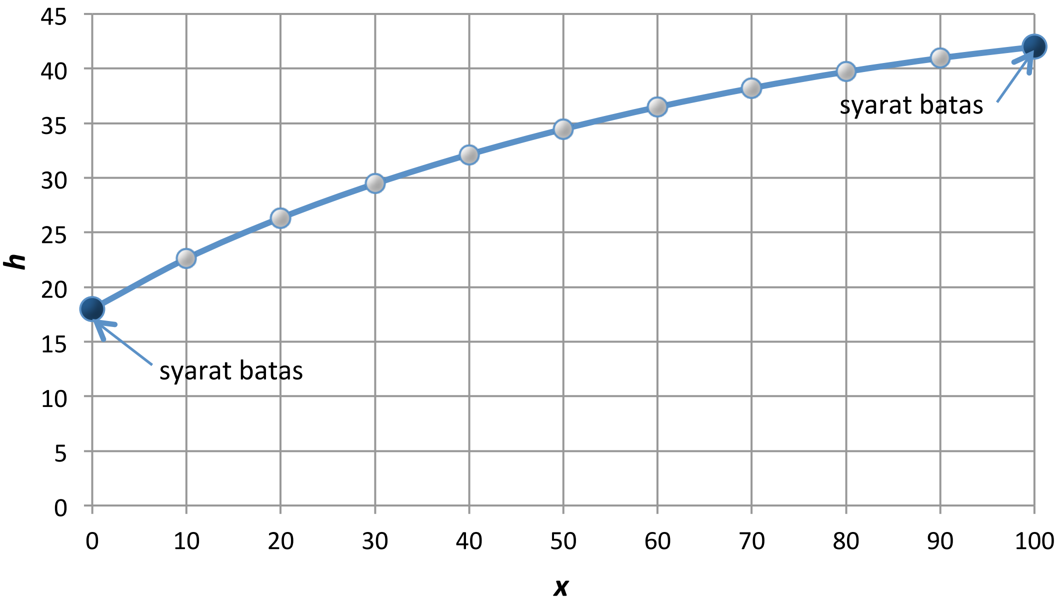
=MMULT(MINVERSE(*matrixa*),*matrixc*)

matrixa adalah sel-sel yang berisi elemen $[A]$ dan *matrixc* adalah sel-sel yang berisi elemen vektor $\{C\}$. Penulisan perintah ini diawali dengan memilih satu kolom yang terdiri dari 9 sel, menuliskan perintah di atas, dan diakhiri dengan menekan tombol control+shift+enter. Kesembilan sel akan berisi elemen-elemen vektor $\{H\}$.

Istiarto – http://istiarto.staff.ugm.ac.id – istiarto@ugm.ac.id

$$\begin{Bmatrix} h^2{}_{10} \\ h^2{}_{20} \\ h^2{}_{30} \\ h^2{}_{40} \\ h^2{}_{50} \\ h^2{}_{60} \\ h^2{}_{70} \\ h^2{}_{80} \\ h^2{}_{90} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 511.223 \\ 693.176 \\ 876.675 \\ 1033.05 \\ 1187.88 \\ 1330.92 \\ 1461.05 \\ 1577.25 \\ 1678.53 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} h_{10} \\ h_{20} \\ h_{30} \\ h_{40} \\ h_{50} \\ h_{60} \\ h_{70} \\ h_{80} \\ h_{90} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.6102 \\ 26.3282 \\ 29.4563 \\ 32.1410 \\ 34.4656 \\ 36.4818 \\ 38.2237 \\ 39.7145 \\ 40.9698 \end{Bmatrix}$$

Gambar 4 menunjukkan ilustrasi profil *h* yang diperoleh dari penyelesaian persamaan aliran air tanah pada soal ini.



GAMBAR 4. PROFIL TEKANAN PIEZOMETRIK ALIRAN TANAH

-o0o-