UJIAN AKHIR SEMESTER
METODE NUMERIS I

KAMIS, 27 JUNI 2019 | *OPEN BOOK* | TIDAK BOLEH MEMAKAI KOMPUTER | 150 MENIT

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id/ • istiarto@ugm.ac.id

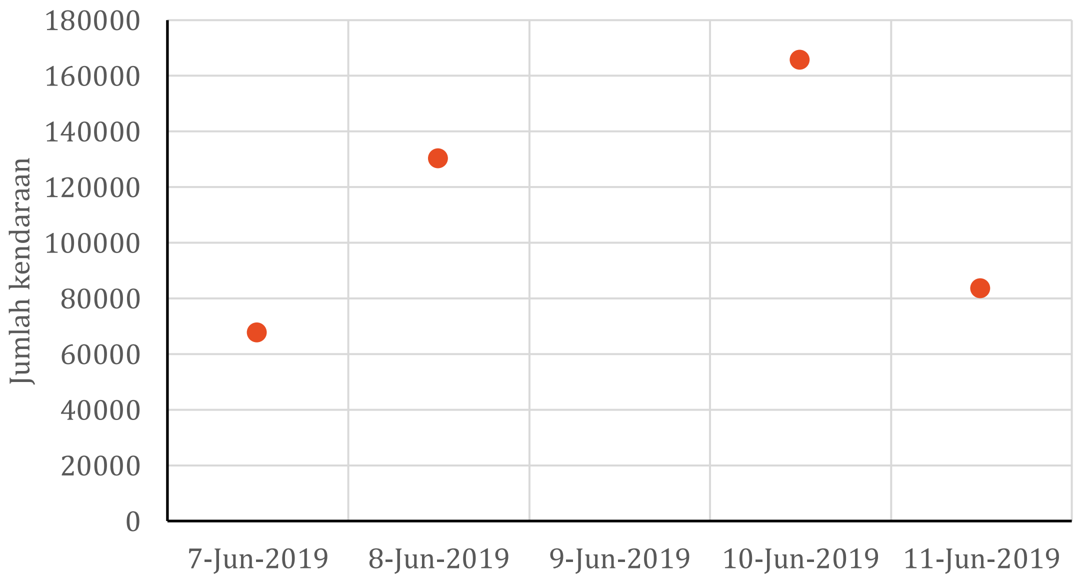
PETUNJUK

1. Saudara boleh membuka buku, tetapi tidak boleh menggunakan komputer untuk mengerjakan soal ujian ini.
2. Saudara boleh mengerjakan 4 dari 7 soal yang disediakan.

SOAL 1: INTERPOLASI [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; 25%]

Tabel dan gambar di bawah ini adalah sajian data arus balik mudik di salah satu pintu tol.

Tanggal	7 Juni 2019	8 Juni 2019	9 Juni 2019	10 Juni 2019	11 Juni 2019
Jumlah kendaraan	67345	130125	data hilang	165342	83287



Perkirakan volume kendaraan yang lewat pada tanggal 9 Juni 2019 dengan dua cara interpolasi polinomial kuadratik. Setelah data tanggal 9 Juni 2019 ditemukan, ternyata jumlah kendaraan pada tanggal itu adalah 166574. Tunjukkan kesalahan relatif dua hasil interpolasi yang telah Saudara hitung.

PENYELESAIAN

Fungsi polinomial kuadratik merupakan kurva parabolik melewati tiga titik data. Karena ada empat titik data, maka jumlah kendaraan pada 9-Jun-2019 dapat diperkirakan berdasarkan data 7, 8, 10-Jun-2019 atau data 8, 10, 11-Jun-2019.

Polinomial kuadratik melalui titik data 7, 8, 10-Jun-2019 dengan metode Newton.

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left[\left\{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right\} - \left\{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right\}\right]$$

Koefisien b_0, b_1, dan b_2 dapat diperoleh dengan hitungan tabulasi di bawah ini.

i	x	$z = f(x_i)$	Langkah hitungan ke-1	Langkah hitungan ke-2	
0	7	67345	62780	-15057.2	$\rightarrow b_0, b_1, b_2$
1	8	130125	17608.5		
2	10	165342			

