

UJIAN TENGAH SEMESTER

METODE NUMERIK

SENIN, 12 APRIL 2023 | OPEN BOOK | TIDAK BOLEH MENGGUNAKAN KOMPUTER | 120 MENIT

SOAL 1: AKAR PERSAMAAN (SO A.1, A.2, A.3; BOBOT 1/3)

Suatu pipa halus berdiameter $D = 20$ cm mengalirkan air berkecepatan $V = 2,5$ m/s. Viskositas kinematik air adalah $\nu = 2 \times 10^{-6}$ m²/s. Hitunglah nilai koefisien gesek pipa f menggunakan persamaan von Karman

$$g(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log \left(\frac{Re\sqrt{f}}{2,51} \right); \quad g(f) \sim 0$$

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

Gunakan salah satu metode hitungan, interpolasi linear atau metode secant, untuk mendapatkan solusi akar persamaan tersebut. Berikan nilai awal f dalam rentang $0,01 \leq f \leq 0,03$. Gunakan toleransi kesalahan hitung $g(f) \leq 10^{-4}$.

PENYELESAIAN

Persamaan koefisien gesek pipa dituliskan dalam bentuk persamaan berikut.

$$g(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log \left(\frac{Re\sqrt{f}}{2,51} \right) \cong 0$$

Metode interpolasi linear

Metode interpolasi linear untuk menyelesaikan persamaan aljabar dikenal pula sebagai *the false-position method*. Ini merupakan metode bisection dengan perbaikan, yaitu penetapan titik tengah yang menggunakan bobot jarak titik kiri dan kanan terhadap titik potong gradien garis singgung dengan sumbu absis. Berawal dari dua nilai f_l dan f_u yang memiliki nilai $g(f_l) \times g(f_u) < 0$, "nilai tengah", f_r , sebagai nilai estimasi f yang baru adalah

$$f_r = f_u - \frac{f_l - f_u}{g(f_l) - g(f_u)} g(f_u)$$

Hitungan dilakukan secara iteratif dengan memakai subskrip i untuk menunjukkan nomor iterasi, $f_{i+1} = f_r$ (nilai estimasi f baru), $f_i = f_u$ (nilai f lama atau saat ini), dan f_l adalah nilai f awal atau nilai f_{i-1} atau nilai f iterasi sebelum iterasi i yang lain yang memiliki nilai $g(f_l) \times g(f_i) < 0$. Persamaan kerja hitungan akar persamaan metode interpolasi linear, dengan demikian, dapat pula dituliskan sebagai berikut.

$$f_{i+1} = f_i - \frac{f_l - f_i}{g(f_l) - g(f_i)} g(f_i)$$

Dalam melakukan hitungan, perlu diperhatikan satuan setiap variabel. Diameter pipa bersatuan centimeter. Satuan diameter pipa perlu diubah menjadi meter agar seirama dengan satuan kecepatan aliran (m/s) dan satuan kekentalan kinematik air (m²/s). Angka Reynolds aliran, dengan demikian, adalah

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2,5 \times 20/100}{2 \times 10^{-6}} = 0,25 \times 10^6 = 250.000$$

Hitungan akar persamaan disajikan dalam bentuk tabel di bawah ini.

iterasi i	f_i	$g(f_i)$	$\frac{f_i - f_i}{g(f_i) - g(f_i)}$	$f_{i+1} = f_r$	Δf_i
0	0,01	2,0035			
1	0,03	-2,7002	-0,0043	0,0185	0,01148
2	0,0185	-0,9157	-0,0029	0,0158	0,00267
3	0,0158	-0,2526	-0,0026	0,0152	0,00065
4	0,0152	-0,0649	-0,0025	0,0150	0,00016
5	0,0150	-0,0164	-0,0025	0,0150	0,00004

Dengan demikian, nilai koefisien gesekan pipa adalah $f = 0,015$.

Metode secant

Akar persamaan von Karman, yaitu nilai koefisien gesek pipa, adalah

$$f_{i+1} = f_i - \frac{g(f_i)}{g'(f_i)}$$

$$g'(f_i) = \frac{g(f_{i-1}) - g(f_i)}{f_{i-1} - f_i}$$

Subskrip i dalam persamaan di atas menunjukkan nomor urut iterasi hitungan dalam metode secant. Angka Reynolds aliran telah dihitung, yaitu $Re = 250.000$.

Hitungan akar persamaan dituangkan dalam tabel di bawah ini.

