

UJIAN AKHIR SEMESTER

Mata kuliah	:	Statistika dan Probabilitas
Hari dan tanggal	:	Selasa, 14 Desember 2021
Waktu	:	13.30 – 15.30
Sifat ujian	:	Buku terbuka (<i>open book</i>)

Mahasiswa dilarang menggunakan piranti lunak *spreadsheet* (Microsoft Excel dan sejenisnya) untuk mengerjakan soal ujian.

SOAL 1 (CP A1, A2, A3; BOBOT NILAI 50%)

Mutu beton suatu pekerjaan gedung yang disyaratkan dalam RKS adalah 28,5 MPa. Hasil pengujian kuat tekan silinder dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tanggal Pengujian	Kuat Tekan (MPa)	Tanggal Pengujian	Kuat Tekan (MPa)
19/07/2021	25	29/07/2021	28
19/07/2021	18	29/07/2021	27
19/07/2021	25	29/07/2021	30
19/07/2021	23	29/07/2021	29
19/07/2021	27	31/07/2021	25
19/07/2021	26	31/07/2021	24
19/07/2021	17	31/07/2021	25
19/07/2021	28	31/07/2021	24
29/07/2021	26	09/08/2021	30
29/07/2021	28	09/08/2021	31
29/07/2021	28	09/08/2021	28
29/07/2021	30	09/08/2021	32

Berdasarkan data hasil pengujian di atas, jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini.

- Berapa nilai rerata dan deviasi standar kuat tekan sampel beton? (10%).
- Dengan menggunakan tingkat kepercayaan 90%, berapa batas atas dan batas bawah nilai kuat tekan beton? (20%).
- Dengan menggunakan tingkat kepercayaan 95%, apakah mutu beton di lapangan memenuhi spesifikasi mutu beton yang ditetapkan dalam RKS? (20%).
- Jika jawaban soal c adalah “tidak memenuhi syarat”, tingkat kepercayaan berapakah untuk dapat menerima klaim bahwa mutu beton di lapangan memenuhi ketentuan RKS? (Bonus 10%)

PENYELESAIAN

a. Nilai rerata dan simpangan baku kuat tekan sampel beton

Notasi X dipakai sebagai variabel kuat tekan sampel beton. Fitur statistika yang ada dalam kalkulator dipakai untuk mendapatkan jumlah sampel, nilai rerata, dan simpangan baku.

Jumlah sampel beton adalah $n = 14$.

Kuat tekan rerata beton adalah $\bar{X} = 26,42$ MPa.

Simpangan baku kuat tekan beton adalah $s_X = 3,62$ MPa.

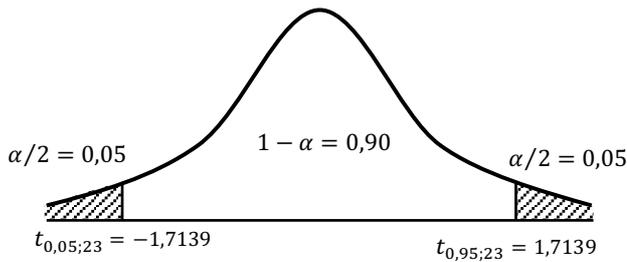
b. Batas atas dan batas bawah kuat tekan beton rerata

Rentang keyakinan kuat tekan beton rerata adalah

$$\text{prob}(l < \mu_x < u) = 1 - \alpha$$

$$u = \bar{X} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2, n-1} \quad \text{dan} \quad l = \bar{X} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2, n-1}$$

Tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95$



Dari tabel distribusi t diperoleh

$$t_{0,95;23} = 1,7139.$$

Batas atas dan batas bawah kuat tekan beton:

$$u = 26,42 + \frac{3,62}{24} \times 1,7139 = 27,68 \text{ MPa.}$$

$$l = 26,42 - \frac{3,62}{24} \times 1,7139 = 25,15 \text{ MPa.}$$

c. Uji hipotesis terhadap kuat tekan beton rerata

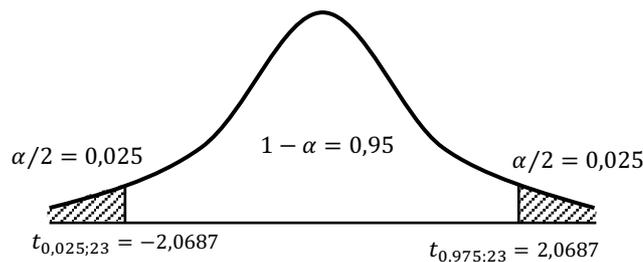
Spesifikasi mutu beton dalam RKS menyatakan bahwa kuat tekan beton 28,5 MPa. Dengan demikian, kuat tekan beton di lapangan haruslah lebih besar daripada atau setidaknya sama dengan 28,5 MPa. Untuk menguji ini, maka dilakukan uji hipotesis kuat tekan beton.

$$H_0: \mu_0 = 28,5 \text{ MPa}$$

$$H_1: \mu_0 \neq 28,5 \text{ MPa}$$

Statistika uji adalah

$$T = \frac{\sqrt{n}}{S_x} (\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{24}}{3,62} (26,42 - 28,5) = -2,8174$$



Batas-batas penerimaan atau penolakan statistika uji dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 95\%$ adalah $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0,025;23}$ dan

$$t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0,975;23}.$$

Dari tabel distribusi t diperoleh:

$$t_{0,975;23} = 2,0687$$

$$t_{0,025;23} = -2,0687$$

Tampak bahwa statistika uji, $T =$

$-2,8174$, berada di luar rentang penerimaan uji hipotesis, $|T| > t_{1-\alpha/2, n-1}$. Dengan demikian, mutu beton di lapangan tidak memenuhi spesifikasi mutu beton dalam RKS.

