Ujian Tengah Semester
Metode Numerik

Senin, 4 April 2022 | Open Book | Tidak Boleh Menggunakan Komputer | 120 menit

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Soal 1: Akar Persamaan (SO A.1, A.2, A.3, bobot 35%)

Konsentrasi polutan dalam air sungai di hilir suatu titik buang limbah cair dituangkan dalam persamaan:

$$C = 10 - 15\left(e^{-0{,}1x} - e^{-0{,}5x}\right)$$

Dalam persamaan di atas, C adalah konsentrasi polutan (ppm) dan x adalah jarak dari titik buang (km). Saudara bertugas untuk memperkirakan jarak, x km, tempat konsentrasi polutan telah turun menjadi $C = 4$ ppm dengan cara hitungan numerik menggunakan dua metode. Silakan Saudara memilih metode hitungan. Buat terlebih dulu kurva konsentrasi polutan terhadap jarak (C vs x) untuk mendapatkan nilai perkiraan awal jarak (x_0). Toleransi selisih nilai jarak adalah 0,1%.

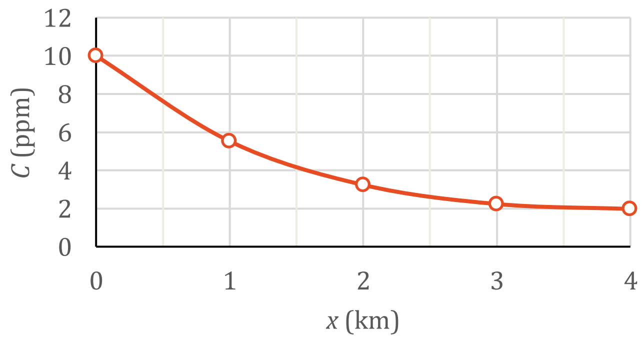
$$\epsilon_i = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| < 0{,}001$$

Penyelesaian

Kurva hubungan konsentrasi polutan dan jarak, C vs x, dibuat dengan cara membuat terlebih dulu tabel beberapa nilai C dan x. Kurva dibuat sedemikian hingga nilai $C =$ 4 ppm ada dalam kurva.

$C = 10 - 15\left(e^{-0{,}1x} - e^{-0{,}5x}\right)$

x (km)	C (ppm)
0	10
1	5,5254
2	3,2372
3	2,2347
4	1,9752



Kurva menunjukkan bahwa $C = 4$ ppm berada di dekat $x = 1{,}5$ km. Untuk nilai $C =$ 4 ppm, persamaan konsentrasi polutan menjadi:

$15\left(e^{-0{,}1x} - e^{-0{,}5x}\right) - 6 = 0$

Metode-metode hitungan yang cocok untuk mendapatkan nilai x dari persamaan konsentrasi polutan di atas adalah *bisection*, Newton-Raphson, dan *secant.*

Metode *Bisection*

$f(x) = 15\left(e^{-0{,}1x} - e^{-0{,}5x}\right) - 6 = 0$

i	x_i	$f(x)$	$\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$	Δx_i	ϵ_i
0	1,5	-0,1749	---	---	---
1	2	0,7628	1,75	0,5	25,00%

2	1,75	0,3389	1,625	0,25	14,29%
3	1,625	0,0940	1,5625	0,125	7,69%
4	1,5625	-0,0373	1,5938	0,0625	4,00%
5	1,5938	0,0291	1,5781	-0,0313	-1,96%
6	1,5781	-0,0039	1,5859	0,0156	0,99%
7	1,5859	0,0127	1,5820	-0,0078	-0,49%
8	1,5820	0,0044	1,5801	0,0039	0,25%
9	1,5801	0,0002	1,5791	0,0020	0,12%
10	1,5791	-0,0018	1,5796	0,0010	0,06%

Metode Newton-Raphson

$f(x) = 15(e^{-0,1x} - e^{-0,5x}) - 6$

$f'(x) = 15(-0,1e^{-0,1x} + 0,5e^{-0,5x})$

$x_{i+1} = x_i - f(x)/f'(x)$

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	x_{i+1}	Δx_i	ϵ_i
0	1,5	-0,1749	2,2517	1,5777	---	---
1	1,5777	-0,0049	2,1267	1,5800	0,0777	4,9%
2	1,5800	-4,2E-06	2,1231	1,5800	0,0023	0,1%

