

UJIAN AKHIR SEMESTER

| | | |
|------------------|---|-----------------------------------|
| Mata kuliah | : | Statistika dan Probabilitas |
| Hari dan tanggal | : | Senin, 14 Desember 2020 |
| Waktu | : | 07.30 – 09.30 |
| Sifat ujian | : | Buku terbuka (<i>open book</i>) |

SOAL 1 (CP A-1, A-2, A-3; BOBOT NILAI 50%)

Seorang pengawas lapangan melakukan pengujian kuat tekan beton yang berumur 28 hari. Hasil pengujian ditampilkan dalam tabel di bawah ini.

| Tanggal | Kuat tekan (N/mm ²) |
|-------------------|---------------------------------|
| 21 September 2020 | 33.5 |
| 29 Juni 2020 | 34.0 |
| 26 Juni 2020 | 30.1 |
| 14 April 2020 | 32.1 |
| 31 Maret 2020 | 29.5 |
| 19 Maret 2020 | 32.7 |
| 9 Maret 2020 | 36.7 |
| 7 Februari 2020 | 29.8 |
| 1 Februari 2020 | 28.5 |
| 28 Januari 2020 | 30.5 |
| 18 Desember 2019 | 31.1 |

Dengan asumsi bahwa deviasi standar populasi kuat tekan beton diketahui, yaitu 2 N/mm², silakan Anda menjawab pertanyaan-pertanyaan di bawah ini.

- Berapa nilai rerata dan deviasi standar kuat tekan sampel beton? (10%).
- Berapa batas atas dan batas bawah nilai kuat tekan beton? Silakan Anda menentukan sendiri tingkat kepercayaan rentang. (20%).
- Melalui uji hipotesis, apakah pemilik proyek dapat menerima bahwa beton yang dibuat kontraktor memiliki kuat tekan minimum 33 N/mm²? Silakan Anda menentukan sendiri tingkat kepercayaan uji hipotesis. (20%).

PENYELESAIAN

(a) Nilai rerata dan simpangan baku kuat tekan beton (bobot nilai 10%)

Hitungan nilai rerata dan simpangan baku kuat tekan beton menjadi lebih mudah dengan bantuan tabel.

| Sampel tanggal | Kuat tekan x (N/mm ²) | x^2 (N ² /mm ⁴) |
|----------------------------|-------------------------------------|--|
| 21-Sep-20 | 33.5 | 1122.25 |
| 29-Jun-20 | 34.0 | 1156 |
| 26-Jun-20 | 30.1 | 906.01 |
| 14-Apr-20 | 32.1 | 1030.41 |
| 31-Mar-20 | 29.5 | 870.25 |
| 19-Mar-20 | 32.7 | 1069.29 |
| 09-Mar-20 | 36.7 | 1346.89 |
| 07-Feb-20 | 29.8 | 888.04 |
| 01-Feb-20 | 28.5 | 812.25 |
| 28-Jan-20 | 30.5 | 930.25 |
| 18-Dec-19 | 31.1 | 967.21 |
| $n = 11$ | 348.5 | 11098.85 |

Data kuat tekan beton adalah data sampel, bukan data populasi. Kuat-tekan rerata beton adalah:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{348.5}{11} = 31.7 \text{ N/mm}^2$$

Nilai simpangan baku kuat-tekan beton adalah:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{11098.85 - (31.7)^2}{11 - 1}} = 2.4 \text{ N/mm}^2$$

Tampak bahwa nilai simpangan baku kuat-tekan sampel beton tidak sama dengan nilai simpangan baku kuat-tekan populasi beton, yaitu $s_x = 2.4 \text{ N/mm}^2$ dan $\sigma_x = 2 \text{ N/mm}^2$.

(b) Rentang keyakinan kuat tekan beton (bobot nilai 20%)

Rentang keyakinan kuat tekan beton, dengan memakai asumsi bahwa mutu beton berdistribusi normal, dinyatakan dengan persamaan berikut:

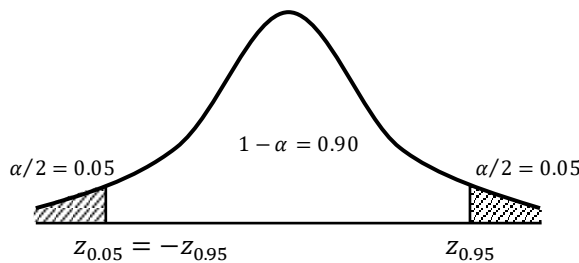
$$\text{prob}(l < \mu_x < u) = 1 - \alpha$$