Jawaban yang lebih tepat terhadap pertanyaan dalam butir soal ini adalah melalui uji hipotesis satu sisi.

$$H_0: \mu_0 > 28,5 \text{ MPa}$$

$$H_1: \mu_0 < 28,5 \text{ MPa}$$

Batas penerimaan untuk tingkat keyakinan 95% adalah $t_{1-\alpha, n-1} = t_{0,95;23}$. Dari tabel distribusi t diperoleh $t_{0,95;23} = 1,7138$. Karena statistika uji, $T = -2,8174$, di luar batas penerimaan uji hipotesis, $|T| > t_{1-\alpha/2, n-1}$, maka uji hipotesis ditolak. Artinya, mutu beton di lapangan tidak memenuhi spesifikasi mutu beton dalam RKS.

d. Tingkat kepercayaan agar mutu beton di lapangan dapat dinyatakan sebagai memenuhi spesifikasi mutu beton dalam RKS

Uji hipotesis dalam soal c akan diterima apabila $|T| < t_{1-\alpha, n-1}$. Di sini, digunakan uji hipotesis satu sisi. Dengan kata lain, nilai terkecil $t_{1-\alpha, n-1}$ adalah $|T| = 2,8174$.

$$t_{1-\alpha, 23} = 2,8174 \rightarrow \text{tabel distribusi t} \rightarrow 1 - \alpha = 0,995.$$

Dengan demikian, tingkat kepercayaan minimum untuk dapat menyatakan bahwa mutu beton di lapangan memenuhi spesifikasi mutu beton dalam RKS adalah 99,5%.

SOAL 2 (CP A1, A2, A3; BOBOT NILAI 50%)

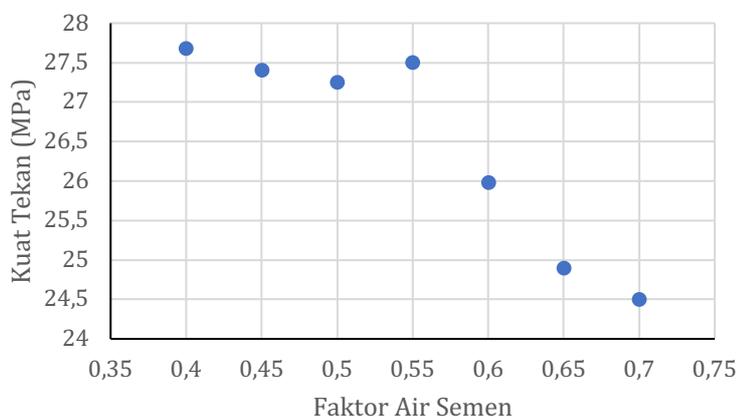
Suatu penelitian telah dilakukan untuk mengetahui hubungan kuat tekan terhadap fas (faktor air semen, rasio total berat air terhadap berat total semen suatu campuran beton). Data hasil penelitian ditampilkan dalam tabel di bawah ini.

Kuat Tekan (MPa)	fas
27,68	0,4
24,9	0,65
27,25	0,5
24,5	0,7
25,98	0,6
27,5	0,55
27,4	0,45

- Gambarkan grafik (scatter diagram) yang menunjukkan hasil pengamatan tersebut. (10%).
- Estimasikan kurva regresi linear data di atas dengan metode kuadrat terkecil. (20%).
- Berapakah nilai koefisien determinasi dan koefisien korelasi regresi linear tersebut? (10%).
- Jelaskan arti dan informasi yang dapat Anda peroleh dari kurva regresi di atas. (10%)

PENYELESAIAN

a. Grafik hubungan antara faktor air semen dan kuat tekan beton



Grafik menampilkan kuat tekan beton sebagai ordinat dan faktor air semen sebagai absis. Ini untuk memudahkan pembacaan data. Kuat tekan beton sebagai variabel bergayur (*dependent variable*) dan faktor air semen sebagai variabel bebas (*independent variable*).

b. Kurva regresi linear

Kurva regresi dituangkan dalam bentuk kuat tekan beton sebagai fungsi faktor air semen. Kurva regresi linear merupakan garis lurus $y_{reg} = a_0 + a_1x$. Variabel y_{reg} adalah kuat tekan beton menurut kurva regresi dalam satuan mega pascal, a_0 adalah titik potong kurva regresi dengan sumbu ordinat dalam satuan mega pascal, a_1 adalah gradien kurva regresi dalam satuan mega pascal, dan x adalah faktor air semen dan tidak bersatuan. Hitungan untuk mendapatkan a_0 dan a_1 dengan metode kuadrat terkecil dituangkan dalam bentuk tabel.