Metode *Secant*

$f(x) = 15(e^{-0,1x} - e^{-0,5x}) - 6$

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$x_{i+1} = x_i - f(x)/f'(x)$

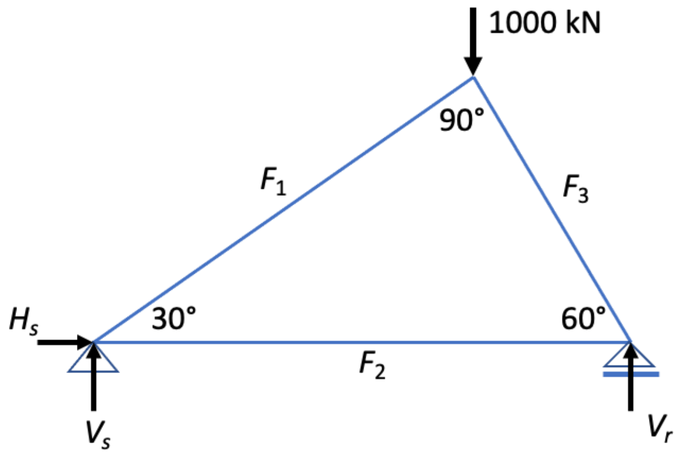
i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	x_{i+1}	Δx_i	ϵ_i
0	1,5	-0,1749	---	---	---	---
1	2	0,7628	1,8753	1,5932	0,5	25,0%
2	1,5933	0,0281	1,8063	1,5777	0,4067	25,5%
3	1,5777	-0,0048	2,1145	1,5800	0,0155	1,0%
4	1,5800	2,36E-05	2,1249	1,5800	0,0023	0,1%
5	1,5800	1,97E-08	2,1231	1,5800	1,11E-05	0,0%

Ketiga metode memberikan hasil yang sama, yaitu konsentrasi polutan turun menjadi 4 ppm di jarak 1,58 km dari titik buang limbah cair. Metode Newton-Raphson konvergen paling cepat dan metode *bisection* konvergen membutuhkan iterasi paling banyak untuk konvergen.

Soal 2: Sistem Persamaan Linear (SO A.1, A.2, A.3, bobot 35%)

Hitunglah reaksi tumpuan serta gaya-gaya batang struktur kuda-kuda pada gambar di bawah ini menggunakan **metode Gauss-Jordan** untuk semua variabel yang tidak diketahui.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

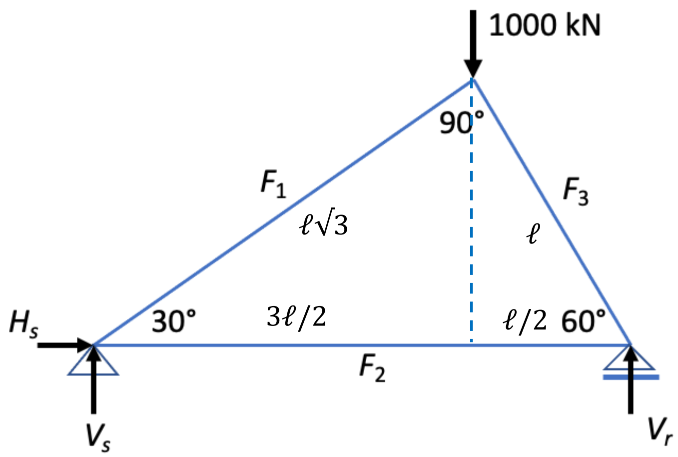


PENYELESAIAN

Variabel-variabel yang harus ditemukan adalah gaya-gaya reaksi tumpuan, H_s, V_s, dan V_r, dan gaya-gaya batang, F_1, F_2, dan F_3. Untuk menemukan keenam gaya ini, maka dibutuhkan enam persamaan. Gaya-gaya reaksi tumpuan diperoleh dari keseimbangan momen putar di titik tumpu, dan keseimbangan gaya beban dan reaksi tumpuan arah vertikal dan arah horizontal. Gaya-gaya batang diperoleh dari *free-body diagram* di setiap titik sudut struktur.

Keseimbangan momen putar di tumpuan.