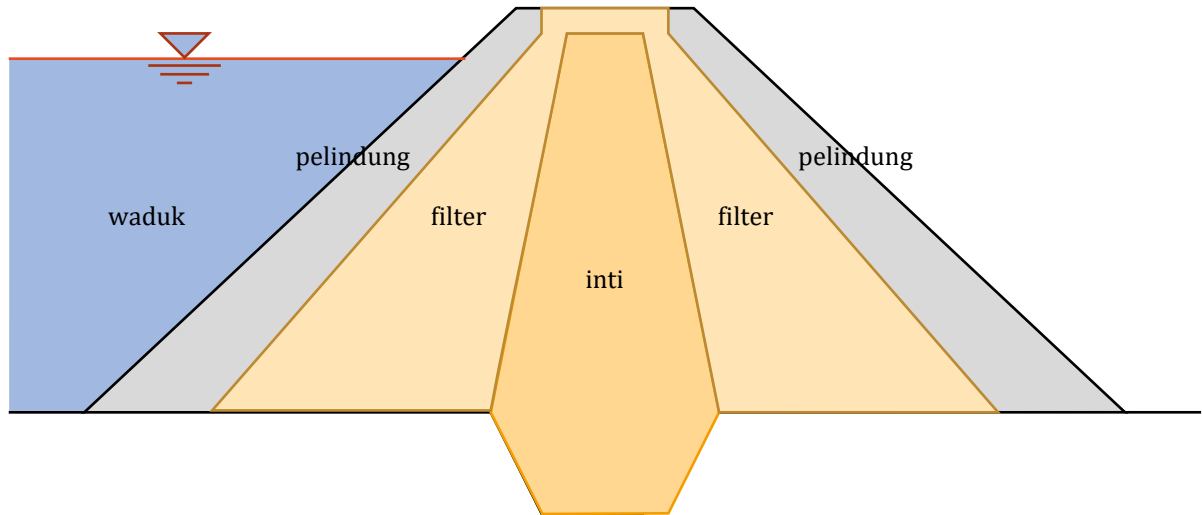
iterasi i	f_i	$g(f_i)$	$g'(f_i)$	f_{i+1}	Δf_i
0	0,01	2,0035			
1	0,03	-2,7002	-235,1809	0,0185	0,01148
2	0,0185	-0,9157	-155,4208	0,0126	0,00589
3	0,0126	0,8014	-291,4375	0,0154	0,00275
4	0,0154	-0,1191	-334,7340	0,0150	0,00036
5	0,0150	-0,0140	-295,4403	0,0150	0,00005

Dengan demikian, nilai koefisien gesekan pipa adalah $f = 0,015$.

SOAL 2: SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SO A.1, A.2, A.3; BOBOT 1/3)

Struktur bendungan tipe urugan tanah (*earthfill dam*) atau urugan batu (*rockfill dam*) lazimnya dibentuk oleh tiga zona, yaitu zona inti kedap air, zona filter, dan zona pelindung. Suatu proyek pembangunan bendungan tipe urugan membutuhkan material urugan sejumlah 120 ribu meter kubik tanah liat (*clay*) untuk zona inti, 240 ribu meter kubik tanah lanau (*silt*) untuk zona filter, dan 90 ribu meter kubik campuran pasir kasar dan kerikil (*coarse sand and gravel*) untuk zona pelindung. Material ini didatangkan dari tiga lokasi sumber material (*borrow areas*) yang masing-masing mengandung deposit material bendungan dengan komposisi seperti disajikan dalam tabel berikut.

Lokasi	Tanah liat (%)	Tanah lanau (%)	Pasir kasar dan kerikil (%)
Lokasi #1	40	45	15
Lokasi #2	20	60	20
Lokasi #3	30	45	25



Gunakan metode eliminasi Gauss untuk mengetahui volume material (dalam satuan ribu m^3) yang harus diambil dari masing-masing lokasi sumber material.

PENYELESAIAN

Misal, volume material, dalam satuan ribu meter kubik, yang diambil dari lokasi #1, lokasi #2, dan lokasi #3 dinyatakan sebagai variabel x_1 , x_2 , dan x_3 . Dengan demikian, volume setiap jenis material yang diambil dari ketiga lokasi dapat dinyatakan dalam persamaan linear berikut.

Tanah liat

$$0,40x_1 + 0,20x_2 + 0,30x_3 = 120$$

Tanah lanau

$$0,45x_1 + 0,60x_2 + 0,45x_3 = 240$$

Pasir kasar dan kerikil

$$0,15x_1 + 0,20x_2 + 0,25x_3 = 90$$

Langkah penyelesaian ketiga persamaan di atas dengan metode eliminasi Gauss disajikan dalam paragraf-paragraf di bawah ini.