Dengan demikian, persamaan kuadratik yang melewati ketiga titik data adalah:

$$f_2(x) = 67345 + 62780(x-7) - 15057.2(x-7)(x-8)$$

$$f_2(x=9) = 162791 \implies error = \frac{162791 - 166574}{166574} = -2.3\%$$

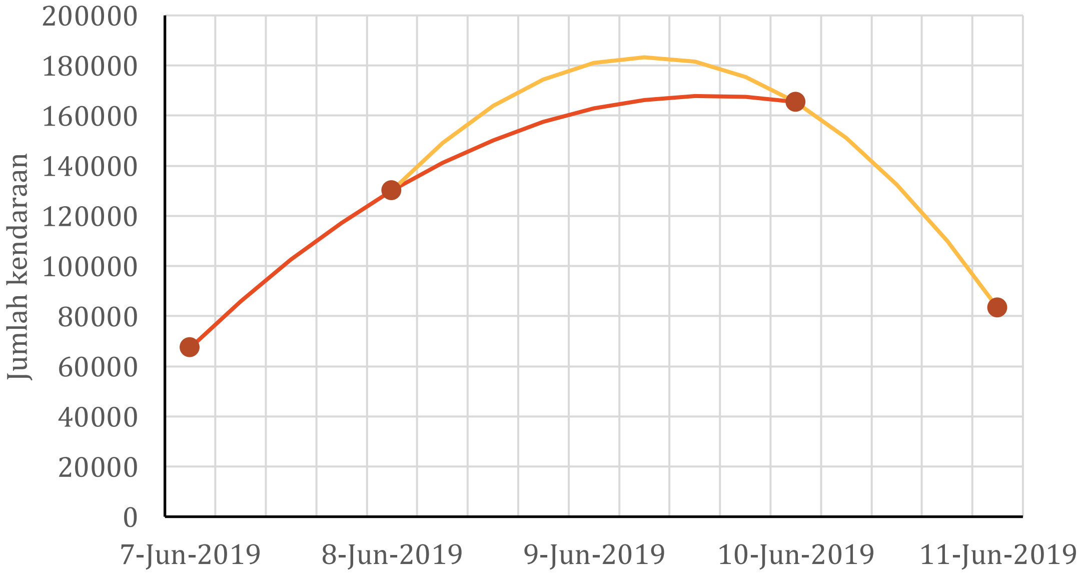
Polinomial kuadratik melalui titik data 8, 10, 11-Jun-2019 dengan metode Newton.

i	x	$z = f(x_i)$	Langkah hitungan ke-1	Langkah hitungan ke-2	
0	8	130125	17608.5	-33221.2	$\rightarrow b_0, b_1, b_2$
1	10	165342	-82055		
2	11	83287			

Dengan demikian, persamaan kuadratik yang melewati ketiga titik data adalah:

$$f_2(x) = 130125 + 17608.5(x-8) - 33221.2(x-8)(x-10)$$

$$f_2(x=9) = 180955 \implies error = \frac{180955 - 166574}{166574} = 8.6\%$$



Polinomial kuadratik dapat pula dibuat dengan metode Lagrange. Silakan Saudara mencoba membuat kurva polinomial kuadratik dengan metode ini.

SOAL 2: DIFERENSI DAN INTEGRASI NUMERIS [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; 25%]

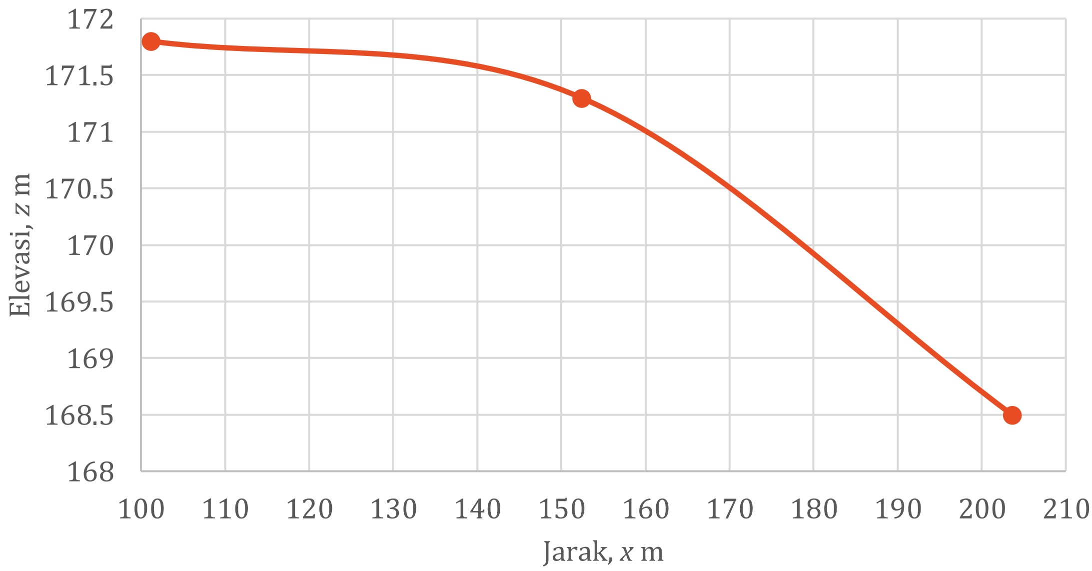
Tabel dan gambar di bawah ini adalah profil muka tanah.

