

UJIAN AKHIR SEMESTER STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Senin, 16 Desember 2019 | 100 menit
[Boleh membuka buku | Tidak boleh memakai komputer]

SOAL 1 (CP A-1, A-2, A-3; BOBOT NILAI 50%)

Sebuah bangunan ditopang oleh 150 fondasi tiang. Setiap tiang fondasi memiliki kapasitas dukung 100 ton. Untuk memeriksa kapasitas tiang fondasi tersebut, telah dilakukan PDA Test (*pile driving analyzer test*) terhadap 12 tiang fondasi. Hasil pengujian adalah sebagai berikut:

Tiang uji	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kapasitas (ton)	102	95	97	110	93	90	120	118	100	96	92	107

- Berapakah nilai rerata dan simpangan baku kapasitas dukung tiang fondasi? (Bobot nilai 10%).
- Tentukan rentang keyakinan dua sisi kapasitas dukung fondasi dengan tingkat keyakinan 90%. (Bobot nilai 20%).
- Pada tingkat kesalahan (α) 5%, apakah kapasitas dukung tiang fondasi 100 ton tersebut dapat diterima? Tunjukkan dengan melakukan uji hipotesis. (Bobot nilai 20%).

PENYELESAIAN

(a) Nilai rerata dan simpangan baku (bobot nilai 10%)

Data kapasitas dukung tiang fondasi tersebut adalah data sampel, bukan data populasi. Mutu beton rata-rata adalah:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1220}{12} = 101.67 \text{ ton}$$

Simpangan baku kapasitas dukung tiang fondasi dihitung dengan bantuan tabel frekuensi, yaitu dengan menambahkan kolom yang berisi x_i^2 . Nilai simpangan baku adalah:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{125140 - (101.67)^2}{12 - 1}} = 10.03 \text{ ton}$$

(b) Rentang keyakinan kapasitas dukung tiang fondasi (bobot nilai 20%)

Rentang keyakinan kapasitas dukung tiang fondasi, dengan asumsi bahwa mutu beton tersebut berdistribusi normal, dinyatakan dengan persamaan berikut:

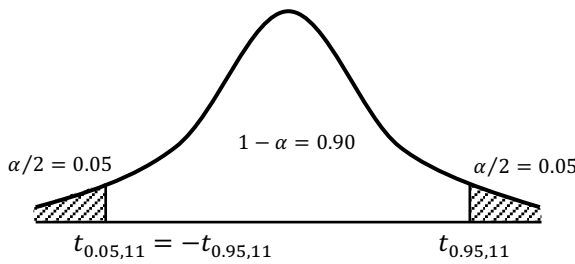
$$\text{prob}(l \leq \mu_x \leq u) = 1 - \alpha$$

Dalam persamaan di atas, l adalah batas bawah rentang keyakinan, u adalah batas atas rentang keyakinan, dan $1 - \alpha$ adalah tingkat keyakinan. Batas bawah dan batas atas rentang keyakinan mutu beton rata-rata dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$l = \bar{X} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2, n-1} \quad \text{dan} \quad u = \bar{X} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2, n-1}$$

Nilai $t_{1-\alpha/2, n-1}$ adalah nilai t pada pdf distribusi t sedemikian hingga $\text{prob}(T < t) = 1 - \alpha/2$ pada nilai derajat kebebasan $v = n - 1$, dan n ukuran sampel (jumlah data). Tingkat keyakinan telah ditetapkan, yaitu $1 - \alpha = 90\%$.

Untuk tingkat keyakinan $1 - \alpha = 90\%$, maka $1 - \alpha/2 = 95\%$. Nilai $t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0.95, 11}$ dibaca pada tabel distribusi t . Bacaan tabel menjadi mudah dilakukan dengan cara membuat sketsa pdf distribusi t . Dari tabel distribusi t , diperoleh:



$$t_{0.95, 11} = 1.7959$$

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang adalah:

$$l = 101.67 - 1.7959 \frac{10.03}{\sqrt{12}} = 96.47 \text{ ton}$$

$$u = 101.67 + 1.7959 \frac{10.03}{\sqrt{12}} = 106.87 \text{ ton}$$

Jadi, rentang keyakinan 90% kapasitas dukung tiang fondasi adalah:

$$\text{prob}(96.47 \text{ ton} \leq \mu_x \leq 106.87 \text{ ton}) = 0.90.$$

(c) Uji kapasitas dukung tiang pancang (bobot nilai 20%)

