UJIAN TENGAH SEMESTER
SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL

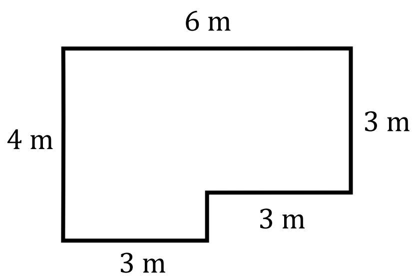
JUMAT, 8 OKTOBER 2021 | OPEN BOOK | BOLEH MENGGUNAKAN KOMPUTER | 120 MENIT

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

SOAL 1: METODE BEDA HINGGA (CP: A1, A2, A3, K1; BOBOT 50%)

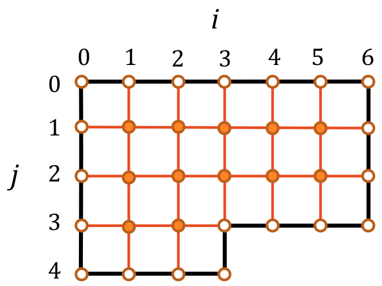
Persamaan lendutan pelat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q$$



dengan x dan y adalah koordinat arah timur dan selatan, w adalah lendutan, dan q adalah konstanta. Susun penyelesaian PDP (persamaan diferensial parsial) tersebut dengan menggunakan metode beda hingga untuk kasus pelat dengan bentuk seperti gambar di samping. Batas keliling pelat dianggap sendi. Dimensi pelat: panjang 6 m, lebar paruh sebelah kiri 4 m, dan lebar paruh sebelah kanan 3 m. Gunakan panjang $\Delta x = \Delta y = 1$ m dan $q = 0{,}01$. Penyelesaian persamaan diskret menggunakan metode iterasi dan boleh memakai bantuan aplikasi *spreadsheet* di komputer.

PENYELESAIAN



Langkah pertama penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah diskretisasi domain hitung pelat. Domain pelat ke arah timur dan selatan dibagi menjadi sejumlah pias setiap jarak $\Delta x = \Delta y = 1$ m. Ada 12 titik hitung dan 20 titik yang telah diketahui lendutannya.

Langkah kedua penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah pengubahan persamaan diferensial parsial lendutan pelat menjadi persamaan diskret lendutan pelat.

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i1,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} = q_{i,j}$$

Karena $\Delta x = \Delta y = 1$ m, maka persamaan di atas menjadi

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} = q_{i,j}$$

Persamaan di atas diubah menjadi bentuk di bawah ini untuk memfasilitasi penyelesaian persamaan dengan metode iterasi.

$$w_{i,j} = \tfrac{1}{4}\left(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - q_{i,j}\right)$$

Dengan memakai indeks iterasi n dan $n + 1$, persamaan iteratif metode SOR di kedua belas titik hitung adalah sebagai berikut

$$w_{i,j}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1-\lambda)w_{i-1,j}^{n} + w_{i+1,j}^{n} + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{i,j-1}^{n} + w_{i,j+1}^{n} - q_{i,j}\right)$$

Faktor relaksasi λ bernilai antara 0 s.d. 1 untuk skema *under relaxation* dan antara 1 s.d. 2 untuk skema *over relaxation*. Faktor relaksasi λ bernilai nol untuk skema Jacobi dan bernilai satu untuk skema Gauss-Seidel. Penerapan persamaan iteratif di atas ke titik-titik hitung menghasilkan 12 persamaan di bawah ini.