Jarak, *x* m	101.2	152.4	203.6
Elevasi, *z* m	171.8	171.3	168.5

a. Hitung dan temukan kemiringan elevasi muka tanah pada jarak *x* = 152.4 m dengan pendekatan beda hingga skema diferensi tengah dan dengan pendekatan fungsi interpolasi derajat 2, misal metode Newton atau Lagrange, yang disusun berdasar 3 pasang data yang tersedia. Berapakah selisih hasil kedua cara tersebut (dengan akurasi 4 angka di belakang koma)?

b. Jika permukaan tanah dari *x* = 101.2 m sampai 203.6 m akan dikeruk untuk saluran irigasi sampai elevasi +168.2 m, tampang persegi panjang, lebar 3 m, hitung dan temukan volume tanah galian dengan metode trapesium pada pias *x*[101.2,152.4] dan pias *x*[152.4,203.6], kemudian jumlahkan volume dua pias tersebut.

c. Hitung dan temukan volume tanah galian sepanjang ruas *x*[101.2,203.6] dengan metode *Gauss Quadrature* 2 titik sampel dengan persamaan kurva permukaan tanah sebagai berikut: $z = -0.0004387x^2 + 0.1014862x + 166.0224$.



PENYELESAIAN

a. Kemirigan elevasi muka tanah. Kemiringan muka tanah pada jarak *x* = 152.4 m, dihitung dengan pendekatan beda hingga skema diferensi tengah:

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=152.4} \cong \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{168.5 - 171.8}{203.6 - 101.2} = -0.0322$$

Polinomial kuadratik dengan metode Newton memakai 3 titik data yang ada (lihat pula Soal #1):

$$z = f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

i	x	$z = f(x_i)$	Langkah hitungan ke-1	Langkah hitungan ke-2	
0	101.2	171.8	-0.0098	-0.0004	$\rightarrow b_0, b_1, b_2$
1	152.4	171.3	-0.0547		
2	203.6	168.5			

$$z = f_2(x) = 171.8 - 0.0098(x - 101.2) - 0.0004(x - 101.2)(x - 171.8)$$

$$z = f_2(x) = 171.8 - 0.0098(x - 101.2) - 0.0004[x^2 - (101.2 + 152.4)x + 101.2(152.4)]$$

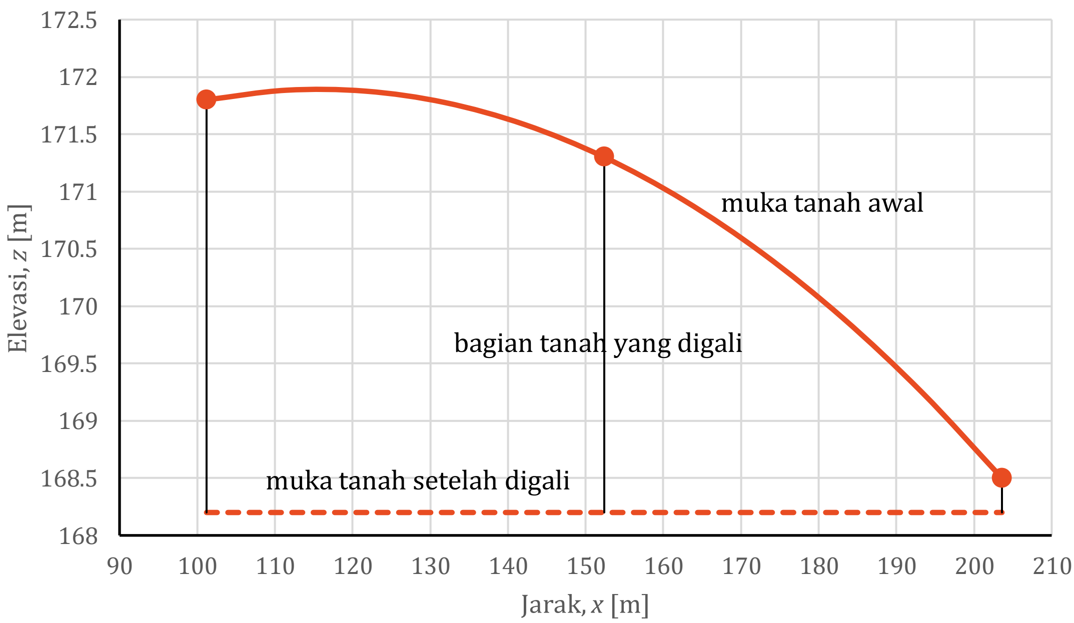
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -0.0098 - 0.0004[2x - (101.2 + 152.4)]$$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=152.4} = f'(152.4) = -0.0098 - 0.0004[2(152.4) - (101.2 + 152.4)] = -0.0322$$

Dengan demikian, selisih kemiringan yang diperoleh dari dua cara adalah nol. Kedua cara menghasilkan kemiringan tanah di titik x = 152.4 m adalah −0.0322.