Momen adalah perkalian antara gaya dan lengan (jarak antara gaya ke titik putar). Jarak gaya ke titik putar, yaitu di tumpuan, perlu dihitung terlebih dulu. Jika panjang batang #3 adalah ℓ, maka panjang batang #2 adalah 2ℓ dan panjang batang #1 adalah $\ell\sqrt{3}$. Dengan bantuan segitiga siku-siku tambahan (lihat sketsa di bawah ini), maka panjang lengan gaya beban ke tumpuan sendi adalah $3\ell/2$ dan panjang lengan gaya beban ke tumpuan *roll* adalah $\ell/2$.



$$\sum M_r = 0 \qquad 0H_s + 2\ell V_s + 0V_r - \ell/2 \times 1000 = 0$$

$$V_s = \frac{\ell \times 1000}{2 \times 2\ell}$$

$$V_s = 250 \text{ kN} \tag{1}$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

$$\sum M_s = 0 \qquad 0H_s + 0V_s - 2\ell V_r + 3\ell/2 \times 1000 = 0$$

$$V_r = \frac{3\ell \times 1000}{2 \times 2\ell}$$

$$V_r = 750 \text{ kN} \tag{2}$$

Keseimbangan gaya beban dan reaksi tumpuan arah horizontal dan vertikal.

$$\sum F_h = 0 \qquad H_s = 0 \text{ kN} \tag{3}$$

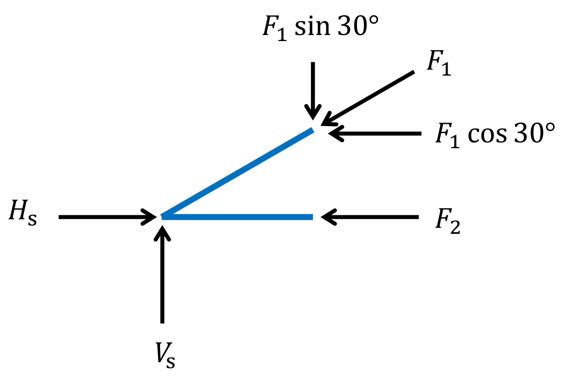
$$\sum F_v = 0 \qquad V_s + V_r = 1000$$

$$250 + 750 = 1000 \qquad \text{Checked}$$

Keseimbangan gaya-gaya reaksi tumpuan tidak memberikan sistem persamaan linear. Setiap persamaan hanya mangandung satu variabel yang tidak diketahui sehingga penyelesaiannya dapat langsung diperoleh.

Free-body diagrams.

Untuk mendapatkan gaya-gaya batang F_1, F_2, dan F_3, ditinjau *free-body diagram* di tumpuan sendi dan di titik sudut puncak struktur.



Keseimbangan gaya-gaya arah horizontal di tumpuan sendi:

$$\sum F_h = 0$$

$$H_s - F_1 \cos 30° - F_2 = 0$$

$$0 - \tfrac{1}{2} F_1 \sqrt{3} - F_2 = 0$$

$$\tfrac{1}{2} F_1 \sqrt{3} + F_2 = 0 \tag{4}$$

Keseimbangan gaya-gaya arah vertikal di tumpuan sendi:

$$\sum F_v = 0$$

$$V_s - F_1 \sin 30° = 0$$

Gaya reaksi tumpuan sendi arah vertikal telah didapatkan, yaitu dalam persamaan (1), sehingga:

$$250 - F_1 \times \tfrac{1}{2} = 0$$

$$F_1 = 500 \text{ kN} \tag{5}$$

Substitusi $F_1 = 500$ kN ke persamaan (4) akan mendapatkan gaya batang F_2:

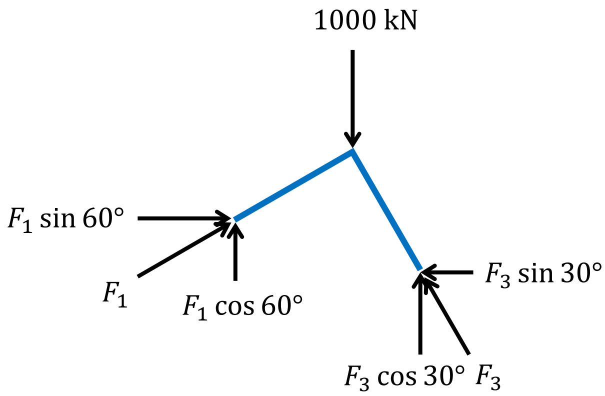
$$\tfrac{1}{2} F_1 \sqrt{3} + F_2 = 0 \Longrightarrow \tfrac{1}{2} \times 500\sqrt{3} + F_2 = 0$$

$$F_2 = -250\sqrt{3} \text{ kN}$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Karena F_2 bernilai negatif, maka arah gaya F_2 adalah ke kanan. Ini berarti batang #2 adalah batang tarik.