Sistem persamaan linear

	Lokasi #1	Lokasi #2	Lokasi #3	Volume
	x_1	x_2	x_3	c
Tanah liat (1)	: 0,40	+ 0,20	+ 0,30	= 120
Tanah lanau (2)	: 0,45	+ 0,60	+ 0,45	= 240
Pasir kasar dan kerikil (3)	: 0,15	+ 0,20	+ 0,25	= 90

Forward elimination (1)

	Lokasi #1		Lokasi #2		Lokasi #3		Volume
	x_1		x_2		x_3		c
Pers. (1)	: 0,40	+	0,20	+	0,30	=	120
Pers. (2')	: 0	+	0,375	+	0,1125	=	105
Pers. (3')	: 0	+	0,125	+	0,1375	=	45

Forward elimination (2)

	Lokasi #1		Lokasi #2		Lokasi #3		Volume
	x_1		x_2		x_3		c
Pers. (1)	: 0,40	+	0,20	+	0,30	=	120
Pers. (2')	: 0	+	0,375	+	0,1125	=	105
Pers. (3'')	: 0	+	0	+	0,1	=	10

Backward substitution

$$\begin{aligned} \text{Pers. (3'')} &: & x_3 &= 10/0,1 = 100 \\ \text{Pers. (2')} &: & x_2 &= (105 - 0,1125 \times 100)/0,375 = 250 \\ \text{Pers. (1)} &: & x_3 &= (0,20 \times 250 - 0,30 \times 100)/0,40 = 100 \end{aligned}$$

		Volume material
Pers. (3'')	: Lokasi #3	= 100 ribu m ³
Pers. (2')	: Lokasi #2	= 250 ribu m ³
Pers. (1)	: Lokasi #1	= 100 ribu m ³

Dengan demikian, volume material yang diambil dari Lokasi #1 adalah 100 ribu meter kubik, dari Lokasi #2 250 ribu meter kubik, dan dari Lokasi #3 100 ribu meter kubik. Jumlah material yang diambil dari ketiga lokasi adalah $(100 + 250 + 100) = 450$ ribu meter kubik. Jumlah ini sama dengan jumlah tanah liat, tanah lanau, pasir kasar dan kerikil yang dinyatakan dalam soal, yaitu $(120 + 240 + 90) = 450$ ribu meter kubik.

SOAL 3: REGRESI (SO A.1, A.2; BOBOT 1/3)

Dalam reaksi kimia, laju reaksi adalah perubahan konsentrasi suatu senyawa/produk terhadap perubahan waktu. Laju reaksi ditentukan oleh konstanta laju reaksi dan orde reaksi yang mengikuti persamaan

$$r_A = kC_A^n$$

Dalam persamaan di atas, r_A adalah laju reaksi zat A ($\text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}$), C_A adalah konsentrasi zat A (mol L^{-1}), k adalah konstanta laju reaksi ($\text{mol}^{1-n} \text{L}^{n-1} \text{s}^{-1}$), dan n adalah orde reaksi (-). Orde reaksi dan konstanta laju reaksi diperoleh dari hasil eksperimen yang disajikan dalam tabel berikut. Dengan menggunakan analisis regresi, tentukan persamaan laju reaksi kimia yang mewakili hasil eksperimen.

C_A (mol L^{-1})	4,00	2,25	1,45	1,00	0,65	0,25	0,05
r_A ($\text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}$)	0,40	0,30	0,25	0,22	0,15	0,08	0,05

PENYELESAIAN

Bentuk persamaan laju reaksi kimia menunjukkan persamaan non-linear. Persamaan ini perlu ditransformasikan menjadi persamaan linear dengan cara transformasi koordinat sebagai berikut.

$$\log r_A = \log(kC_A^n) = \log k + n \log C_A$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai persamaan garis lurus (persamaan linear) dalam koordinat $x = \log C_A$, $y = \log r_A$, dengan konstanta $a_0 = \log k$, dan $a_1 = n$.

$$y = a_0 + a_1x$$

Nilai konstanta a_0 dan a_1 dapat diperoleh dengan melakukan regresi linear terhadap tujuh titik data yang diberikan dalam soal. Langkah hitungan disajikan dalam bentuk tabel di bawah ini.

