

UJIAN TENGAH SEMESTER METODE NUMERIK I

KAMIS, 8 APRIL 2021 | OPEN BOOK | TIDAK BOLEH MENGGUNAKAN KOMPUTER | 150 MENIT

SOAL 1 (CP: A1-3, K1, BOBOT 35%)

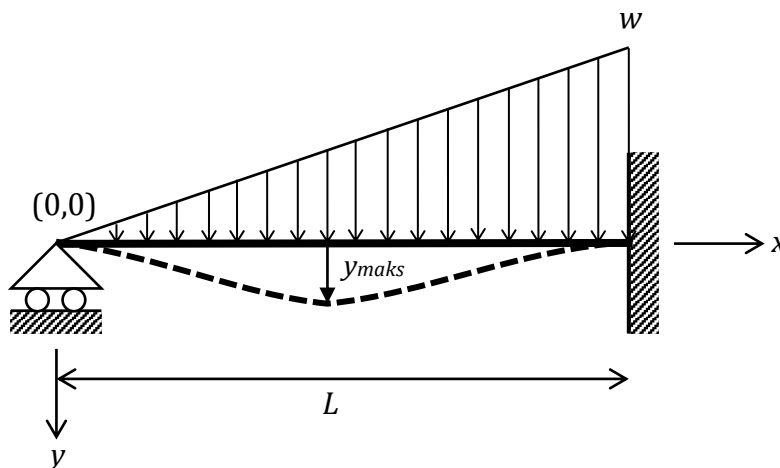
Sebuah balok horizontal bertumpu di atas tumpuan rol-jepit dan menopang beban terbagi linear. Lenturan balok itu mengikuti persamaan matematis di bawah ini:

$$y = \frac{w}{120EIL} (x^5 - 2L^2x^3 + L^4x)$$

Dalam persamaan tersebut, y adalah lenturan balok di posisi x , x adalah posisi titik di balok yang diukur dari pangkal (tumpuan rol), w adalah beban di ujung balok yang bertumpu di jepit, E adalah modulus elastisitas balok, I adalah momen inersia balok, dan L adalah panjang balok. Nilai-nilai variabel dalam sistem tersebut adalah: $L = 5$ m, $w = 200$ kN/m, $E = 200 \times 10^6$ kN/m², $I = 3 \times 10^{-4}$ m⁴.

Lenturan maksimum (nilai y_{maks}) dan posisinya dapat diketahui, yaitu di tempat yang memiliki gradien lenturan sama dengan nol ($dy/dx = 0$).

1. Dimanakah posisi lenturan maksimum (x yang memiliki y_{maks})?
2. Berapakah nilai lenturan maksimum (y_{maks})?



PENYELESAIAN

Gradien garis singgung batang melendut di titik ekstrem (y_{maks}) adalah nol.

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \frac{w}{120EIL} (x^5 - 2L^2x^3 + L^4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{120EIL} (5x^4 - 6L^2x^2 + L^4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 5x^4 - 6L^2x^2 + L^4 = 0$$

Posisi lendutan maksimum adalah nilai x yang memenuhi persamaan di atas. Dalam bahasa matematika, akar persamaan di atas. Metode Newton-Raphson dipakai untuk mendapatkan akar persamaan di atas.

$$f(x) = 5x^4 - 6L^2x^2 + L^4$$

$$f'(x) = 20x^3 - 12L^2x$$

$$x_{i+1} = x_i - f(x)/f'(x)$$

Hitungan iterasi dilakukan secara tabulasi.

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	x_{i+1}
0	1	480	-280	2,714286
1	2,714286	-208,713	-414,344	2,210567
2	2,210567	11,40386	-447,127	2,236071
3	2,236071	-0,00148	-447,214	2,236068
4	2,236068	0	-447,214	2,236068

$$y_{maks} = \frac{w}{120EIL} (x^5 - 2L^2x^3 + L^4x) = 0,004969 \text{ m} \approx 5 \text{ mm}$$

1. Lendutan maksimum terjadi di $x = 2,24 \text{ m}$.
2. Lendutan maksimum $y_{maks} = 5 \text{ mm}$.

SOAL 2 (CP: A1-2, BOBOT 30%)

Hitung nilai $x_1, x_2, x_3,$ dan x_4 dari persamaan di bawah ini untuk 2 skenario RHS (*right hand side*), tanpa menggunakan inversi matriks.