b. Volume galian tanah, metode trapesium. Tanah digali sampai elevasi +168.2 m, lebar 3 m.

$$\begin{aligned}\text{Volume } &= 3\left[(152.4 - 101.2)\frac{(171.8 - 168.2) + (171.3 - 168.2)}{2}\right.\\ &\left.+ (203.6 - 152.4)\frac{(171.3 - 168.2) + (168.5 - 168.2)}{2}\right] = 514.56 + 261.12\\ &= 775.68 \text{ m}^3\end{aligned}$$



c. Integrasi Numeris Metode Kuadratur Gauss. Dalam metode ini, variabel x diubah menjadi variabel x_d. Hubungan kedua variabel adalah sebagai berikut:

$$x = \frac{(b + a) + (b - a)x_d}{2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(b - a)}{2}\mathrm{d}x_d$$

Dalam hubungan di atas, *a* dan *b* adalah batas integrasi, yaitu *a* = 101.2 dan *b* = 203.6.

$$x = \frac{(203.6 + 101.2) + (203.6 - 101.2)x_d}{2} = 152.4 + 51.2x_d$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(b - a)}{2}\mathrm{d}x_d = 51.2\mathrm{d}x_d$$

Kedua variabel di atas disubstitusikan ke persamaan integrasi elevasi muka tanah berikut:

$$\int_{101.2}^{203.6} (-0.0004387x^2 + 0.1014862x + 166.0224)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} \{-0.0004387\,(152.4 + 51.2x_d)^2 + 0.1014862\,(152.4 + 51.2x_d) + 166.0224\}\,51.2\mathrm{d}x$$

$$= f\left(x_d = -1/\sqrt{3}\right) + f\left(x_d = 1/\sqrt{3}\right) = 8799.8019 + 8702.2437$$

$$= 17502.046 \text{ m}^2$$

Integrasi di atas adalah luas di bawah muka tanah dari *x* = 101.2 m s.d. 203.6 m. Volume galian tanah sampai elevasi 168.2 m adalah:

$$\text{Volume} = [17502.046 - (203.6 - 101.2) \times 168.2] \times 3 = 835.0968 \text{ m}^3$$

SOAL 3: SYARAT AWAL, *INITIAL CONDITION* [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; 25%]

Seorang penerjun payung melompat dari tebing vertikal. Kecepatan gerak jatuh, w, sebelum payung dikembangkan mengikuti persamaan berikut ini.

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + aw = b$$

Dalam persamaan tersebut, diketahui $a = 0.06$ /s, $b = 9.75$ m/s^2, dan pada saat $t = 0$ s, kecepatan $w = 0$ m/s.

Gunakan metode Euler dan metode Heun untuk mendapatkan kecepatan jatuh penerjun pada saat $t = 50$ s. Gunakan langkah waktu $\Delta t = 10$ s. Tunjukkan kesalahan relatifnya terhadap solusi analitik $w = b/a\ (1 - e^{-at})$ pada $t = 50$ s.

PENYELESAIAN

Kecepatan gerak jatuh penerjun adalah sebuah persamaan diferensial biasa (ODE):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + aw = b \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = b - aw$$

Kecepatan jatuh w pada waktu t dapat dihitung dengan Metode Euler.

$$w_{i+1} = w_i + \phi_i \Delta t = w_i + \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_i \Delta t$$

Syarat awal adalah $w(t = 0) = 0$ m/s. Hitungan dilakukan secara bertahap dengan selang waktu $\Delta t = 10$ detik.

$$\phi_i = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_i = 9.75 - 0.06\, w_i$$

i	t_i	w_i	ϕ_i	$\phi_i \Delta t$	w_{i+1}
0	0	0	9.75	97.5	97.5
1	10	97.5	3.9	39	136.5
2	20	136.5	1.56	15.6	152.1
3	30	152.1	0.624	6.24	158.34
4	40	158.34	0.2496	2.496	160.836
5	50	160.836			

Kecepatan jatuh w pada waktu t, dihitung dengan metode Heun. Kecepatan jatuh dihitung dalam dua langkah; langkah pertama adalah menghitung prediktor dan langkah kedua mengoreksi hasil hitungan langkah pertama.

$$w_{i+1}^{pred} = w_i + \phi_i \Delta t$$

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{2}\left(\phi_i + \phi_{i+1}^{pred}\right)\Delta t$$

$$\phi_i = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_i = 9.75 - 0.06\, w_i$$

$$\phi_{i+1}^{pred}\phi_i = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_{i+1} = 9.75 - 0.06\, w_{i+1}^{pred}$$

i	t_i	w_i	ϕ_i	w_{i+1}^{pred}	ϕ_{i+1}^{pred}	ϕ_{rerata}	w_{i+1}
0	0	0.0000	9.7500	97.5000	3.9000	6.8250	68.2500
1	10	68.2500	5.6550	124.8000	2.2620	3.9585	107.8350
2	20	107.8350	3.2799	140.6340	1.3120	2.2959	130.7943
3	30	130.7943	1.9023	149.8177	0.7609	1.3316	144.1107
4	40	144.1107	1.1034	155.1443	0.4413	0.7724	151.8342
5	50	151.8342					

Soal 4: Syarat Awal, *Initial Condition* [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; 25%]

Kerjakan Soal 3 dengan dua metode Runge-Kutta (RK). Saudara boleh memilih dua di antara metode *second-order* RK, *third-order* RK, *fourth-order* RK.

