

# UJIAN AKHIR SEMESTER

## MATEMATIKA TEKNIK

SENIN, 14 JANUARI 2013 | OPEN BOOK | WAKTU 100 MENIT

### PETUNJUK

- 1) Saudara tidak boleh menggunakan komputer untuk mengerjakan soal-soal ujian ini.
- 2) Tuliskan urutan/cara /formula yang Saudara pakai untuk mendapatkan jawaban (bukan hanya angka jawaban di tabel).

### SOAL 1

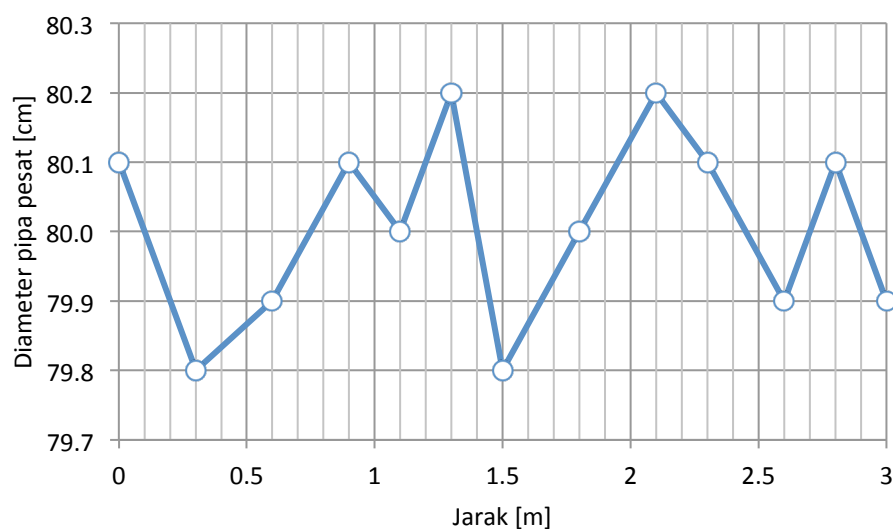
Di Laboratorium Struktur JTSL FT UGM belum lama ini dibuat model pipa pesat kayu. Panjang pipa pesat 3 m dan diameter bagian dalam yang diinginkan adalah 80 cm. Pengukuran diameter bagian dalam dilakukan di 13 titik (posisi) dan diperoleh data sbb.

|                 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| posisi, $x$ [m] | 0.0  | 0.3  | 0.6  | 0.9  | 1.1  | 1.3  | 1.5  | 1.8  | 2.1  | 2.3  | 2.6  | 2.8  | 3.0  |
| dia., $D$ [cm]  | 80.1 | 79.8 | 79.9 | 80.1 | 80.0 | 80.2 | 79.8 | 80.0 | 80.2 | 80.1 | 79.9 | 80.1 | 79.9 |

Dengan cara integrasi numeris, hitunglah diameter rata-rata pipa pesat. Pakailah metode Simpson 1/3 atau 3/8 dan di titik yang tidak memungkinkan pemakaian metode Simpson, pakailah metode trapesium. Tunjukkan metode yang dipakai pada tabel hitungan.

### PENYELESAIAN

Data diameter pipa pesat dapat diplotkan menjadi sebuah kurva sbb.



GAMBAR 1. DIAMETER PIPA PESAT DI BEBERAPA TITIK PENGUKURAN

Diameter rata-rata pipa pesat dapat dihitung dengan memanfaatkan metode integrasi numeris sbb.

$$\bar{D} = \frac{1}{(x_n - x_0)} \int_{x_0}^{x_n} D \, dx$$

Suku integral adalah luas pias di bawah kurva  $D(x)$  di antara  $x_0$  s.d.  $x_n$  dan dapat dihitung dengan metode Simpson 3/8, Simpson 1/3, atau trapesium. Metode Simpson 3/8 membutuhkan 4 titik data berjarak seragam, metode Simpson 1/3 membutuhkan 3 titik data berjarak seragam, sedangkan metode trapesium hanya membutuhkan 2 titik data. Nilai integral menurut metode Simpson 3/8, Simpson 1/3, dan trapesium untuk suatu pias adalah:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} D \, dx \approx (x_{i+3} - x_i) \left( \frac{D_i + 3D_{i+1} + 3D_{i+2} + D_{i+3}}{8} \right)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} D \, dx \approx (x_{i+2} - x_i) \left( \frac{D_i + 4D_{i+1} + D_{i+2}}{6} \right)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} D \, dx \approx (x_{i+1} - x_i) \left( \frac{D_i + D_{i+1}}{2} \right)$$