Matriks Sistem Persamaan Linier										Skenario RHS			
3,85	x_1	+	2,75	x_2	-	4,60	x_3	-	2,55	x_4	=	1,50	3,87
-6,80	x_1	+	2,97	x_2	-	5,89	x_3	+	2,00	x_4	=	-7,80	-6,80
-9,80	x_1	+	3,50	x_2	-	6,70	x_3	+	3,00	x_4	=	4,67	-5,86
1,00	x_1	-	6,70	x_2	-	4,50	x_3	+	3,50	x_4	=	-3,65	5,67

PENYELESAIAN

Metode eliminasi Gauss dipakai untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Penyelesaian sistem persamaan linear, metode eliminasi Gauss											Skenario RHS			
1	3,85	x_1	+	2,75	x_2	-	4,60	x_3	-	2,55	x_4	=	1,50	3,87
2	-6,80	x_1	+	2,97	x_2	-	5,89	x_3	+	2,00	x_4	=	-7,80	-6,80
3	-9,80	x_1	+	3,50	x_2	-	6,70	x_3	+	3,00	x_4	=	4,67	-5,86
4	1,00	x_1	-	6,70	x_2	-	4,50	x_3	+	3,50	x_4	=	-3,65	5,67

Langkah #1: eliminasi x_1 dari persamaan ke-2 s.d. ke-4.											Skenario RHS			
1	3,85	x_1	+	2,75	x_2	-	4,60	x_3	-	2,55	x_4	=	1,50	3,87
2'	0	x_1	+	7,8271	x_2	-	14,0147	x_3	-	2,5039	x_4	=	-5,1506	0,0353
3'	0	x_1	+	10,5	x_2	-	18,4091	x_3	-	3,4909	x_4	=	8,4882	3,9909
4'	0	x_1	-	7,4143	x_2	-	3,3052	x_3	+	4,1623	x_4	=	-4,0396	4,6648

Langkah #2: eliminasi x_2 dari persamaan ke-3 dan ke-4.

Skenario RHS

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 1 & 3,85 x_1 & + & 2,75 x_2 & - & 4,60 x_3 & - & 2,55 x_4 & = & 1,50 & 3,87 \\
 2' & 0 x_1 & + & 7,8271 x_2 & - & 14,0147 x_3 & - & 2,5039 x_4 & = & -5,1506 & 0,0353 \\
 3'' & 0 x_1 & + & 0 x_2 & + & 0,3914 x_3 & - & 0,1320 x_4 & = & 15,3977 & 3,9435 \\
 4'' & 0 x_1 & + & 0 x_2 & - & 16,5806 x_3 & + & 1,7905 x_4 & = & -8,9186 & 4,6983
 \end{array}$$

Langkah #3: eliminasi x_3 dari persamaan ke-4.

Skenario RHS

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 1 & 3,85 x_1 & + & 2,75 x_2 & - & 4,60 x_3 & - & 2,55 x_4 & = & 1,50 & 3,87 \\
 2' & 0 x_1 & + & 7,8271 x_2 & - & 14,0147 x_3 & - & 2,5039 x_4 & = & -5,1506 & 0,0353 \\
 3'' & 0 x_1 & + & 0 x_2 & + & 0,3914 x_3 & - & 0,1320 x_4 & = & 15,3977 & 3,9435 \\
 4''' & 0 x_1 & + & 0 x_2 & + & 0 x_3 & - & 1,7905 x_4 & = & 643,373 & 171,757
 \end{array}$$

Langkah #4: substitusi

Skenario RHS

$$\begin{array}{rcll}
 4''' & x_4 & = & -169,3065 \quad -45,1987 \\
 3'' & x_3 & = & -17,7452 \quad -5,1643 \\
 2' & x_2 & = & -86,5923 \quad -23,7013 \\
 1 & x_1 & = & -71,0989 \quad -18,1724
 \end{array}$$

SOAL 3 (CP: A3, BOBOT 35%)

Liku kalibrasi (*rating curve*) adalah kurva yang menghubungkan debit aliran dengan tinggi muka air di suatu tampang melintang saluran. Bentuk umum persamaan liku kalibrasi adalah:

$$Q = \alpha H^\beta$$

dengan Q adalah debit (m^3/s), H adalah tinggi muka air (m), α dan β adalah konstanta.

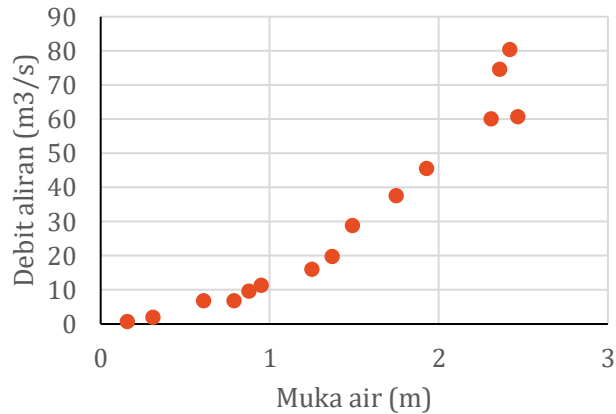
Pada suatu stasiun pengamatan tinggi muka air di sungai, diperoleh hasil pengukuran debit-tinggi muka air sebagai berikut ini.