C_A (mol/L)	r_A (mol/L/s)	$x = \log C_A$	$y = \log r_A$	xy	x^2
4	0,4	0,6021	-0,3979	-0,2396	0,3625
2,25	0,3	0,3522	-0,5229	-0,1841	0,1240
1,45	0,25	0,1614	-0,6021	-0,0972	0,0260
1	0,22	0,0000	-0,6576	0,0000	0,0000
0,65	0,15	-0,1871	-0,8239	0,1541	0,0350
0,25	0,08	-0,6021	-1,0969	0,6604	0,3625
0,05	0,05	-1,3010	-1,3010	1,6927	1,6927
		-0,9746	-5,4023	1,9863	2,6027

Dari hitungan di atas, diperoleh:

- jumlah titik data, $m = 7$,
- nilai rerata x , $\bar{x} = -0,1392$ mol/L, dan
- nilai rerata y , $\bar{y} = -0,7717$ mol/L/s.

Selanjutnya, nilai konstanta a_1 dan a_0 dapat dihitung.

$$a_1 = \frac{m \sum xy - \sum x \sum y}{m \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a_1 = \frac{7 \times 1,9863 - (-0,9746) \times (-5,4023)}{7 \times 2,6027 - (-0,9746)^2} = 0,5003$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

$$a_0 = -0,7717 - 0,5003 \times (-0,1392) = -0,7021$$

Nilai konstanta orde reaksi, n , dan laju reaksi, k , dapat diperoleh dari nilai a_1 dan a_0 di atas.

$$n = a_1 = 0,5003 \cong 0,5$$

$$\log k = a_0 = -0,7021 \Rightarrow k = 10^{-0,7021} = 0,1986 \cong 0,2 \text{ mol}^{0,5}/(\text{L}^{0,5}\text{s})$$

Dengan demikian, persamaan laju reaksi kimia yang diperoleh dari regresi terhadap tujuh pasang data (r_A, C_A) adalah

$$r_A = 0,2C_A^{0,5}$$

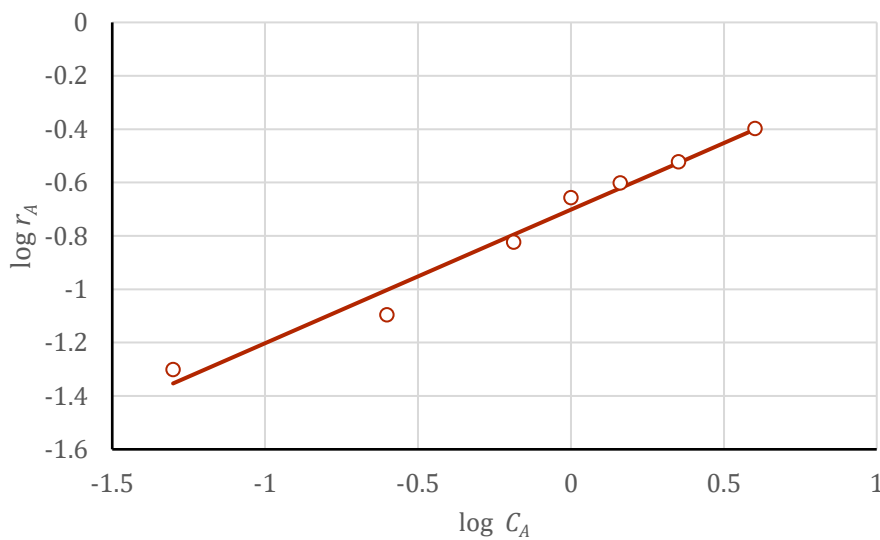
Koefisien korelasi kurva regresi linear, r , dapat diperoleh melalui persamaan berikut.

$$r = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{m \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Suku persamaan yang belum diketahui dalam persamaan di atas adalah $\sum y^2$. Dengan menambahkan satu kolom dalam tabel hitungan regresi di atas, yang berisi $\sum y^2$, maka nilai koefisien korelasi persamaan regresi hubungan antara laju reaksi kimia dan konsentrasi senyawa kimia adalah

$$r = \frac{7 \times 1,9863 - (-0,9746) \times (-5,4023)}{\sqrt{7 \times 2,6027 - (-0,9746)^2} \sqrt{7 \times 4,8014 - (-5,4023)^2}} = 0,99$$

Gambar di bawah ini menampilkan sebaran data dan kurva regresi (r_A, C_A). Dalam gambar itu, notasi desimal dinyatakan dengan tanda baca titik (.).



-o0o-