Dalam persamaan di atas, l adalah batas bawah rentang keyakinan, u adalah batas atas rentang keyakinan, dan $1 - \alpha$ adalah tingkat keyakinan. Batas bawah dan batas atas rentang keyakinan kuat-tekan rerata beton dinyatakan dalam persamaan matematis berikut:

$$l = \bar{X} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \quad \text{dan} \quad u = \bar{X} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$$

Nilai $z_{1-\alpha/2}$ adalah nilai z pada pdf distribusi normal standar sedemikian hingga $\text{prob}(Z < z) = 1 - \alpha/2$. Tingkat keyakinan (tingkat kepercayaan) dipilih $1 - \alpha = 90\%$.

Untuk tingkat keyakinan $1 - \alpha = 90\%$, maka $1 - \alpha/2 = 95\%$. Nilai $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95}$ dibaca pada tabel distribusi normal standar. Bacaan tabel menjadi mudah dilakukan dengan cara membuat sketsa pdf distribusi normal. Dari tabel distribusi normal standar, diperoleh:



$$z_{0.95} = 1.6449$$

Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang adalah:

$$l = 31.7 - 1.6449 \frac{2}{\sqrt{11}} = 30.7 \text{ N/mm}^2$$

$$u = 31.7 + 1.6449 \frac{2}{\sqrt{11}} = 32.7 \text{ N/mm}^2$$

Jadi, rentang keyakinan 90% kuat-tekan rerata beton adalah:

$$\text{prob}(30.7 \text{ N/mm}^2 \leq \mu_x \leq 32.7 \text{ N/mm}^2) = 0.90.$$

(c) Uji hipotesis kuat-tekan rerata beton (bobot nilai 20%)

$$H_0: \mu_0 = 33 \text{ N/mm}^2$$

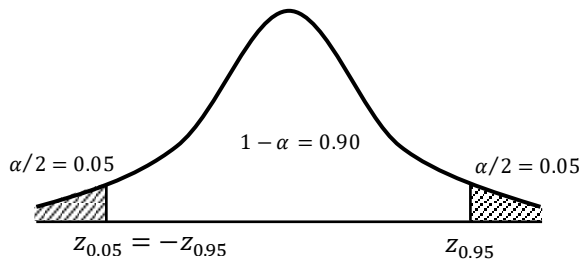
$$H_1: \mu_0 \neq 33 \text{ N/mm}^2$$

Karena varians populasi diketahui, yaitu $\sigma_x^2 = 4 \text{ N}^2/\text{mm}^4$, maka statistika uji adalah:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_x} = \frac{\sqrt{11}}{2}(31.7 - 33) = -2.1860$$

Batas-batas penerimaan atau penolakan statistika uji dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 90\%$ adalah: $z_{\alpha/2} = z_{0.05}$ dan $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95}$.

Dari tabel distribusi normal standar, diperoleh:



$$z_{0.95} = 1.6449 \text{ dan}$$

$$z_{0.05} = -1.6449$$

Dengan demikian, statistika uji $Z = -2.1860$ berada di luar rentang penerimaan hipotesis $H_0 (|Z| < z_{0.95})$, sehingga hipotesis yang menyatakan bahwa kuat-tekan beton adalah 33 N/mm^2 ditolak.

Jawaban yang lebih tepat terhadap pertanyaan uji hipotesis kuat-tekan minimum beton adalah dengan uji hipotesis satu sisi.

$$H_0: \mu_0 > 33 \text{ N/mm}^2$$

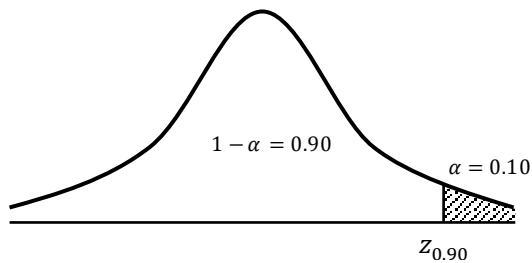
$$H_1: \mu_0 < 33 \text{ N/mm}^2$$

Statistika uji adalah:

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_x} (\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{11}}{2} (31.7 - 33) = -2.1860$$

Batas-batas penerimaan atau penolakan statistika uji dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 90\%$ adalah $z_{1-\alpha} = z_{0.90}$.

Dari tabel distribusi normal standar diperoleh:



$$z_{0.90} = 1.2816.$$

Dengan demikian, statistika uji $Z = -2.1860$ berada di luar rentang penerimaan hipotesis $H_0 (|Z| < z_{0.90})$, sehingga hipotesis yang menyatakan bahwa kuat-tekan beton adalah 33 N/mm^2 ditolak.