H_i (m)	Q_i (m^3/s)	H_i (m)	Q_i (m^3/s)
0,95	11,25	1,49	28,75
1,75	37,50	0,88	9,54
2,42	80,37	1,37	19,71
2,36	74,52	2,47	60,59
0,61	6,75	2,31	60,05
1,93	45,50	0,16	0,75
1,25	16,00	0,79	6,82
0,31	2,00		

Dengan menggunakan analisis regresi, tentukan persamaan liku kalibrasi yang mewakili hasil pengukuran tersebut.

PENYELESAIAN

Sebelum melakukan hitungan regresi, data dituangkan dalam bentuk grafik untuk membantu pembacaan pola hubungan antara kedua variabel, debit aliran sebagai fungsi elevasi muka air. Grafik menunjukkan satu titik, (2,47;60,59), yang tampak berbeda dari pola hubungan H vs Q kelompok data. Titik seperti ini, dalam praktik, perlu diperiksa dan diteliti. Jika data ini memang benar, artinya pengukuran memang menunjukkan data seperti ini, maka data ini harus tetap dimasukkan dalam hitungan regresi. Apabila hasil pemeriksaan memberikan informasi bahwa telah terjadi kesalahan pengukuran, maka titik data ini tidak diikutkan dalam hitungan regresi.



Persamaan hubungan antara debit aliran dan tinggi muka air menunjukkan hubungan yang tidak linear. Agar hitungan regresi dapat dilakukan secara regresi linear, maka persamaan itu diubah menjadi hubungan antara logaritma debit dan logaritma tinggi muka air.

$$Q = \alpha H^\beta \Rightarrow \log Q = \log \alpha + \beta \log H$$

Persamaan di atas dapat dibaca sebagai persamaan linear antara logaritma debit dan logaritma tinggi muka air. Dengan demikian, hitungan regresi linear dapat diterapkan.

$$Q'_{reg} = a_0 + a_1 H' + e$$

Dalam persamaan di atas, $Q' = \log Q$ dan $H' = \log H$.

Hitungan untuk mendapatkan a_0 dan a_1 dilakukan secara tabulasi.

H_i (m)	Q_i (m³/s)	H'_i	Q'_i	H_i^2	$H_i Q_i$
0,95	11,25	-0,0223	1,0512	0,0005	-0,0234
1,75	37,5	0,2430	1,5740	0,0591	0,3825
2,42	80,37	0,3838	1,9051	0,1473	0,7312
2,36	74,52	0,3729	1,8723	0,1391	0,6982
0,61	6,75	-0,2147	0,8293	0,0461	-0,1780
1,93	45,5	0,2856	1,6580	0,0815	0,4735
1,25	16	0,0969	1,2041	0,0094	0,1167
0,31	2	-0,5086	0,3010	0,2587	-0,1531
1,49	28,75	0,1732	1,4586	0,0300	0,2526
0,88	9,54	-0,0555	0,9795	0,0031	-0,0544
1,37	19,71	0,1367	1,2947	0,0187	0,1770
2,47	60,59	0,3927	1,7824	0,1542	0,6999
2,31	60,05	0,3636	1,7785	0,1322	0,6467
0,16	0,75	-0,7959	-0,1249	0,6334	0,0994
0,79	6,82	-0,1024	0,8338	0,0105	-0,0854
Jumlah		0,7491	18,3976	1,7238	3,7835

Jumlah data, $n = 15$

$$\bar{H}' = \frac{0,7491}{15} = 0,0499$$

$$\bar{Q}' = \frac{18,3976}{15} = 1,2265$$

$$a_1 = \frac{n \sum H_i Q_i - \sum H_i \sum Q_i}{n \sum H_i^2 - (\sum H_i)^2} = \frac{15 \times 3,7835 - 0,7491 \times 18,3976}{15 \times 1,7238 - (0,7491)^2} = 1,6988$$

$$\beta = a_1 = 1,6988$$

$$a_0 = \bar{Q}' - a_1 \bar{H}' = 1,2265 - 1,6988 \times 0,0499 = 1,1417$$

$$\alpha = 10^{a_0} = 10^{1,1417} = 13,8572 \text{ m}^{3-1,6988}/\text{s}$$

Persamaan liku kalibrasi debit dengan demikian adalah:

$$Q = 13,8572 H^{1,6988}$$

-o0o-