UJIAN TENGAH SEMESTER
METODE NUMERIK

SENIN, 22 APRIL 2024 | OPEN BOOK | TIDAK BOLEH MENGGUNAKAN KOMPUTER | 120 MENIT

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

SOAL 1 AKAR PERSAMAAN (SO A.1, A.2, A.3; BOBOT 40%)

Suatu struktur mengalami *displacement* yang didefinisikan oleh persamaan osilasi teredam berikut.

$$y = 8e^{-kt} \cos \omega t \text{ (dalam mm)}$$

Dalam persamaan di atas, $k = 0{,}5$ dan $\omega = 3$. Hitunglah nilai t saat struktur tersebut mengalami *displacement* sebesar 4 mm. Gunakan metode Newton-Raphson dan metode Secant untuk mendapatkan akar persamaan tersebut. Lakukan perhitungan hingga toleransi nilai $y(t) \leq 4 \pm 10^{-3}$ mm apabila $0 \leq t \leq 1$.

PENYELESAIAN

Persamaan *displacement*, setelah mensubstitusikan nilai-nilai variabel koefisien k dan ω dan nilai *displacement* y, adalah

$$4 = 8e^{-0{,}5t} \cos 3t \Leftrightarrow 8e^{-0{,}5t} \cos 3t - 4 = 0$$

Metode Newton-Raphson

Akar persamaan menurut metode Newton-Raphson adalah

$$t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)}$$

$$f(t) = 8e^{-0{,}5t} \cos 3t - 4$$

$$f'(t) = -4e^{-0{,}5t} \cos 3t - 24e^{-0{,}5t} \sin 3t$$

Indeks i adalah nomor iterasi hitungan. Tabel berikut ini menyajikan hitungan untuk mendapatkan akar persamaan, yaitu waktu t saat *displacement* struktur bernilai 4 milimeter. Tampak bahwa *displacement* 4 milimeter terjadi pada 0,315 detik.

i	t_i	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	t_{i+1}	y
0	0,500*)	-3,5593	-18,8648	0,3113	0,441
1	0,311	0,0714	-18,5500	0,3152	4,071
2	0,315	-0,0001	-18,6221	0,3152	4,000
3	0,315	0,0000	-18,6219	0,3152	4,000

*) Nilai awal yang ditetapkan.

Iterasi membutuhkan nilai awal t_0. Langkah yang cerdas dalam penetapan nilai awal adalah dengan mencermati soal, yang menyatakan secara tersirat bahwa *displacement* $y =$ 4 mm terjadi dalam rentang waktu $0 \leq t \leq 1$. Oleh karena itu, nilai awal t_0 hendaklah bernilai di antara 0 dan 1. Dalam tabel di atas, tampak bahwa $t_0 = 0{,}5$ detik. Perlu disampaikan di sini bahwa hitungan iterasi tidak konvergen ketika nilai awal bernilai 0 atau 1 detik.

Metode Secant

Metode secant mirip dengan metode Newton-Raphson. Metode secant berbeda dengan metode Newton-Raphson dalam penghitungan gradien persamaan *displacement* di suatu titik. Dalam metode secant, gradien persamaan *displacement* pada waktu t_i didekati dengan persamaan

$$f'(t_i) = \frac{f(t_{i-1}) - f(t_i)}{h_{i-1} - h_i}$$

Dalam metode secant, waktu t dihitung dengan cara yang sama dengan cara menghitung t dalam metode Newton-Raphson.

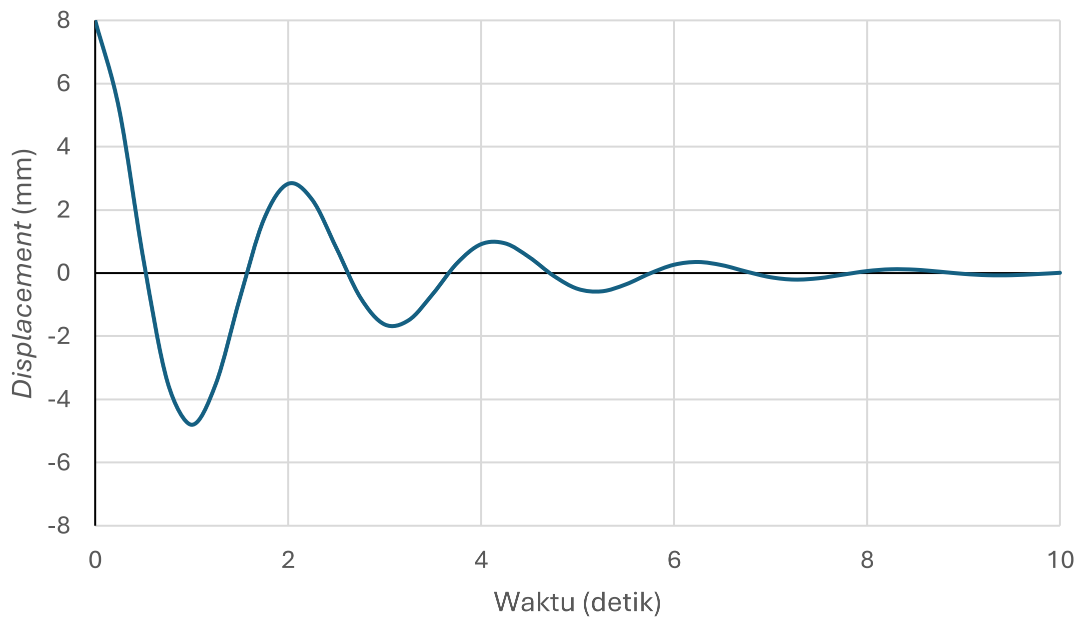
$$t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)}$$