Pada Soal 1, ada beberapa pias yang luasnya dapat dihitung dengan metode Simpson 3/8, sebagian yang lain dihitung dengan metode Simpson 1/3, dan ada pula yang hanya dapat dihitung dengan metode trapesium. Hitungan disajikan pada Tabel 1. Diameter rata-rata pipa pesat adalah:

$$\bar{D} = \frac{1}{(x_n - x_0)} \int_{x_0}^{x_n} D \, dx = \frac{1}{3} (240.0021) = 80.00069 \text{ cm.}$$

TABEL 1. HITUNGAN DIAMETER RATA-RATA PIPA PESAT DENGAN METODE INTEGRASI SIMPSON 3/8, SIMPSON 1/3, DAN TRAPESIUM

| Titik ukur<br>$i$ | Posisi (m)<br>$x_i$ | Diameter (cm)<br>$D_i$ | Lebar pias<br>$\Delta x_i$ | Integral (m.cm)<br>$I_i$ | Metode      |
|-------------------|---------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|-------------|
| 0                 | 0.0                 | 80.1                   |                            |                          |             |
| 1                 | 0.3                 | 79.8                   | 0.3                        |                          |             |
| 2                 | 0.6                 | 79.9                   | 0.3                        | 71.92125                 | Simpson 3/8 |
| 3                 | 0.9                 | 80.1                   | 0.3                        |                          |             |
| 4                 | 1.1                 | 80.0                   | 0.2                        |                          |             |
| 5                 | 1.3                 | 80.2                   | 0.2                        | 48.0375                  | Simpson 3/8 |
| 6                 | 1.5                 | 79.8                   | 0.2                        |                          |             |
| 7                 | 1.8                 | 80.0                   | 0.3                        |                          |             |
| 8                 | 2.1                 | 80.2                   | 0.3                        | 48                       | Simpson 1/3 |
| 9                 | 2.3                 | 80.1                   | 0.2                        | 16.03                    | Trapesium   |
| 10                | 2.6                 | 79.9                   | 0.3                        | 24                       | Trapesium   |
| 11                | 2.8                 | 80.1                   | 0.2                        |                          |             |
| 12                | 3.0                 | 79.9                   | 0.2                        | 32.01333                 | Simpson 1/3 |
| Jumlah            |                     |                        |                            | 240.0021                 |             |

## SOAL 2

Elevasi muka air berubah-ubah dengan laju perubahan yang tidak konstan. Pengukuran selama 2 hari dengan selang pengukuran 0.1 hari menunjukkan bahwa laju perubahan elevasi muka air tersebut mengikuti persamaan sbb.

$$v = \frac{dz}{dt} = \cos(6.283t - 0.25) - \sin(6.283t - 0.25) \quad 0 \leq t \leq 2, \quad z(t=0) = 1, \quad h = \Delta t = 0.1$$

Dalam persamaan di atas,  $z$  adalah elevasi muka air dalam satuan meter,  $t$  adalah waktu dalam satuan hari. Pada awal pengukuran,  $t = 0$ , elevasi muka air berada pada  $z = 1$  m.

Pakailah metode Euler dan Second-order Runge Kutta untuk mencari elevasi muka air pada waktu  $t = 2$  hari (langkah hitungan  $h = \Delta t = 0.1$  hari).