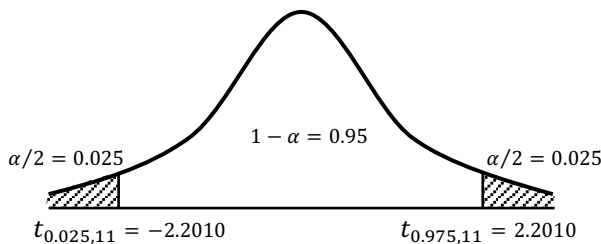
$$H_0: \mu_0 = 100 \text{ ton}$$

$$H_1: \mu_0 \neq 100 \text{ ton}$$

Karena varians populasi tidak diketahui (σ_x^2 tidak diketahui), maka statistika uji adalah:

$$T = \frac{\sqrt{n}}{s_x} (\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{12}}{10.03} (101.67 - 100) = 0.5756$$

Batas-batas penerimaan atau penolakan statistika uji dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 95\%$ dan jumlah sampel $n = 12$ adalah: $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 11}$ dan $t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0.975, 11}$.



Dari tabel distribusi t , diperoleh:

$$t_{0.975, 11} = 2.2010 \text{ dan}$$

$$t_{0.025, 11} = -2.2010$$

Dengan demikian, statistika uji $T = 0.5756$ berada di dalam rentang penerimaan hipotesis H_0 ($|T| < t_{0.975, 11}$), sehingga

hipotesis yang menyatakan bahwa kapasitas dukung tiang fondasi adalah 100 ton diterima.

SOAL 2 (CP A-1, A-2, A-3; BOBOT NILAI 50%)

Pada observasi perilaku aliran lalu lintas yang dilakukan selama 1 hari atau 24 jam diperoleh data kerapatan (kepadatan) lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran lalu lintas sebagai berikut:

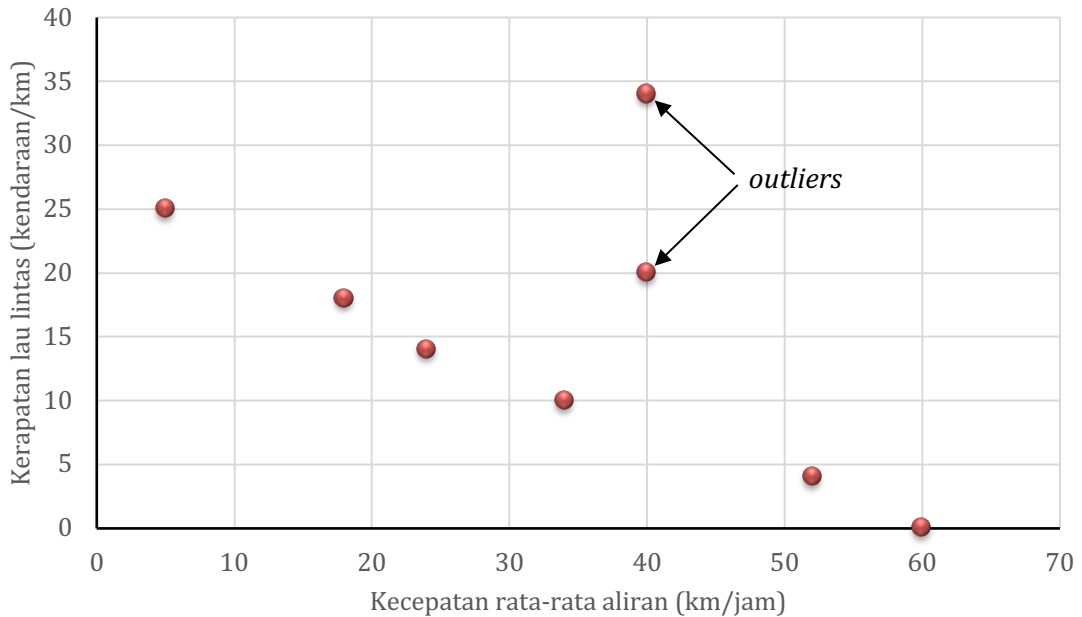
Kecepatan rata-rata aliran (km/jam)	52	40	60	24	18	40	34	5
Kerapatan lalu lintas (kendaraan/km)	4	34	0	14	18	20	10	25

- Gambarkan grafik (*scatter diagram*) yang menunjukkan hubungan antara kerapatan (kepadatan) lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran lalu lintas. (Bobot nilai 10%).
- Lakukan regresi linear untuk terhadap pasangan data aliran lalu lintas tersebut. (Bobot nilai 20%).
- Berapakah nilai koefisien determinasi dan koefisien korelasi regresi linear tersebut? (Bobot nilai 10%).
- Jelaskan arti dan informasi apa yang dapat Saudra peroleh dari nilai koefisien determinasi atau koefisien korelasi hubungan antara kerapatan (kepadatan) lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran lalu lintas. (Bobot nilai 10%).