Penyelesaian

Metode Runge-Kutta orde 2.

$$w_{i+1} = w_i + \phi \Delta t = w_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)\Delta t$$

$$k_1 = f(t_i, w_i) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_i = 9.75 - 0.06\, w_i$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 \Delta t, w_i + q_{11} k_1 \Delta t)$$

$$a_1 = 1 - a_2, \qquad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Ada beberapa varian Runge-Kutta orde 2, yang dibedakan menurut nilai a_2, yaitu Metode Heun korektor tunggal ($a_2 = 1/2$), Metode Ralston ($a_2 = 2/3$), metode poligon yang diperbaiki ($a_2 = 1$). Di bawah ini disajikan hitungan kecepatan jatuh penerjun dengan Metode Ralston.

$a_2 = 2/3$

i	t_i	w_i	k_1	$t_i + p_1\Delta t$	$w_i + q_{11}k_1\Delta t$	k_2	ϕ_i	w_{i+1}
0	0	0.0000	9.7500	7.5000	73.1250	5.3625	6.8250	68.2500
1	10	68.2500	5.6550	17.5000	110.6625	3.1103	3.9585	107.8350
2	20	107.8350	3.2799	27.5000	132.4343	1.8039	2.2959	130.7943
3	30	130.7943	1.9023	37.5000	145.0619	1.0463	1.3316	144.1107
4	40	144.1107	1.1034	47.5000	152.3859	0.6068	0.7724	151.8342
5	50	151.8342						

Metode Runge-Kutta orde 3.

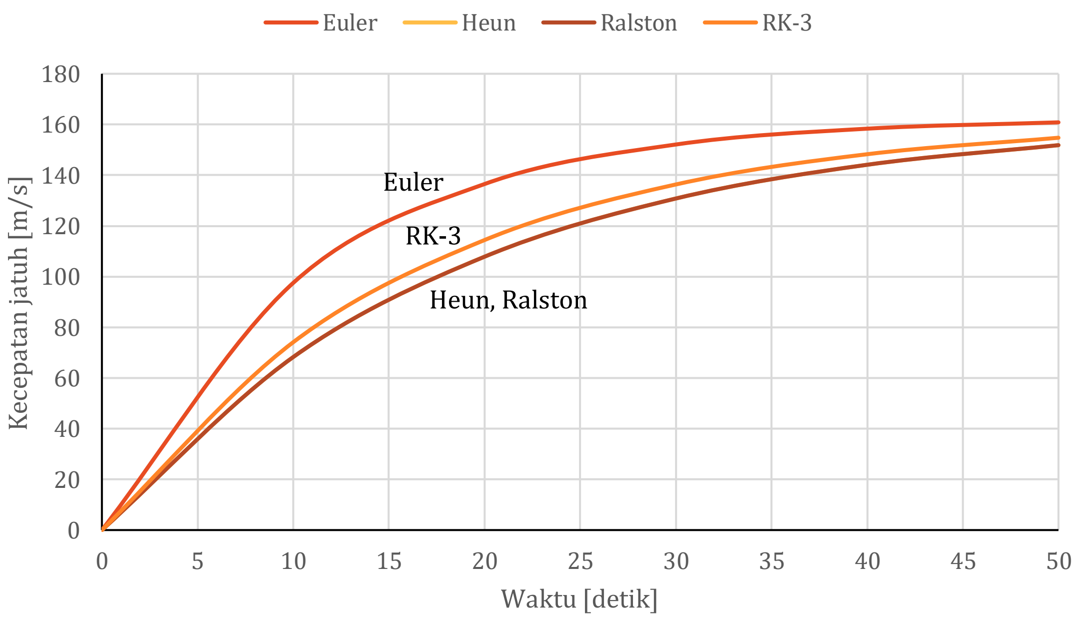
$$w_{i+1} = w_i + \phi\Delta t = w_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\right]\Delta t$$

$$k_1 = f(t_i, w_i) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_i = 9.75 - 0.06\,w_i$$

$$k_2 = f\left(t_i + \tfrac{1}{2}\Delta t, w_i + \tfrac{1}{2}k_1\Delta t\right)$$

$$k_3 = f(t_i + \Delta t, w_i - k_1\Delta t + 2k_2\Delta t)$$

Hitungan disajikan pada tabel di halaman berikut. Hasil hitungan disajikan pada gambar di bawah ini. Metode Heun dan Metode Ralston memberikan hasil yang sama.