Faktor Air Semen, x	Kuat Tekan, y (MPa)	xy	x^2	y^2
0,4	27,68	11,072	0,16	766,1824
0,65	24,9	16,185	0,4225	620,01
0,5	27,25	13,625	0,25	742,5625
0,7	24,5	17,15	0,49	600,25
0,6	25,98	15,588	0,36	674,9604
0,55	27,5	15,125	0,3025	756,25
0,45	27,4	12,33	0,2025	750,76
3,85	185,21	101,075	2,1875	4910,9753

Jumlah sampel, $n = 7$.

Faktor air semen rerata, $\bar{x} = 3,85/7 = 0,55$.

Kuat tekan rerata, $\bar{Y} = 185,21/7 = 26,46$ MPa.

Simpangan baku kuat tekan

$$\sqrt{((\sum y^2 - n\bar{Y}^2)/(n - 1))} = \sqrt{(4910,9753 - 7 \times 26,46^2)/(7 - 1)} = 1,33 \text{ MPa.}$$

Koefisien persamaan kurva regresi

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{7 \times 101,075 - 3,85 \times 185,21}{7 \times 2,1875 - 3,85^2} = -11,2929 \text{ MPa}$$

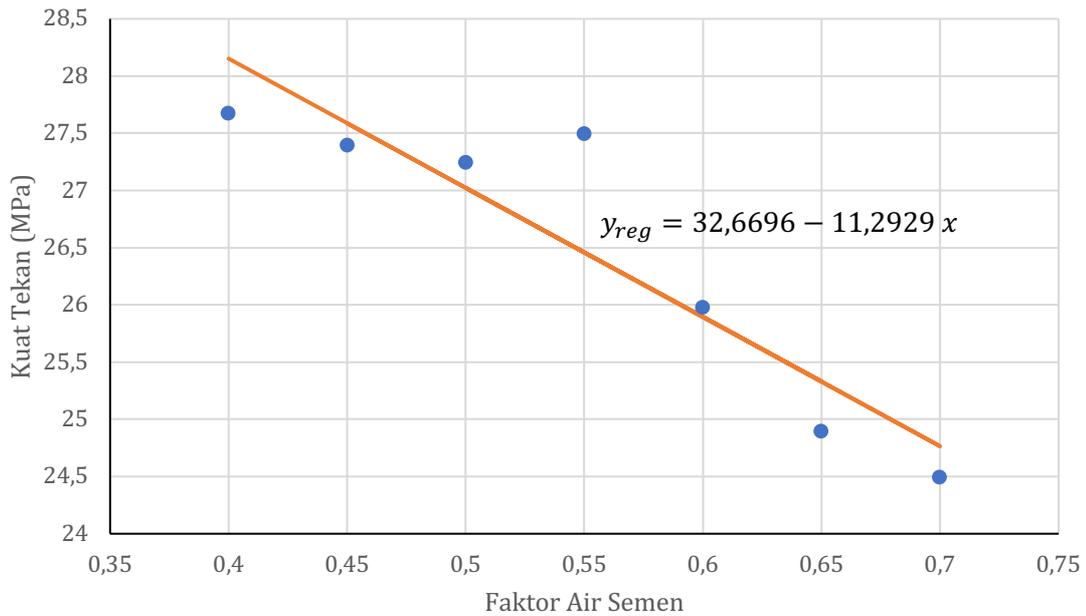
$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{x} = 26,46 + 11,2929 \times 0,55 = 32,6696 \text{ MPa}$$

Persamaan kurva regresi kuat tekan beton sebagai fungsi faktor air semen

$$y_{reg} = 32,6696 - 11,2929 x$$

Untuk menggambarkan kurva regresi, dihitung terlebih dulu nilai-nilai kuat tekan menurut kurva regresi di titik-titik data faktor air semen.

Faktor air semen	Kuat tekan sesuai data (MPa)	Kuat Tekan menurut kurva regresi (MPa)
0,4	27,68	28,15
0,65	24,9	25,33
0,5	27,25	27,02
0,7	24,5	24,76
0,6	25,98	25,89
0,55	27,5	26,46
0,45	27,4	27,59



c. Koefisien determinasi dan koefisien korelasi

Koefisien korelasi

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

$$r = \frac{7 \times 101,075 - 3,85 \times 185,21}{\sqrt{(7 \times 2,1875 - 3,85^2)} - \sqrt{(7 \times 4910,9753 - 185,21^2)}} = -0,92$$

Koefisien determinasi

$$r^2 = -0,92^2 = 0,84$$

d. Informasi dari kurva regresi

Kurva regresi menunjukkan bahwa kuat tekan beton melemah seiring dengan penambahan faktor air semen. Hubungan antara kuat tekan beton dan faktor air semen erat. Korelasi keduanya adalah $-0,92$. Nilai koefisien korelasi negatif mengonfirmasi bahwa penambahan faktor air semen memperlemah kuat tekan beton. Pertambahan faktor air semen menurunkan mutu beton.

-o0o-