## PENYELESAIAN

Penyelesaian persamaan diferensial ordiner (*ordinary differential equations*, ODE) dengan syarat awal yang diketahui seperti pada Soal 2 ini dilakukan dengan beda hingga yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$z_{i+1} = z_i + \phi h$$

Dalam persamaan tersebut  $z_{i+1}$  dan  $z_i$  berturut-turut adalah elevasi muka air pada waktu  $t_{i+1}$  dan  $t_i$ ,  $h$  adalah selang waktu atau  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ , dan  $\phi$  adalah *slope* atau gradien penggal kurva antara  $z_i$  dan  $z_{i+1}$ . Gradien  $\phi$  merupakan fungsi  $t$  dan  $z$ ,  $\phi = dy/dt = f(t, y)$ . Dalam hal ini, gradien  $\phi$  tidak lain adalah laju perubahan muka air,  $v$ , dari elevasi  $z_i$  ke  $z_{i+1}$  dan merupakan fungsi  $t$  saja. Berbagai metode untuk menghitung beda hingga di atas berbeda dalam menetapkan gradien  $\phi$ . Pada metode Euler,  $\phi$  ditetapkan sebagai gradien di titik  $t_i$ , sehingga persamaan elevasi muka air menjadi berbentuk sbb:

$$z_{i+1} = z_i + f(t_i, z_i) h = z_i + v_i h$$

$$v_i = \cos(6.283 t_i - 0.25) - \sin(6.283 t_i - 0.25)$$

$$h = 0.1$$

Hitungan disajikan pada Tabel 2.

Metode *second-order* RK menghitung gradien  $\phi$  dalam dua langkah. Persamaan elevasi muka air dengan gradien yang dihitung dengan cara ini berbentuk sbb:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{k_1 + k_2}{2} h$$

$$k_1 = f(t_i, z_i) = \cos(6.283 t_i - 0.25) - \sin(6.283 t_i - 0.25)$$

$$k_2 = f(t_i + h, z_i + h k_1) = \cos[6.283(t_i + h) - 0.25] - \sin[6.283(t_i + h) - 0.25]$$

$$h = 0.1$$

Hitungan disajikan pada Tabel 3.

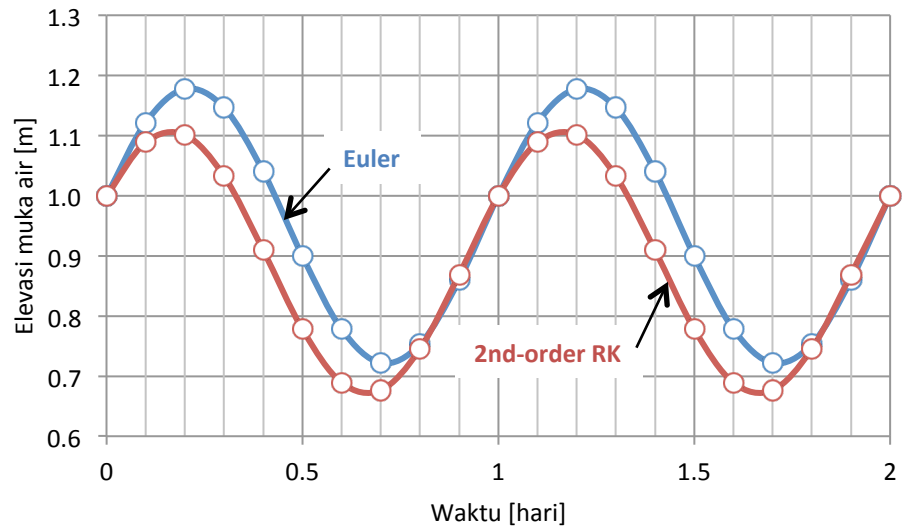
TABEL 2. HITUNGAN ELEVASI MUKA AIR DENGAN METODE EULER