Runge-Kutta orde 3

$$w_{i+1} = w_i + \phi \Delta t = w_i + \left[\tfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\right] \Delta t$$

$$k_1 = f(t_i, w_i) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|_i = 9.75 - 0.06\, w_i$$

$$k_2 = f\left(t_i + \tfrac{1}{2}\Delta t, w_i + \tfrac{1}{2}k_1 \Delta t\right)$$

$$k_3 = f(t_i + \Delta t, w_i - k_1 \Delta t + 2k_2 \Delta t)$$

i	t_i	w_i	k_1	$t_i + \frac{1}{2}\Delta t$	$w_i + \frac{1}{2}k_1 \Delta t$	k_2	$t_i + \Delta t$	$w_i - k_1 \Delta t + 2k_2 \Delta t$	k_3	ϕ_i	w_{i+1}
0	0	0.0000	9.7500	5.0000	48.7500	6.8250	10.0000	39.0000	7.4100	7.4100	74.1000
1	10	74.1000	5.3040	15.0000	100.6200	3.7128	20.0000	95.3160	4.0310	4.0310	114.4104
2	20	114.4104	2.8854	25.0000	128.8373	2.0198	30.0000	125.9519	2.1929	2.1929	136.3393
3	30	136.3393	1.5696	35.0000	144.1875	1.0988	40.0000	142.6178	1.1929	1.1929	148.2686
4	40	148.2686	0.8539	45.0000	152.5380	0.5977	50.0000	151.6841	0.6490	0.6490	154.7581
5	50	154.7581									

Soal 5: Syarat Batas, *Boundary Condition* [CP: a.1, a.2, a.3, k.1; Bobot Nilai: 25%]

Di bawah ini adalah persamaan diferensial parsial parabolik yang mendeskripsikan aliran air tanah tak tertekan.

$$k\frac{\partial^2(h^2)}{\partial x^2} = -q_r$$

Persamaan berlaku dalam domain rentang jarak $0\ \mathrm{m} \le x \le 30\ \mathrm{m}$. Diketahui nilai h di batas domain sebagai berikut: $h(0) = 2\ \mathrm{m}$ dan $h(30) = 8\ \mathrm{m}$. Diketahui pula $k = 0.0012\ \mathrm{m/s}$ dan $q_r = 0.00308\ \mathrm{m/s}$.

Gunakan teknik beda hingga untuk mendekati penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut dalam rentang $x = 0\ \mathrm{m}$ sampai $x = 30\ \mathrm{m}$. Gunakan langkah jarak $\Delta x = 10\ \mathrm{m}$.

Penyelesaian

Bentuk diskrit persamaan aliran air tanah dengan teknik beda hingga adalah sbb.

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[(h^2)_{i-1} - 2(h^2)_i + (h^2)_{i+1}\right] = -\frac{q_r}{k}$$

Di titik $i = 1, x = 10$ m:

$$\frac{1}{10^2}\left[(2^2) - 2(h^2)_1 + (h^2)_2\right] = -\frac{0.00308}{0.0012} \implies -2(h^2)_1 + (h^2)_2 = -260.6667$$