PENYELESAIAN

(a) Scatter diagram (bobot nilai 10%)

Menyajikan data dalam bentuk grafik merupakan langkah cerdas untuk membaca pola sebaran data.



(b) Regresi linear (bobot nilai 20%)

Dari gambar tampak bahwa dua pasang data berada pada posisi yang menyimpang dari pola data yang lain, yaitu pasangan data ini kedua dan keenam. Pola data secara keseluruhan menunjukkan keteraturan hubungan antara kecepatan rata-rata aliran dan kerapatan lalu lintas. Semakin tinggi kecepatan aliran, maka kerapatan lalu lintas berkurang. Pasangan data kedua dan keenam, yaitu pada kecepatan aliran 40 km/jam, mengubah pola hubungan ini. Data seperti ini dikenal sebagai *outliers*. Adanya *outlier* dapat disebabkan oleh sifat keragaman (variabilitas) sampel atau diakibatkan oleh kesalahan survei. Apabila penyebab *outlier* diketahui, maka perlakuan terhadapnya dapat ditentukan dengan mudah. Misal, pada kasus *outlier* yang disebabkan oleh kesalahan pengukuran, maka *outlier* dikeluarkan dari sampel dan tidak diikuti dalam pengolahan data. Sebaliknya, jika survei sudah benar, maka *outlier* tetap diikuti dalam pengolahan data.

Dengan asumsi bahwa *outlier* tersebut disebabkan oleh kesalahan survei, maka *outlier* dikeluarkan dari daftar data yang diolah.

Hubungan antara kerapatan lalu lintas $Y (y_i = y_1, y_2, \dots, y_n)$ dan kecepatan rata-rata aliran $X (x_i = x_1, x_2, \dots, x_n)$ dapat diperoleh dengan teknik regresi metode kuadrat terkecil yang dinyatakan dalam persamaan linear berikut:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X$$

Variabel \hat{Y} atau sering pula disimbolkan dengan Y_r adalah kerapatan lalu lintas sebagai fungsi kecepatan rata-rata aliran X . Nilai a_0 dan a_1 dalam persamaan regresi dicari dengan persamaan berikut:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \text{ dan } a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X}$$

Dalam persamaan di atas, n adalah jumlah data, \bar{Y} dan \bar{X} adalah kerapatan lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran. Untuk menghemat penulisan, indeks pada operator penjumlahan tidak dituliskan, sehingga $\sum_{i=1}^n x_i$ dituliskan sebagai $\sum x_i$ dan $\sum_{i=1}^n y_i$ dituliskan sebagai $\sum y_i$.

Hitungan regresi linear dengan metode kuadrat terkecil disajikan pada Tabel 1 di bawah ini.

TABEL 1 HITUNGAN REGRESI LINEAR HUBUNGAN ANTARA KERAPATAN LALU LINTAS DAN KECEPATAN RATA-RATA ALIRAN DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
52	4	208	2704
40	34		
60	0	0	3600
24	14	336	576
18	18	324	324
40	20		
34	10	340	1156
5	25	125	25
193	71	1333	8385

Dari Tabel 1, diperoleh informasi sebagai berikut:

- jumlah pasang data, $n = 6$;
- kerapatan lalu lintas rata-rata, $\bar{Y} = \sum y_i / n = 71 / 6 = 11.8333$ kendaraan/km;
- kecepatan aliran rata-rata, $\bar{X} = \sum x_i / n = 193 / 6 = 32.1667$ km/jam.