Keseimbangan gaya-gaya arah horizontal di sudut puncak struktur:



$$\sum F_h = 0$$

$$F_1 \sin 60° - F_3 \sin 30° = 0$$

$$\tfrac{1}{2}F_1\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}F_3 = 0$$

$$F_1\sqrt{3} - F_3 = 0 \tag{6}$$

Dengan memasukkan nilai F_1 dari persamaan (5) ke persamaan (6) di atas, maka nilai gaya batang F_3 adalah:

$$F_3 = F_1\sqrt{3}$$

$$F_3 = 500\sqrt{3}\ \text{kN}$$

Tampak bahwa keseimbangan gaya-gaya batang dalam *free-body diagram* menghasilkan persamaan yang penyelesaiannya dapat langsung diperoleh melalui subtitusi sederhana. Apabila dituliskan dalam sistem persamaan linear, persamaan ketiga gaya batang adalah:

$$\tfrac{1}{2}F_1\sqrt{3} + F_2 = 0 \tag{4}$$

$$F_1 + 0F_2 + 0F_3 = 500 \tag{5}$$

$$F_1\sqrt{3} + 0F_2 - F_3 = 0 \tag{6}$$

Apabila menggunakan penyelesaian sistem persamaan linear **metode Gauss-Jordan**, maka urutan persamaan diubah menjadi (5), (4), (6).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & -250\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -1 & -500\sqrt{3} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & -250\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 500\sqrt{3} \end{array}\right]$$

Hasil hitungan gaya-gaya batang dengan menggunakan metode Gauss-Jordan sama persis dengan hasil hitungan sebelumnya.

Paragraf di bawah ini merangkum hasil hitungan gaya-gaya reaksi tumpuan dan gaya-gaya batang.

Gaya reaksi tumpuan sendi:

$$H_s = 0\ \text{kN},\ V_s = 250\ \text{kN}$$

Gaya reaksi tumpuan *roll*:

$$V_r = 750\ \text{kN}$$

Gaya batang:

$F_1 = 500$ kN (batang #1 adalah batang desak)

$F_2 = 250\sqrt{3}$ kN (batang #2 adalah batang tarik)

$F_3 = 500\sqrt{3}$ kN (batang #3 adalah batang desak)

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

SOAL 3: REGRESI (SO A.1, A.2 BOBOT 30%)

Diketahui persamaan umum posisi gerak lurus berubah beraturan

$$x(t) = x_0 + v_o t + 0{,}5at^2$$

dengan x adalah posisi (m), t adalah waktu (s), x_0 adalah posisi awal (m), v_o adalah kecepatan awal (m/s), dan a adalah percepatan (m/s²).

Tentukan persamaan gerak lurus berubah beraturan yang mewakili data pengukuran posisi terhadap waktu (x vs t) sebagai berikut ini.

t (s)	0	1	2	3	4	5
x (m)	5	10	16	22	34	44

PENYELESAIAN

Persamaan posisi gerak lurus berubah beraturan merupakan persamaan polinomial orde dua. Persamaan regresi polinomial orde dua yang menghubungkan posisi x sebagai fungsi waktu t adalah:

$$x_{reg} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + e$$

Regresi polinomial orde dua bertugas untuk menemukan koefisien-koefisien $a_0 = x_0$, $a_1 = v_0$, dan $a_1 = 0{,}5a$. Metode kuadrat terkecil, yaitu meminimumkan jumlah selisih kuadrat nilai yang diperoleh dari regresi terhadap nilai data, $\min[\Sigma {e_i}^2]$, merupakan salah satu cara hitung untuk memperoleh nilai ketiga koefisien ini. Metode kuadrat terkecil menelorkan persamaan di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma t_i & \Sigma {t_i}^2 \\ \Sigma t_i & \Sigma t^2 & \Sigma {t_i}^3 \\ \Sigma {t_i}^2 & \Sigma {t_i}^3 & \Sigma {t_i}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma x_i \\ \Sigma t_i x_i \\ \Sigma {t_i}^2 x_i \end{Bmatrix}$$

