UJIAN AKHIR SEMESTER
METODE NUMERIK

SENIN, 24 JUNI 2024 | OPEN BOOK | TIDAK BOLEH MENGGUNAKAN KOMPUTER | 120 MENIT

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

SOAL 1 INTERPOLASI (CP A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT 30%)

Dalam proyek pembangunan jaringan pipa SPAM, data elevasi dikumpulkan dari beberapa titik pengukuran di sepanjang jalur pipa penyalur berjarak tertentu dari titik awal. Tabel berikut menunjukkan data yang diperoleh.

Jarak, x (m)	36.8	53	69.2	85.4	101.6
Elevasi, z (m)	88.3	133.7	139.9	NA	122.4

NA: data tidak ada.

Perkirakan elevasi muka tanah di $x = 85.4$ m menggunakan interpolasi polinomial orde 2 (pilih salah satu metode Pembagian Beda Hingga Newton atau Lagrange).

PENYELESAIAN

Elevasi muka tanah di $x = 85.4$ m dihitung dengan cara intepolasi. Hitungan interpolasi polinomial orde dua memerlukan minimum tiga titik data. Elevasi muka tanah di $x = 85.4$ m, dengan demikian, diperkirakan berdasarkan elevasi di titik-titik $x = 53, 69.2,$ dan 101.6 m.

Persamaan polinomial orde dua Newton adalah

$$f_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

Hitungan interpolasi metode Newton dilakukan secara tabulasi di bawah ini.

i	Jarak, x_i (m)	Elevasi, $z_i = f(x_i)$ (m)	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$
	36.8	88.3	---	---
0	53	133.7	0.3827	–0.0190
1	69.2	139.9	–0.5401	---
2	101.6	122.4	---	---

Elevasi muka tanah di $x = 85.4$ m, dengan demikian, adalah

$$z_{85.4} = f_2(85.4) = 133.7 + (85.4 - 53)(0.3827) + (85.4 - 53)(85.4 - 69.2)(-0.0190)$$

$$z_{85.4} = 136.133 \text{ m}$$

Persamaan polinomial orde dua Lagrange adalah

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x_i)f(x_i) = L_0(x_0)f(x_0) + L_1(x_1)f(x_1) + L_2(x_2)f(x_2)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

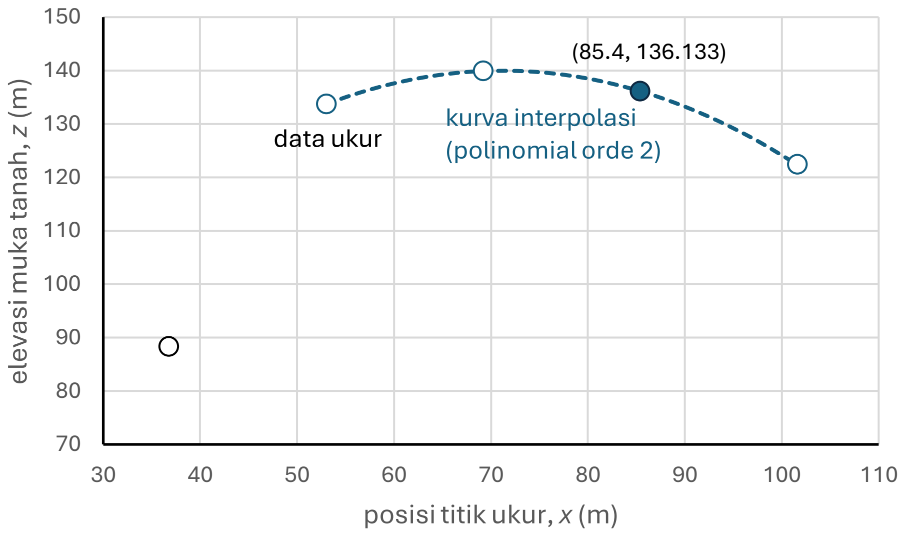
$$L_0(x = 85.4) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \left(\frac{85.4 - 69.2}{53 - 69.2}\right)\left(\frac{85.4 - 101.6}{53 - 101.6}\right) = -0.3333$$

$$L_1(x = 85.4) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \left(\frac{85.4 - 53}{69.2 - 53}\right)\left(\frac{85.4 - 101.6}{69.2 - 101.6}\right) = 1$$

$$L_2(x = 85.4) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \left(\frac{85.4 - 53}{69.2 - 53}\right)\left(\frac{85.4 - 101.6}{69.2 - 101.6}\right) = 0.3333$$

$$z_{85.4} = f_2(x = 85.4) = (-0.3333)(133.7) + (1)(139.9) + (0.3333)(122.4) = 136.133 \text{ m}$$