Cara lain untuk menjawab uji hipotesis bahwa kuat tekan minimum beton adalah 33 N/mm^2 adalah dengan membuat rentang keyakinan satu sisi nilai rerata kuat tekan beton.

$$\text{prob}(l < \mu_x) = 1 - \alpha \text{ atau } \text{prob}(\mu_x > l) = 1 - \alpha$$

Dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.90$, diperoleh: $l = 31.7 - 1.2816 \frac{2}{\sqrt{11}} = 30.9 \text{ N/mm}^2$

Dengan demikian, nilai kuat tekan minimum 33 N/mm^2 ditolak karena sampel menunjukkan bahwa kuat tekan minimum populasi diperkirakan 30.9 N/mm^2 .

SOAL 2 (CP A-1, A-2, A-3; BOBOT NILAI 50%)

Berdasarkan teori, diketahui bahwa kebutuhan jarak henti suatu kendaraan bermotor merupakan fungsi kecepatan kendaraan tersebut. Untuk membuktikannya, seorang mahasiswa melakukan pengamatan pada tujuh kendaraan bermotor. Hasil pengamatan disajikan dalam tabel di bawah ini.

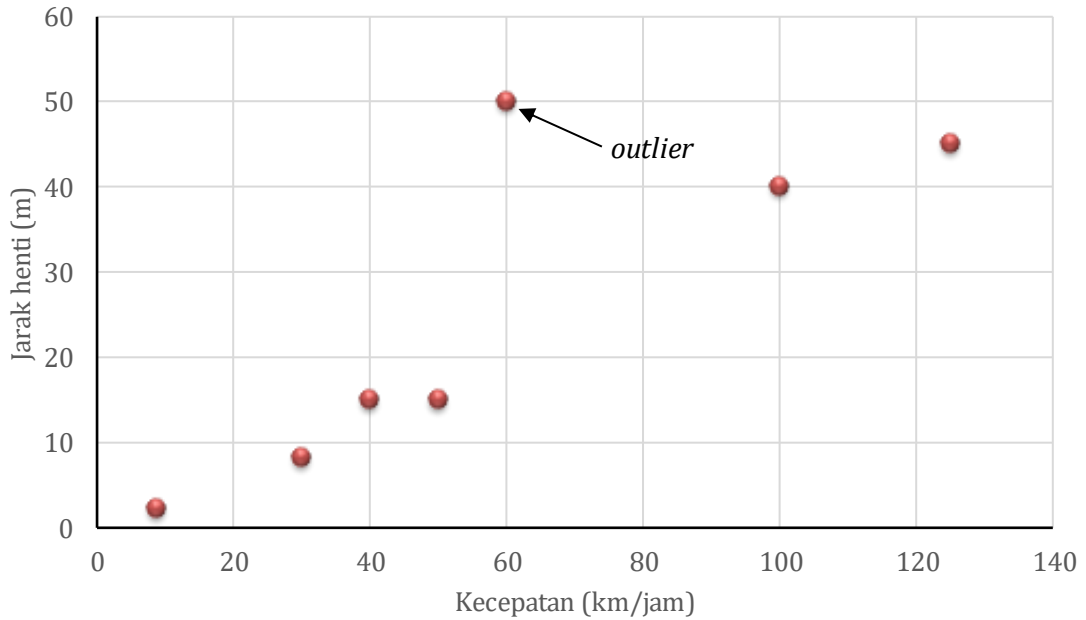
| Nomor kendaraan | Kecepatan (km/jam) | Jarak henti (m) |
|-----------------|--------------------|-----------------|
| 1 | 40 | 15 |
| 2 | 9 | 2 |
| 3 | 100 | 40 |
| 4 | 50 | 15 |
| 5 | 30 | 8 |
| 6 | 125 | 45 |
| 7 | 60 | 50 |

- Gambarkan grafik (*scatter diagram*) yang menunjukkan hasil pengamatan tersebut. (10%).
- Estimasikan kurva regresi linear data di atas dengan metode kuadrat terkecil. (20%).
- Berapakah nilai koefisien determinasi dan koefisien korelasi regresi linear tersebut? (10%).
- Jelaskan arti dan informasi yang dapat Anda peroleh dari kurva regresi di atas. (10%).

PENYELESAIAN

(a) Scatter diagram (bobot nilai 10%)

Menyajikan data dalam bentuk grafik merupakan langkah cerdas untuk membaca pola sebaran data.