Nilai-nilai koefisien matriks di sebelah kiri kesamaan dan konstanta di sebelah kanan kesamaan diperoleh dari data. Hitungan dilakukan dengan cara tabulasi di bawah ini.

t (s)	x (m)	t^2 (s²)	t^3 (s³)	t^4 (s⁴)	tx (sm)	t^2x (s²m)
0	5	0	0	0	0	0
1	10	1	1	1	10	10
2	16	4	8	16	32	64
3	22	9	27	81	66	198
4	34	16	64	256	136	544
5	44	25	125	625	220	1100
15	**131**	**55**	**225**	**979**	**464**	**1916**

Jumlah data, $n = 6$.

Tiga persamaan linear untuk memperoleh nilai koefisien-koefisien persamaan regresi polinomial orde dua, dengan demikian, adalah:

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 131 \quad (1)$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 464 \quad (2')$$

$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 1916 \quad (3'')$$

Ketiga persamaan di atas dapat pula dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 131 \\ 464 \\ 1916 \end{Bmatrix}$$

Ada beberapa cara hitung untuk menyelesaikan tiga persamaan di atas, antara lain cara grafis, Cramer, eliminasi, eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, matriks inversi, atau cara hitung iteratif seperti Jacobi, Gauss-Seidel, atau SOR.

Eliminasi Gauss

Eliminasi a_0 dalam persamaan 2 dan 3 menggunakan persamaan 1 sebagai *pivot*.

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 131 \quad (1)$$

$$0a_0 + 17{,}5a_1 + 87{,}5a_2 = 136{,}5 \quad (2')$$

$$0a_0 + 87{,}5a_1 + 474{,}8333a_2 = 715{,}1667 \quad (3'')$$

Eliminasi a_1 dalam persamaan 3’ menggunakan persamaan 2’ sebagai *pivot*.

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 131 \quad (1)$$

$$0a_0 + 17{,}5a_1 + 87{,}5a_2 = 136{,}5 \quad (2')$$

$$0a_0 + 0a_1 + 37{,}3333a_2 = 32{,}6667 \quad (3'')$$

Subtitusi ke belakang.

$$a_2 = 32{,}6667/37{,}3333 = 0{,}875 \quad (3'')$$

$$a_1 = (136{,}5 - 87{,}5 \times 0{,}875)/17{,}5 = 3{,}425 \quad (2')$$

$$a_0 = (131 - 15 \times 3{,}425 - 55 \times 0{,}875)/6 = 5{,}25 \quad (1)$$

Matriks inversi

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 131 \\ 464 \\ 1916 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 131 \\ 464 \\ 1916 \end{Bmatrix}$$

Langkah hitung untuk mendapatkan matriks inversi:

1. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 15 & 55 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 55 & 225 & 0 & 1 & 0 \\ 55 & 225 & 979 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6/6 & 15/6 & 55/6 & 1/6 & 0/6 & 0/6 \\ 15 & 55 & 225 & 0 & 1 & 0 \\ 55 & 225 & 979 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$
2. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2{,}5 & 9{,}1667 & 0{,}1667 & 0 & 0 \\ 15 & 55 & 225 & 0 & 1 & 0 \\ 55 & 225 & 979 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$
3. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2{,}5 & 9{,}1667 & 0{,}1667 & 0 & 0 \\ 0 & 17{,}5 & 87{,}5 & -2{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 87{,}5 & 474{,}8333 & -9{,}1667 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$
4. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2{,}5 & 9{,}1667 & 0{,}1667 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -0{,}1429 & 0{,}0571 & 0 \\ 0 & 87{,}5 & 474{,}8333 & -9{,}1667 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$
5. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3{,}3333 & 0{,}5238 & -0{,}1429 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -0{,}1429 & 0{,}0571 & 0 \\ 0 & 0 & 37{,}3333 & 3{,}3333 & -5 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$
6. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3{,}3333 & 0{,}5238 & -0{,}1429 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -0{,}1429 & 0{,}0571 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0893 & -0{,}1339 & 0{,}0268 \end{array}\right] \Rightarrow$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