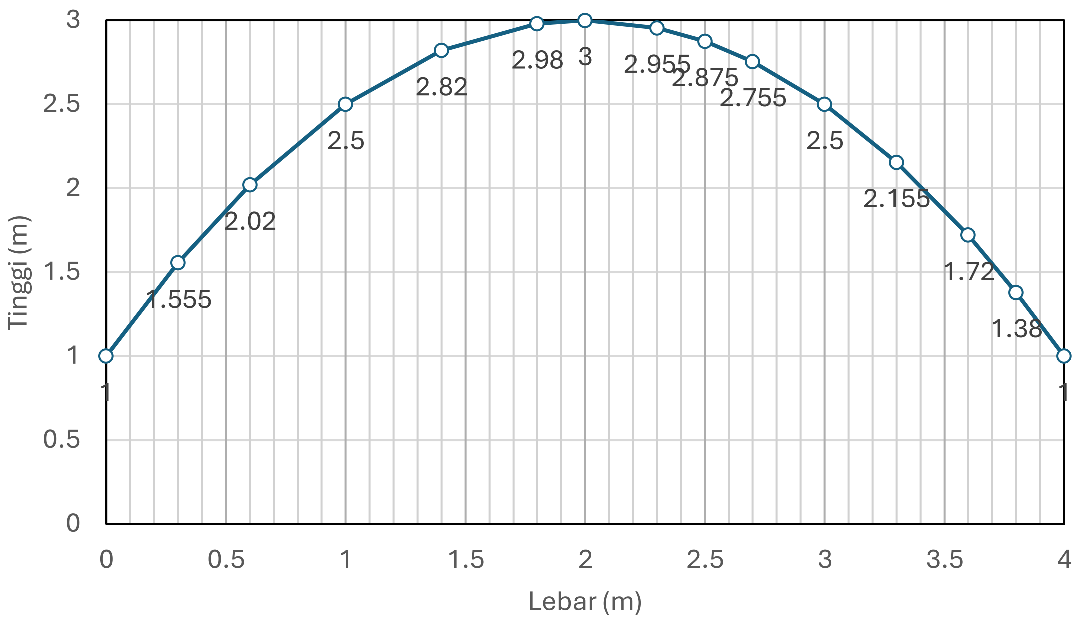
Gambar berikut menampilkan profil jalur pipa menurut data pengukuran dan menurut interpolasi polinomial orde dua.



SOAL 2 INTEGRASI NUMERIK (CP A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT 40%)

Kontraktor pelaksana membuat sebuah struktur masif yang berisi beton siklop. Gambar di bawah ini menampilkan potongan melintang struktur, yang berbentuk lengkung. Berapa **meter kubik** volume beton siklop per meter panjang struktur? Hitung volume beton siklop dengan metode Simpson jika data memungkinkan untuk melakukannya, atau metode trapesium jika metode Simpson tidak memungkinkan untuk diterapkan.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id



PENYELESAIAN

Volume beton siklop per meter panjang tegak lurus bidang gambar adalah luas tampang melintang struktur yang ditampilkan dalam gambar di atas. Luas ini dapat dihitung dengan mengintegralkan kurva lengkung dalam gambar, dari batas kiri sampai dengan batas kanan.

$$A = \int_{x=0}^{x=4} f(x)dx$$

Dalam persamaan di atas, A adalah luas atau volume per satuan panjang, x adalah jarak searah lebar melintang, dan $f(x)$ adalah tinggi struktur. Penyelesaian secara numerik persamaan integral dilakukan dengan metode Simpson 3/8, Simpson 1/3, atau trapesium. Simpson 3/8 memerlukan 3 pias sama panjang, Simpson 1/3 membutuhkan 2 pias seragam, dan trapesium memerlukan 1 pias saja.