Tabel berikut ini menyajikan hitungan untuk mendapatkan akar persamaan, yaitu waktu t saat *displacement* struktur bernilai 4 milimeter. Tampak bahwa *displacement* 4 milimeter terjadi pada 0,315 detik. Perhatikan bahwa metode secant membutuhkan dua nilai awal t.

i	t_i	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	t_{i+1}	y
0	0,000*)	4			8,000
1	1,000*)	-8,8037	-12,8037	0,3124	-4,804
2	0,312	0,0513	-12,8782	0,3164	4,051
3	0,316	-0,0228	-18,6077	0,3152	3,977
4	0,315	0,0000	-18,6331	0,3152	4,000

*) Nilai awal yang ditetapkan.

Grafik di bawah ini adalah kurva *displacement* sebagai fungsi waktu. Grafik seperti ini memudahkan pembacaan pola *displacement* terhadap waktu.



Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

SOAL 2 SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN REGRESI (SO A.1, A.2, A.3; BOBOT 60%)

Persentase perkerasan jalan yang mengalami keretakan (*CR*, %) dapat dimodelkan dengan regresi multivariabel berdasarkan umur perkerasan (*AGE*, tahun) dan volume kendaraan per detik (*VOL*, smp/detik). Persamaan regresi itu adalah

$$CR = a_0 + a_1 AGE \ + a_2 VOL$$

Hasil pengukuran lapangan menunjukkan data yang disajikan dalam tabel di bawah ini.

AGE (tahun)	6	1,5	5	0,5	8	10
VOL (smp/detik)	4	8	6	2	5	9
CR (%)	10	5	8	0	12	18

Tentukan nilai a_0, a_1, dan a_2 untuk memodelkan persentase keretakan perkerasan yang mewakili hasil pengukuran lapangan. Gunakan salah satu metode yang telah dipelajari untuk menyelesaian matriks sistem persamaan linear.

PENYELESAIAN

Nilai koefisien a_0, a_1, dan a_2 diperoleh dengan cara melakukan *best fit* sebuah bidang datar terhadap enam pasang data yang merepresentasikan persentase perkerasan jalan yang retak sebagai fungsi umur perkerasan dan volume kendaraan yang melewati jalan itu. Metode *best fit* yang dapat dipakai adalah regresi linear variabel ganda.

Persamaan regresi variabel ganda, $CR = f(AGE, VOL)$, untuk enam pasang data dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 6 & \sum_{i=1}^{6} AGE_i & \sum_{i=1}^{6} VOL_i \\ \sum_{i=1}^{6} AGE_i & \sum_{i=1}^{6} AGE_i AGE_i & \sum_{i=1}^{6} AGE_i VOL_i \\ \sum_{i=1}^{6} VOL_i & \sum_{i=1}^{6} VOL_i AGE_i & \sum_{i=1}^{6} VOL_i VOL_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{6} CR_i \\ \sum_{i=1}^{6} AGE_i CR_i \\ \sum_{i=1}^{6} VOL_i CR_i \end{Bmatrix}$$

Tabel di bawah ini menyajikan hitungan untuk mendapatkan nilai-nilai koefisien matriks persamaan di atas.