7. $\left[\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}0{,}8214 & -0{,}5893 & 0{,}0893\\ -0{,}5893 & 0{,}7268 & -0{,}1339\\ 0{,}0893 & -0{,}1339 & 0{,}0268\end{matrix}\right]$

Nilai koefisien persamaan regresi polinomial orde dua adalah:

$$\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 15 & 55\\ 15 & 55 & 225\\ 55 & 225 & 979\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}131\\ 464\\ 1916\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}8214 & -0{,}5893 & 0{,}0893\\ -0{,}5893 & 0{,}7268 & -0{,}1339\\ 0{,}0893 & -0{,}1339 & 0{,}0268\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}131\\ 464\\ 1916\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}5{,}25\\ 3{,}425\\ 0{,}875\end{Bmatrix}$$

Dengan demikian, nilai parameter gerak lurus berubah peraturan adalah:

posisi awal, $x_0 = a_0 = 5{,}25$ m,

kecepatan awal, $v_0 = a_1 = 3{,}425$ m/s,

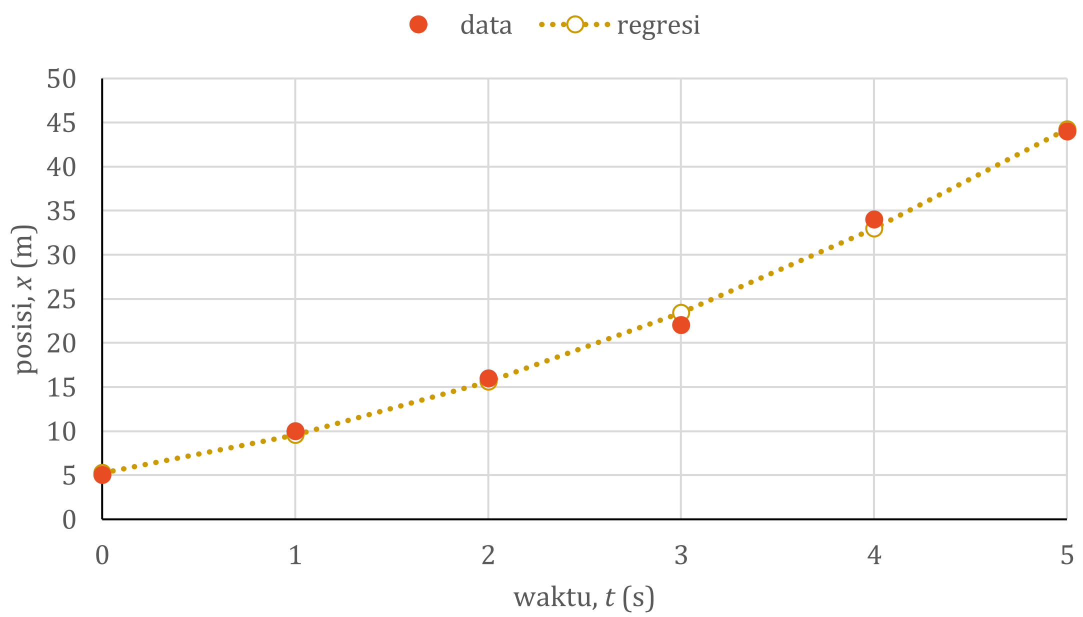
percepatan, $0{,}5a = a_2 = 0{,}875 \Longrightarrow a = 1{,}75$ m/s².

Persamaan regresi polinomial orde dua, dengan demikian, adalah:

$$x_{reg} = 5{,}25 + 3{,}425t + 0{,}875t^2$$

Tabel dan gambar di bawah ini memberikan perbandingan nilai posisi sebagai fungsi waktu antara data sampel dan estimasi menurut regresi polinomial orde dua.

t (s)	x (m)	x_{reg} (m)	e^2 (m²)
0	5	5,25	0,0625
1	10	9,55	0,2025
2	16	15,6	0,16
3	22	23,4	1,96
4	34	32,95	1,1025
5	44	44,25	0,0625
	131		**3,55**



-o0o-

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id