Simpson 3/8. Luas di bawah kurva di antara x_a dan x_b yang dibagi menjadi tiga pias seragam berukuran Δx adalah

$$A_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \approx \frac{3\Delta x}{8}[f(x_a) + 3f(x_a + \Delta x) + 3f(x_a + 2\Delta x) + f(x_b)]$$

Simpson 1/3. Luas di bawah kurva di antara x_a dan x_b yang dibagi menjadi dua pias seragam berukuran Δx adalah

$$A_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \approx \frac{2\Delta x}{6}[f(x_a) + 4f(x_a + \Delta x) + f(x_b)]$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Trapesium. Luas di bawah kurva di antara x_a dan x_b yang berjarak Δx adalah

$$A_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_a) + f(x_b)]$$

Gambar tampang melintang struktur menunjukkan pias-pias yang memiliki berbagai ukuran. Hitungan integrasi numerik dilakukan dengan metode Simpson 3/8, Simpson 1/3, atau trapesium sesuai dengan jumlah pias seragam yang berurutan. Tabel berikut menyajikan hitungan integrasi numerik untuk mendapatkan volume beton siklop.

i	lebar, x_i	tinggi, $f(x_i)$	Δx	metode	A_i
0	0	1	---		
1	0.3	1.555	0.3	simson 1/3	0.924
2	0.6	2.02	0.3		
3	1	2.5	0.4		
4	1.4	2.82	0.4	simson 3/8	3.144
5	1.8	2.98	0.4		
6	2	3	0.2	trapesium	0.598
7	2.3	2.955	0.3	trapesium	0.8933
8	2.5	2.875	0.2	simson 1/3	1.1473
9	2.7	2.755	0.2		
10	3	2.5	0.3		
11	3.3	2.155	0.3	simson 3/8	2.0745
12	3.6	1.72	0.3		
13	3.8	1.38	0.2	simson 1/3	0.5493
14	4	1	0.2		
				ΣA_i	**9.3304**

Jadi, volume beton siklop adalah 9.3304 meter kubik per meter panjang (9.3304 m^3/m)

SOAL 3 PERSAMAAN DIFERENSIAL (CP A.1, B.1, C.1, K.1; BOBOT 30%)

Elevasi muka air di suatu badan air berubah terhadap waktu. Pengukuran elevasi muka air secara periodik menunjukkan bahwa laju perubahan elevasi muka air tersebut mengikuti persamaan sebagai berikut.

$$v = \frac{dy}{dt} = \cos(6.283\, t - 0.25) - \sin(6.283\, t - 0.25)$$

Dalam persamaan di atas, v adalah laju perubahan elevasi mula air (meter), y adalah elevasi muka air (meter), t adalah waktu (hari). Pada awal pengukuran, $t = 0$ hari, elevasi muka air adalah $y = 1$ meter.

Pakailah metode Runge Kutta untuk mengetahui elevasi muka air pada $t = 2$ hari. Gunakan langkah waktu hitung $\Delta t = 0.25$ hari.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

PENYELESAIAN

Penyelesaian persamaan diferensial ordiner (*ordinary differential equations,* ODE) dengan syarat awal yang diketahui dilakukan dengan beda hingga, yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \phi\Delta t$$

Dalam persamaan di atas, y_{i+1} dan y_i berturut-turut adalah elevasi muka air pada waktu t_{i+1} dan t_i, Δt adalah selang waktu atau $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ dan ϕ adalah *slope* atau gradien penggal kurva antara y_i dan y_{i+1}. Gradien ϕ merupakan fungsi t dan y, $\phi = dy/dt = f(t, y)$. Dalam hal ini, gradien ϕ tidak lain adalah laju perubahan muka air, v, dari elevasi y_i ke y_{i+1} dan merupakan fungsi t saja. Berbagai metode untuk menghitung beda hingga di atas berbeda dalam penetapan gradien ϕ. Metode Runge-Kutta (RK) menghitung gradien ϕ dalam beberapa langkah. *Second-order* RK menghitung gradien ϕ dalam dua langkah. Persamaan elevasi muka air dengan gradien yang dihitung dengan cara ini berbentuk sebagai berikut.