(b) Regresi linear (bobot nilai 20%)

Dari gambar tampak bahwa satu pasang data berada di posisi yang menyimpang dari pola data yang lain, yaitu pasangan data ini ketujuh. Pola data secara keseluruhan menunjukkan keteraturan hubungan antara kecepatan kendaraan dan jarak henti. Jarak henti kendaraan berbanding lurus dengan kecepatan kendaraan. Pasangan data ketujuh, yaitu kecepatan kendaraan 60 kilometer per jam dan jarak henti 50 meter, mengubah pola hubungan ini. Data seperti ini dikenal sebagai *outlier*. Adanya *outlier* dapat disebabkan oleh sifat keragaman (variabilitas) sampel atau diakibatkan oleh kesalahan survei. Apabila penyebab *outlier* diketahui, maka perlakuan terhadapnya dapat ditentukan dengan mudah. Misalnya, pada kasus *outlier* yang disebabkan oleh kesalahan pengukuran, maka *outlier* dikeluarkan dari sampel dan tidak diikuti dalam pengolahan data. Sebaliknya, jika survei sudah benar, maka *outlier* tetap diikuti dalam pengolahan data.

Dengan memakai asumsi bahwa *outlier* tersebut disebabkan oleh kesalahan survei, maka *outlier* dikeluarkan dari daftar data yang diolah.

Hubungan antara jarak henti $Y (y_i = y_1, y_2, \dots, y_n)$ dan kecepatan kendaraan $X (x_i = x_1, x_2, \dots, x_n)$ dapat diperoleh dengan teknik regresi metode kuadrat terkecil yang dinyatakan dalam persamaan linear berikut:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X$$

Variabel \hat{Y} atau sering pula disimbolkan dengan Y_r adalah jarak henti sebagai fungsi kecepatan kendaraan X . Nilai a_0 dan a_1 dalam persamaan regresi dicari dengan persamaan berikut:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad \text{dan} \quad a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X}$$

Dalam persamaan di atas, n adalah jumlah data, \bar{Y} dan \bar{X} adalah jarak henti dan kecepatan kendaraan. Untuk menghemat penulisan, indeks operator penjumlahan tidak dituliskan, sehingga $\sum_{i=1}^n x_i$ dituliskan sebagai $\sum x_i$ dan $\sum_{i=1}^n y_i$ dituliskan sebagai $\sum y_i$.

Hitungan regresi linear dengan metode kuadrat terkecil disajikan dalam Tabel 1 di bawah ini.

TABEL 1 HITUNGAN REGRESI LINEAR HUBUNGAN ANTARA JARAK HENTI DAN KECEPATAN KENDARAAN DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL

| x_i | y_i | $x_i y_i$ | x_i^2 |
|------------|------------|--------------|--------------|
| 40 | 15 | 600 | 1600 |
| 9 | 2 | 18 | 81 |
| 100 | 40 | 4000 | 10000 |
| 50 | 15 | 750 | 2500 |
| 30 | 8 | 240 | 900 |
| 125 | 45 | 5625 | 15625 |
| 354 | 125 | 11233 | 30706 |

Dari Tabel 1, diperoleh informasi sebagai berikut:

- jumlah pasang data, $n = 6$;
- kecepatan kendaraan rerata, $\bar{X} = \sum x_i / n = 354 / 6 = 59$ km/jam.
- jarak henti rerata, $\bar{Y} = \sum y_i / n = 125 / 6 = 20.83$ m;