AGE (tahun)	VOL (smp/s)	CR (%)	$AGE\ AGE$ (tahun^2)	$AGE\ VOL$ (tahun smp/s)	$AGE\ CR$ (% tahun)	$VOL\ VOL$ (smp^2/s^2)	$VOL\ CR$ (% smp/s)
6	4	10	36	24	60	16	40
1,5	8	5	2,25	12	7,5	64	40
5	6	8	25	30	40	36	48
0,5	2	0	0,25	1	0	4	0
8	5	12	64	40	96	25	60
10	9	18	100	90	180	81	162
31	34	53	227,5	197	383,5	226	350

Persamaan koefisien regresi variabel ganda menjadi

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

$$\begin{bmatrix} 6 & 31 & 34 \\ 31 & 227{,}5 & 197 \\ 34 & 197 & 226 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 53 \\ 383{,}5 \\ 350 \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan di atas dapat dilakukan dengan berbagai metode. Pemilihan metode ini perlu mempertimbangkan faktor alat hitung yang dibolehkan untuk dipakai dalam ujian, kemudahan hitungan, dan waktu hitungan yang dibutuhkan. Metode Cramer dan eliminasi Gauss adalah metode yang tepat untuk dipilih dengan menggunakan ketiga faktor pertimbangan itu. Metode hitungan yang lain membutuhkan waktu yang lama dan langkah hitungan yang rumit jika menggunakan alat hitung kalkulator sederhana, yang dibolehkan dalam ujian. Metode iteratif, seperti metode Jacobi, Gauss-Jordan, dan SOR, memerlukan jumlah iterasi yang banyak untuk menyelesaikan tiga persamaan di atas.

Metode Cramer

Hitungan metode Cramer untuk menyelesaikan tiga persamaan secara simultan memerlukan hitungan empat determinan matriks.

$$\det[A] = \begin{vmatrix} 6 & 31 & 34 \\ 31 & 227{,}5 & 197 \\ 34 & 197 & 226 \end{vmatrix} = 6 \times (227{,}5 \times 226 - 197 \times 197)$$
$$- 31 \times (31 \times 226 - 197 \times 34) + 34 \times (31 \times 197 - 227{,}5 \times 34) = 10736$$

$$\det[A_{a0}] = \begin{vmatrix} 53 & 31 & 34 \\ 383{,}5 & 227{,}5 & 197 \\ 350 & 197 & 226 \end{vmatrix} = 53 \times (227{,}5 \times 226 - 197 \times 197)$$
$$- 383{,}5 \times (31 \times 226 - 197 \times 34) + 350 \times (31 \times 197 - 227{,}5 \times 34)$$
$$= -19800$$

$$\det[A_{a1}] = \begin{vmatrix} 6 & 53 & 34 \\ 31 & 383{,}5 & 197 \\ 34 & 350 & 226 \end{vmatrix} = 6 \times (383{,}5 \times 226 - 350 \times 197)$$
$$- 31 \times (53 \times 226 - 350 \times 34) + 34 \times (53 \times 197 - 383{,}5 \times 34) = 15576$$

$$\det[A_{a2}] = \begin{vmatrix} 6 & 31 & 53 \\ 31 & 227{,}5 & 383{,}5 \\ 34 & 197 & 350 \end{vmatrix} = 6 \times (227{,}5 \times 350 - 197 \times 383{,}5)$$
$$- 31 \times (31 \times 350 - 197 \times 53) + 34 \times (31 \times 383{,}5 - 227{,}5 \times 53) = 6028$$

Dari keempat nilai determinan matriks di atas, diperoleh nilai-nilai a_0, a_1, dan a_2. Perhatikan bahwa ketiga koefisien ini memiliki satuan.

$$a_0 = \frac{\det[A_{a0}]}{\det[A]} = \frac{-19800}{10736} = -1.8443\%$$

$$a_1 = \frac{\det[A_{a1}]}{\det[A]} = \frac{15576}{10736} = 1{,}4508\ \%/\mathrm{tahun}$$

$$a_2 = \frac{\det[A_{a2}]}{\det[A]} = \frac{6028}{10736} = 0{,}5615\ \%\ \mathrm{s/smp}$$

Persamaan regresi variabel ganda yang merepresentasikan persentase keretakan perkerasan jalan sebagai fungsi usia perkerasan jalan dan volume kendaraan yang melewati jalan adalah

$$CR = -1.8443 + 1{,}4508\ AGE + 0{,}5615\ VOL$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Mencermati persamaan regresi di atas, tampak bahwa persentase keretakan perkerasan jalan bernilai negatif ketika usia perkerasan jalan adalah nol tahun atau perkerasan baru dan tidak ada atau belum ada kendaraan yang melintasi jalan itu. Ini, tentu saja, tidak tepat karena persentase keretakan perkerasan jalan bernilai paling kecil nol atau tidak ada keretakan perkerasan jalan. Hal ini, sebenarnya, ditunjukkan pula dalam data pengukuran. Data menunjukkan bahwa nilai terkecil usia perkerasan adalah 0,5 tahun dan volume kendaraan adalah 2 satuan mobil penumpang per detik. Oleh karena itu, perlu diperhatikan bahwa persamaan regresi sebaiknya, dan seharusnya, berlaku dalam rentang data. Ekstrapolasi ke luar rentang data tidak disarankan.