$$y_{i+1} = y_i + \phi\Delta t$$

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2$$

$$k_1 = f(t_i, y_i) = \cos(6.283\ t_i - 0.25) - \sin(6.283\ t_i - 0.25)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1\Delta t_i, y_i + q_{11}k_1\Delta t)$$

$$k_2 = f\cos(6.283(t_i + p_1\Delta t) - 0.25) - \sin(6.283(t_i + p_1\Delta t) - 0.25)$$

$$a_1 = 1 - a_2,\ \ p_1 = \tfrac{1}{2}a_2,\ \ q_{11} = p_1$$

$$\Delta t = 0.25$$

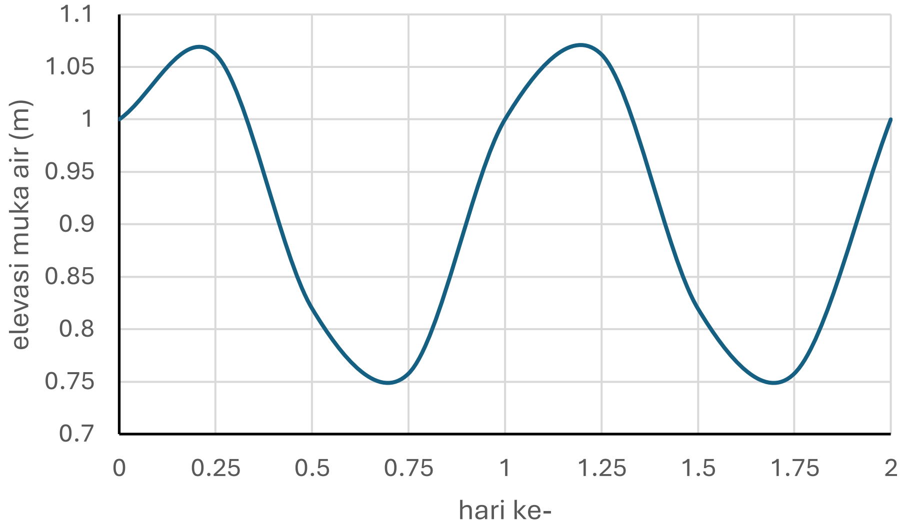
Metode RK berorde lebih tinggi dapat dipilih, misalnya *third-order* RK atau *fourth-order* RK.

Tabel berikut menyajikan hitungan penyelesaian persamaan elevasi muka air menurut metode RK orde kedua, dengan nilai $a_2 = 1/2$ ($a_1 = 1/2$ dan $p_1 = q_{11} = 1$). Nilai-nilai a_2 yang lain, yang lazim, antara lain adalah $a_2 = 2/3$ dan $a_2 = 1$.

i	t_i	y_i	k_1	$t_i+p_1\Delta t$	$y_i+q_{11}k_1\Delta t$	k_2	ϕ	t_{i+1}	y_{i+1}
0	0	1	1.216	0.25	1.304	-0.721	0.247	0.25	1.062
1	0.25	1.062	-0.721	0.5	0.881	-1.216	-0.969	0.5	0.820
2	0.5	0.820	-1.216	0.75	0.516	0.721	-0.248	0.75	0.758
3	0.75	0.758	0.721	1	0.938	1.216	0.969	1	1.000
4	1	1.000	1.216	1.25	1.304	-0.721	0.248	1.25	1.062
5	1.25	1.062	-0.721	1.5	0.882	-1.217	-0.969	1.5	0.820
6	1.5	0.820	-1.217	1.75	0.516	0.721	-0.248	1.75	0.758
7	1.75	0.758	0.721	2	0.938	1.217	0.969	2	1.000
8	2	1.000							

Dengan demikian, elevasi muka air pada hari kedua adalah 1 meter.

Gambar berikut menyajikan kurva pergerakan muka air selama dua hari.



-o0o-

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id