| $i$ | $t_i$ (hari) | $z_i$ (m) | $f(t_i, y_i)$ | $z_{i+1}$ (m) |
|-----|--------------|-----------|---------------|---------------|
| 0   | 0            | 1         | 1.216316      | 1.121632      |
| 1   | 0.1          | 1.121632  | 0.559953      | 1.177627      |
| 2   | 0.2          | 1.177627  | -0.31028      | 1.146599      |
| 3   | 0.3          | 1.146599  | -1.06201      | 1.040398      |
| 4   | 0.4          | 1.040398  | -1.4081       | 0.899588      |
| 5   | 0.5          | 0.899588  | -1.21638      | 0.77795       |
| 6   | 0.6          | 0.77795   | -0.56007      | 0.721942      |
| 7   | 0.7          | 0.721942  | 0.310154      | 0.752958      |
| 8   | 0.8          | 0.752958  | 1.061919      | 0.85915       |
| 9   | 0.9          | 0.85915   | 1.408091      | 0.999959      |
| 10  | 1            | 0.999959  | 1.21645       | 1.121604      |
| 11  | 1.1          | 1.121604  | 0.560193      | 1.177623      |
| 12  | 1.2          | 1.177623  | -0.31003      | 1.14662       |
| 13  | 1.3          | 1.14662   | -1.06183      | 1.040437      |
| 14  | 1.4          | 1.040437  | -1.40808      | 0.899629      |
| 15  | 1.5          | 0.899629  | -1.21652      | 0.777978      |
| 16  | 1.6          | 0.777978  | -0.56031      | 0.721946      |
| 17  | 1.7          | 0.721946  | 0.309898      | 0.752936      |
| 18  | 1.8          | 0.752936  | 1.061746      | 0.859111      |
| 19  | 1.9          | 0.859111  | 1.408066      | 0.999917      |
| 20  | 2            | 0.999917  |               |               |

TABEL 3. HITUNGAN ELEVASI MUKA AIR DENGAN METODE 2ND-ORDER RUNGE-KUTTA

| $i$ | $t_i$ (hari) | $z_i$ (m) | $k_1$    | $k_2$    | $\phi$   | $z_{i+1}$ (m) |
|-----|--------------|-----------|----------|----------|----------|---------------|
| 0   | 0            | 1         | 1.216316 | 0.559953 | 0.888135 | 1.088813      |
| 1   | 0.1          | 1.088813  | 0.559953 | -0.31028 | 0.124835 | 1.101297      |
| 2   | 0.2          | 1.101297  | -0.31028 | -1.06201 | -0.68614 | 1.032683      |
| 3   | 0.3          | 1.032683  | -1.06201 | -1.4081  | -1.23505 | 0.909177      |
| 4   | 0.4          | 0.909177  | -1.4081  | -1.21638 | -1.31224 | 0.777953      |
| 5   | 0.5          | 0.777953  | -1.21638 | -0.56007 | -0.88823 | 0.68913       |
| 6   | 0.6          | 0.68913   | -0.56007 | 0.310154 | -0.12496 | 0.676634      |
| 7   | 0.7          | 0.676634  | 0.310154 | 1.061919 | 0.686037 | 0.745238      |
| 8   | 0.8          | 0.745238  | 1.061919 | 1.408091 | 1.235005 | 0.868738      |
| 9   | 0.9          | 0.868738  | 1.408091 | 1.21645  | 1.31227  | 0.999965      |
| 10  | 1            | 0.999965  | 1.21645  | 0.560193 | 0.888322 | 1.088797      |
| 11  | 1.1          | 1.088797  | 0.560193 | -0.31003 | 0.125084 | 1.101306      |
| 12  | 1.2          | 1.101306  | -0.31003 | -1.06183 | -0.68593 | 1.032713      |
| 13  | 1.3          | 1.032713  | -1.06183 | -1.40808 | -1.23496 | 0.909217      |
| 14  | 1.4          | 0.909217  | -1.40808 | -1.21652 | -1.3123  | 0.777988      |
| 15  | 1.5          | 0.777988  | -1.21652 | -0.56031 | -0.88842 | 0.689146      |
| 16  | 1.6          | 0.689146  | -0.56031 | 0.309898 | -0.12521 | 0.676625      |
| 17  | 1.7          | 0.676625  | 0.309898 | 1.061746 | 0.685822 | 0.745207      |
| 18  | 1.8          | 0.745207  | 1.061746 | 1.408066 | 1.234906 | 0.868698      |
| 19  | 1.9          | 0.868698  | 1.408066 | 1.216584 | 1.312325 | 0.999931      |
| 20  | 2            | 0.999931  |          |          |          |               |

Elevasi muka air pada proses hitungan kedua metode disajikan pada Gambar 2.



GAMBAR 2. ELEVASI MUKA AIR PADA PROSES HITUNGAN DENGAN METODE EULER DAN *SECOND-ORDER* RUNGE-KUTTA

-o0o-