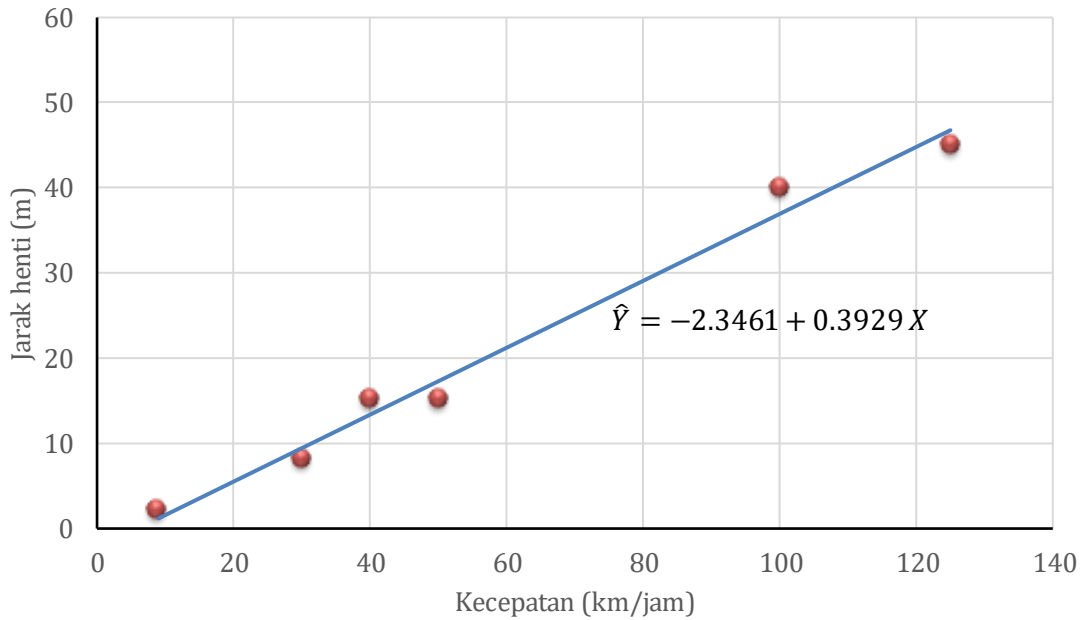
Koefisien a_1 dan a_0 pada persamaan kurva regresi dihitung sebagai berikut:

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{6 \times 11233 - 354 \times 125}{6 \times 30706 - 354^2} = 0.3929 \text{ m.} \frac{\text{jam}}{\text{km}}$$

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X} = 20.8333 - 0.3929 \times 59 = -2.3461 \text{ m.}$$

Perhatikan bahwa koefisien a_0 dan a_1 memiliki satuan. Hubungan antara jarak henti dan kecepatan kendaraan yang diperoleh dari regresi linear antara kedua variabel adalah:

$$\hat{Y} = -2.3461 + 0.3929 X \quad \text{atau} \quad \hat{y}_i = -2.3461 + 0.3929 x_i$$



(c) Koefisien determinasi dan koefisien korelasi (bobot nilai 10%)

Koefisien determinasi, r^2 , dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2 - \sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{Y})^2}$$

Koefisien korelasi, r , dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$r = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2 - \sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{Y})^2}} \quad \text{atau} \quad r = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Dalam persamaan di atas, operator penjumlahan $\sum x_i$ dibaca $\sum_{i=1}^n x_i$ dan indeks $i = 1, 2, \dots, n$.

Hitungan untuk mendapatkan nilai S_t dan nilai S_r dilakukan secara tabulasi dalam Tabel 2 di bawah ini.

TABEL 2 HITUNGAN KOEFISIEN DETERMINASI ANTARA JARAK HENTI DAN KECEPATAN KENDARAAN

| x_i | y_i | $(y_i - \bar{Y})^2$ | \hat{y}_i | $(y_i - \hat{y}_i)^2$ |
|-----------|-----------|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| 40 | 15 | 8.1633 | 13.3688 | 2.6609 |
| 9 | 2 | 251.4490 | 1.1897 | 0.6565 |
| 100 | 40 | 490.3061 | 36.9411 | 9.3570 |
| 50 | 15 | 8.1633 | 17.2975 | 5.2785 |
| 30 | 8 | 97.1633 | 9.4401 | 2.0738 |
| 125 | 45 | 736.7347 | 46.7629 | 3.1077 |
| 60 | 50 | | | |
| | | $S_t = 1591.9796$ | $S_r = 23.1344$ | |

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{1591.9796 - 23.13435}{1591.9796} = 0.9855.$$

Koefisien korelasi adalah akar kuadrat koefisien determinasi. Akar kuadrat dapat bernilai positif atau negatif. Koefisien korelasi dapat bernilai positif atau negatif. Karena gradien kurva regresi, a_1 , bernilai positif, atau dengan kata lain jarak henti bertambah besar seiring dengan pertambahan kecepatan kendaraan, maka koefisien korelasi bernilai positif, $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0.9855} = 0.9927$.

(c) Hubungan linear antara jarak henti dan kecepatan kendaraan (bobot nilai 10%)

Jarak henti dan kecepatan kendaraan menunjukkan hubungan linear yang erat, walau linearitas hubungan antara keduanya tidak sempurna. Nilai koefisien korelasi 0.9927 sangat mendukung simpulan bahwa jarak henti kendaraan berbanding lurus (linear) dengan kecepatan kendaraan; jarak henti kendaraan bertambah besar seiring dengan penambahan kecepatan kendaraan.

-o0o-