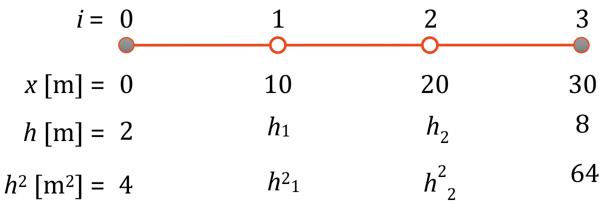
Di titik $i = 2, x = 20$ m

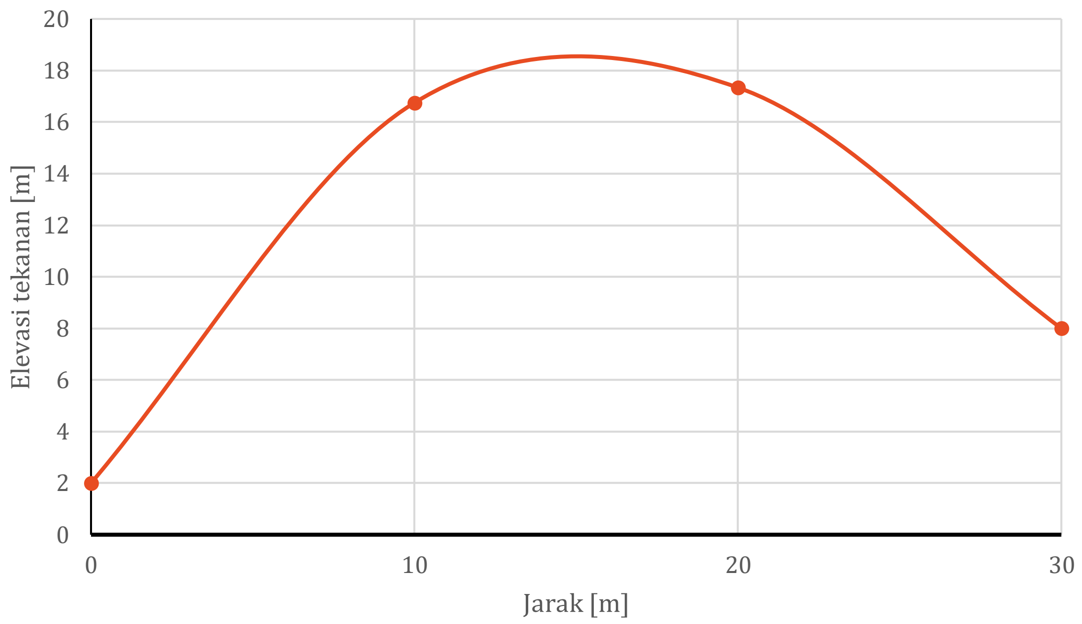
$$\frac{1}{10^2}\left[(h^2)_1 - 2(h^2)_2 + (8^2)\right] = -\frac{0.00308}{0.0012} \implies (h^2)_1 - 2(h^2)_2 = -320.6667$$

Dari 2 persamaan di atas, dilakukan teknik substitusi untuk mendapatkan $(h^2)_1$ dan $(h^2)_2$.

$$-2\left[-320.6667 + 2(h^2)_2\right] + (h^2)_2 = -260.6667$$

$$-3(h^2)_2 = -902 \implies (h^2)_2 = 300.6667 \implies h_2 = 17.34\ \mathrm{m}$$
$$(h^2)_2 = 300.6667 \implies (h^2)_1 = 280.6667 \implies h_1 = 16.75\ \mathrm{m}$$





Soal 6: Persamaan Diferensial Parsial [CP: a.1, a.2, a.3, k.1; Bobot Nilai: 25%]

Hitung **atau** tulis program komputer (*macro*) untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut ini dengan metode beda hingga skema *Forward Time Central Space*.

$$2n\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + q_r - Q_p$$

Domain hitungan pada $x[0,20]$ dan $t[0,100]$. Gunakan $\Delta t = 2$ s dan $\Delta x = 1$ m. Diketahui, $n = 0.4$, $k = 0.0018$, $q_r = 0.0004$ berlaku pada $t \geq 0$ s, dan $Q_p = 0.001$ di $x = 8$ m, berlaku pada $t \geq 32$ s. Syarat batas: $h(0,t) = h(20,t) = 15$ m. Syarat awal: $h(x,0) = 15$ m. Progam menuliskan hasil hitungan, $h(t_n, x_i)$, untuk $t = 30, 50, 80, 100$ s.

Penyelesaian

Untuk memudahkan penulisan, dikenalkan variabel baru, $u = h^2$, dan indeks m untuk langkah waktu dari t ke $t + \Delta t$, serta indeks i untuk langkah jarak dari x ke $x + \Delta x$.

$$2n\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_r - Q_p$$

Persamaan diskrit beda hingga skema eksplisit:

$$2n\frac{h_i^{m+1} - h_i^m}{\Delta t} = k\frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{\Delta x^2} + q_r - Q_p$$

$$h_i^{m+1} = h_i^m + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i-1}^m - \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}2u_i^m + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i+1}^m + \frac{\Delta t}{2n}\left(q_r - Q_p\right)$$

Contoh hitungan untuk $t = 2$ dan 4 detik:

$n = 0.4$, $k = 0.0018$, $q_r = 0.0004$, $Q_p = 0$

$$\frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} = \frac{0.0018 \times 2}{2 \times 0.4 \times 1^2} = 0.0045$$

$$\frac{\Delta t}{2n} = \frac{2}{2 \times 0.4} = 2.5$$

$$t = 2: h_i^1 = h_i^0 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} u_{i-1}^0 - \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} 2u_i^0 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} u_{i+1}^0 + \frac{\Delta t}{2n}(q_r - Q_p); i = 0,1, \dots, 20$$

$$t = 4: h_i^2 = h_i^1 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} u_{i-1}^1 - \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} 2u_i^1 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} u_{i+1}^1 + \frac{\Delta t}{2n}(q_r - Q_p); i = 0,1, \dots, 20$$

Hitungan disajikan pada tabel di bawah ini.