Metode Eliminasi Gauss

Langkah penyelesaian tiga persamaan koefisien persamaan regresi variabel ganda terdiri dari langkah eliminasi dan substitusi. Ketiga persamaan itu dituliskan dalam bentuk berikut.

(1) $6a_0 + 31a_1 + 34a_2 = 53$
(2) $31a_0 + 227{,}5a_1 + 197a_2 = 383{,}5$
(3) $34a_0 + 197a_1 + 226a_2 = 350$

Langkah ke-1 adalah mengeliminasi a_0 dan a_1 dari persamaan (2) dan (3) dengan menggunakan persamaan (1) sebagai *pivot*.

(1) $6a_0 + 31a_1 + 34a_2 = 53$
(2') $67{,}3333a_1 + 21{,}3333a_2 = 109{,}6667$
(3') $21{,}3333a_1 + 33{,}3333a_2 = 49{,}6667$

Langkah ke-2 adalah mengeliminasi a_1 dari persamaan (3') dengan menggunakan persamaan (2') sebagai *pivot*.

(1) $6a_0 + 31a_1 + 34a_2 = 53$
(2') $67{,}3333a_1 + 21{,}3333a_2 = 109{,}6667$
(3'') $26{,}5743a_2 = 14{,}9208$

Langkah ke-3 adalah menghitung a_2 dari persamaan (3'') dan mensubstitusikannya ke persamaan $(2')$ dan persamaan (1).

(3'') $a_2 = 14{,}9208/16{,}5743 = 0{,}5615\%$ s/smp
(2') $a_1 = (109{,}6667 - 21{,}3333 \times 0{,}5615)/67{,}3333 = 1{,}4508\%$/tahun
(1) $a_0 = (53 - 31 \times 1{,}4508 - 34 \times 0{,}5615)/6 = -1{,}8443\%$

Tampak bahwa metode eliminasi Gauss dan Cramer menghasilkan nilai-nilai koefisien persamaan regresi yang sama. Ingat, koefisien-koefisien persamaan regresi memiliki satuan.

Metode Iteratif (Jacobi, Gauss-Jordan, SOR)

Untuk memfasilitasi metode iteratif, maka ketiga persamaan koefisien regresi variabel ganda diubah menjadi berbentuk berikut.

(1) $$a_0^{m+1} = \frac{53 - 31a_1^m - 34a_2^m}{6}$$

(2) $$a_1^{m+1} = \frac{383{,}5 - 31[\lambda a_0^{m+1} + (1-\lambda)a_0^m] - 197a_2^m}{227{,}5}$$

(3) $$a_2^{m+1} = \frac{350 - 34[\lambda a_0^{m+1} + (1-\lambda)a_0^m] - 197[\lambda a_1^{m+1} + (1-\lambda)a_1^m]}{226}$$

Dalam tiga persamaan di atas, indeks m adalah nomor urut iterasi dan koefisien λ adalah konstanta yang berturut-turut bernilai 0 untuk metode Jacobi, 1 untuk metode Gauss-Seidel, dan $1 < \lambda < 2$ untuk metode SOR. Tabel berikut adalah cuplikan langkah hitung penyelesaian ketiga persamaan dengan metode SOR. Hitungan konvergen setelah jumlah iterasi mencapai lebih daripada 50. Hitungan iterasi menghasilkan nilai-nilai koefisien persamaan regresi berikut.

$a_0 = -1{,}8477\%$

$a_1 = 1{,}4503\%$/tahun

$a_2 = 0{,}5625\%$ s/smp

$\lambda = 1{,}1$

m	a_0^m	a_0^m	a_0^m	Δ_{maks}
0	1*)	1*)	1*)	---
1	-2,0000	1,1332	1,0346	3,0000
2	-2,8843	1,1949	1,0135	0,8843
3	-3,0834	1,2310	0,9771	0,1991
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
57	-1,8489	1,4501	0,5628	0,0005
58	-1,8485	1,4502	0,5627	0,0005
59	-1,8480	1,4503	0,5626	0,0004
60	-1,8477	1,4503	0,5625	0,0004

*) Nilai awal yang ditetapkan.

-o0o-

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id