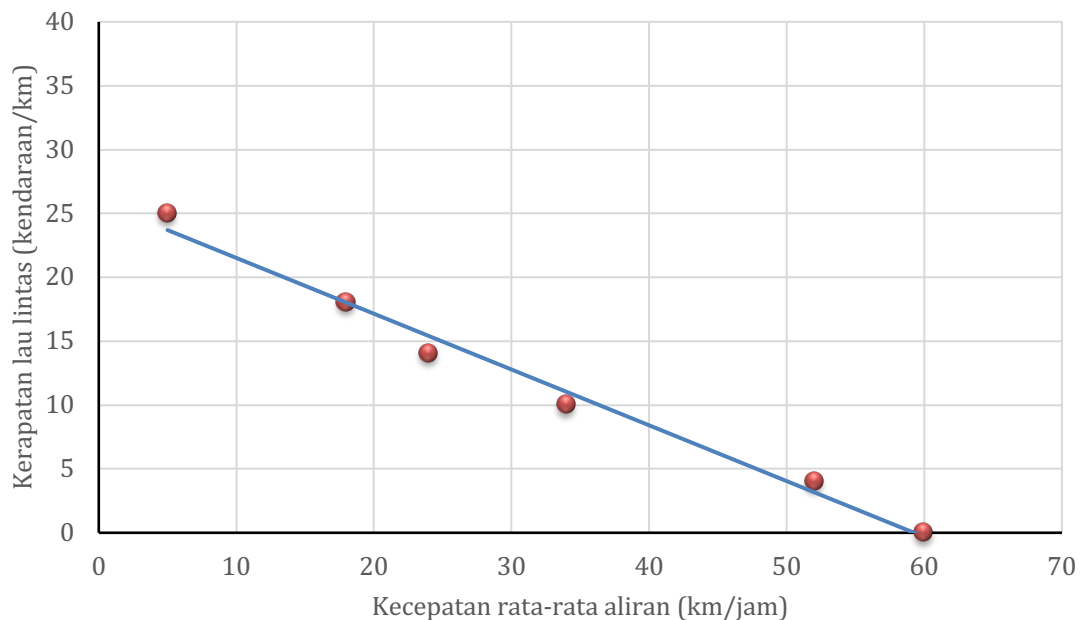
Koefisien a_1 dan a_0 pada persamaan kurva regresi dihitung sebagai berikut:

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{6 \times 1333 - 193 \times 71}{6 \times 8385 - 193^2} = -0.4368 \text{ kendaraan. jam/km}^2.$$

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X} = 11.8333 - 0.4368 \times 32.1667 = 25.8836 \text{ kendaraan/km.}$$

Perhatikan bahwa koefisien a_0 dan a_1 memiliki satuan. Hubungan antara kerapatan lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran yang diperoleh dari regresi linear antara kedua variabel adalah:

$$\hat{Y} = 25.8836 - 0.4368 X \text{ atau } \hat{y}_i = 25.8836 - 0.4368 x_i.$$



(c) Koefisien determinasi dan koefisien korelasi (bobot nilai 10%)

Koefisien determinasi, r^2 , dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2 - \sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{Y})^2}$$

Koefisien korelasi, r , dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$r = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2 - \sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{Y})^2}} \text{ atau } r = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Dalam persamaan di atas, operator penjumlahan $\sum x_i$ dibaca $\sum_{i=1}^n x_i$ dan indeks $i = 1, 2, \dots, n$.

Hitungan untuk mendapatkan nilai S_t dan nilai S_r dilakukan secara tabulasi dalam Tabel 2 di bawah ini.

TABEL 2 HITUNGAN KOEFISIEN DETERMINASI ANTARA KERAPATAN LALU LINTAS DAN KECEPATAN RATA-RATA ALIRAN

x_i	y_i	$(y_i - \bar{Y})^2$	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
52	4	61.3611	3.1702	0.6886
40	34			
60	0	140.0278	-0.3242	0.1051
24	14	4.6944	15.4005	1.9614
18	18	38.0278	18.0213	0.0005
40	20			
34	10	3.3611	11.0325	1.0661
5	25	173.3611	23.6996	1.6909
		$S_t = 420.8333$	$S_r = 5.5126$	

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{420.8333 - 5.5126}{420.8333} = 0.9869.$$

Koefisien korelasi adalah akar kuadrat koefisien determinasi. Akar kuadrat dapat bernilai positif atau negatif. Koefisien korelasi dapat bernilai positif atau negatif. Karena gradien kurva regresi, a_1 , bernilai negatif, atau dengan kata lain kerapatan lalu lintas berkurang seiring dengan pertambahan kecepatan rata-rata aliran, maka koefisien korelasi bernilai negatif, $r = -\sqrt{r^2} = -\sqrt{0.9869} = -0.9934$.

(c) Hubungan linear antara kerapatan lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran (bobot nilai 10%)

Kerapatan lalu lintas dan kecepatan rata-rata aliran menunjukkan hubungan linear yang erat, walau linearitas hubungan antara keduanya tidak sepenuhnya sempurna. Nilai koefisien korelasi -0.9934 sangat mendukung simpulan bahwa kerapatan lalu lintas berbanding lurus (linear) dengan kecepatan rata-rata aliran; kerapatan lalu lintas berkurang seiring dengan pertambahan kecepatan rata-rata aliran.