	t [s] =	0		2		4	
	m =	0		1		2	
x [m]	*i*	h_i^m	u_i^m	h_i^m	u_i^m	h_i^m	u_i^m
0	0	15	225	15	225	15	225
1	1	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
2	2	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
3	3	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
4	4	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
5	5	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
6	6	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
7	7	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
8	8	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
9	9	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
10	10	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
11	11	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
12	12	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
13	13	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
14	14	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
15	15	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
16	16	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
17	17	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
18	18	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
19	19	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
20	20	15	225	15	225	15	225

SOAL 7: PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL [CP: A.1, A.2, A.3; BOBOT NILAI: 25%]

Persebaran polutan dalam medium air di saluran terbuka yang dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

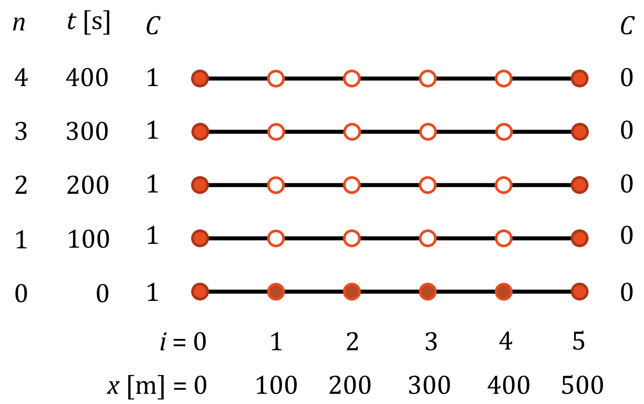
Dalam persamaan di atas, C adalah konsentrasi polutan dalam aliran, U adalah kecepatan aliran, t adalah waktu, dan x adalah jarak searah aliran.

Gunakan metode beda-hingga skema eksplisit untuk menghitung konsentrasi $C(x,t)$. Kecepatan aliran adalah konstan, $U = 0.5$ m/s, panjang saluran 500 m. Gunakan langkah jarak $\Delta x = 100$ m dan langkah waktu $\Delta t = 100$ s. Pada waktu $t = 0$ s, konsentrasi di sepanjang saluran adalah nol, $C(x,0) = 0$. Konsentrasi polutan di batas hulu saluran adalah $C(0,t) = 1$ dan di batas hilir saluran adalah $C(500,t) = 0$. Hitungan dilakukan sampai langkah waktu ke-4, $t = 400$ s.

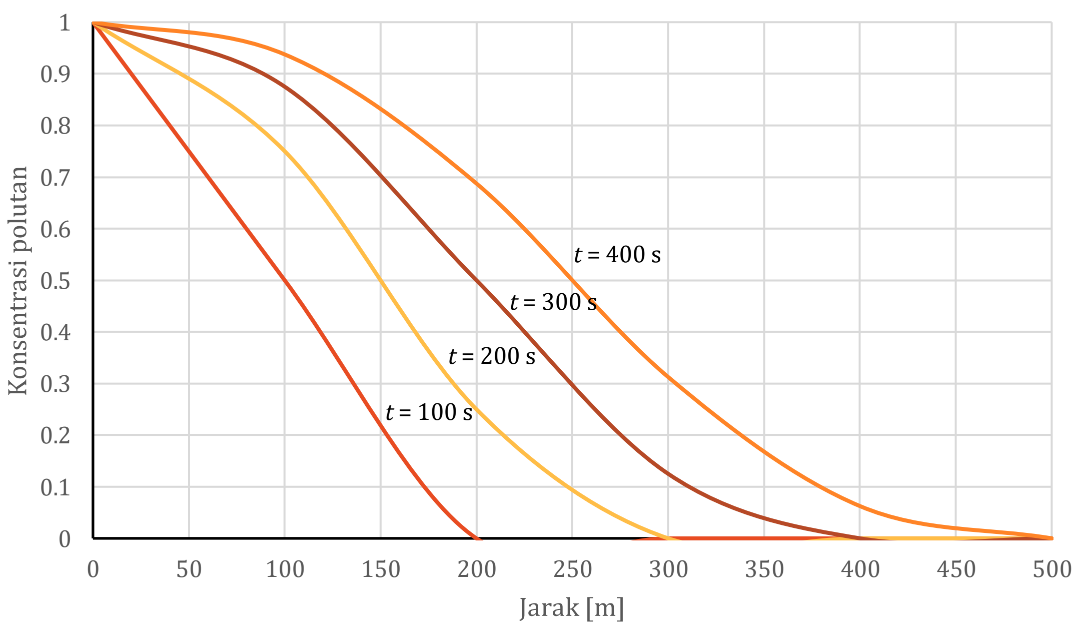
Penyelesaian

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U\frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$C_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}U\right)C_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}UC_{i-1}^n$$



n	t [s]	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0	0	1	0	0	0	0	0
1	100	1	0.5	0	0	0	0
2	200	1	0.75	0.25	0	0	0
3	300	1	0.875	0.5	0.125	0	0
4	400	1	0.9375	0.6875	0.3125	0.0625	0



-o0o-