$$w_{1,1}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(0 + w_{2,1}^{n} + 0 + w_{1,2}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{2,1}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{1,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{1,1}^{n} + w_{3,1}^{n} + 0 + w_{2,2}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{3,1}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{2,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{2,1}^{n} + w_{4,1}^{n} + 0 + w_{3,2}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{4,1}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{3,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{3,1}^{n} + w_{5,1}^{n} + 0 + w_{4,2}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{5,1}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{4,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{4,1}^{n} + 0 + 0 + w_{5,2}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{1,2}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(0 + w_{2,2}^{n} + \lambda w_{1,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{1,1}^{n} + w_{1,3}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{2,2}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{1,2}^{n+1} + (1-\lambda)w_{1,2}^{n} + w_{3,2}^{n} + \lambda w_{2,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{2,1}^{n} + w_{2,3}^{n} - 0{,}01\right)$$

$$w_{3,2}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{2,2}^{n+1} + (1-\lambda)w_{2,2}^{n} + w_{4,2}^{n} + \lambda w_{3,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{3,1}^{n} + 0 - 0{,}01\right)$$

$$w_{4,2}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{3,2}^{n+1} + (1-\lambda)w_{3,2}^{n} + w_{5,2}^{n} + \lambda w_{4,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{4,1}^{n} + 0 - 0{,}01\right)$$

$$w_{5,2}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{4,2}^{n+1} + (1-\lambda)w_{4,2}^{n} + 0 + \lambda w_{5,1}^{n+1} + (1-\lambda)w_{5,1}^{n} + 0 - 0{,}01\right)$$

$$w_{1,3}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(0 + w_{2,3}^{n} + \lambda w_{1,2}^{n+1} + (1-\lambda)w_{1,2}^{n} + 0 - 0{,}01\right)$$

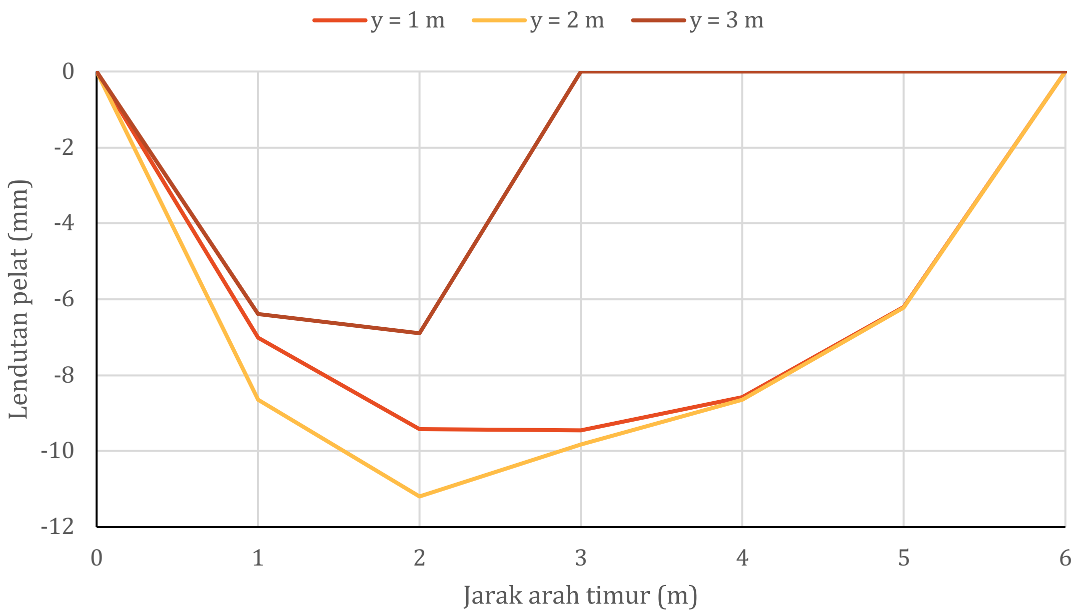
$$w_{2,3}^{n+1} = \tfrac{1}{4}\left(\lambda w_{1,3}^{n+1} + (1-\lambda)w_{1,3}^{n} + 0 + \lambda w_{2,2}^{n+1} + (1-\lambda)w_{2,2}^{n} + 0 - 0{,}01\right)$$

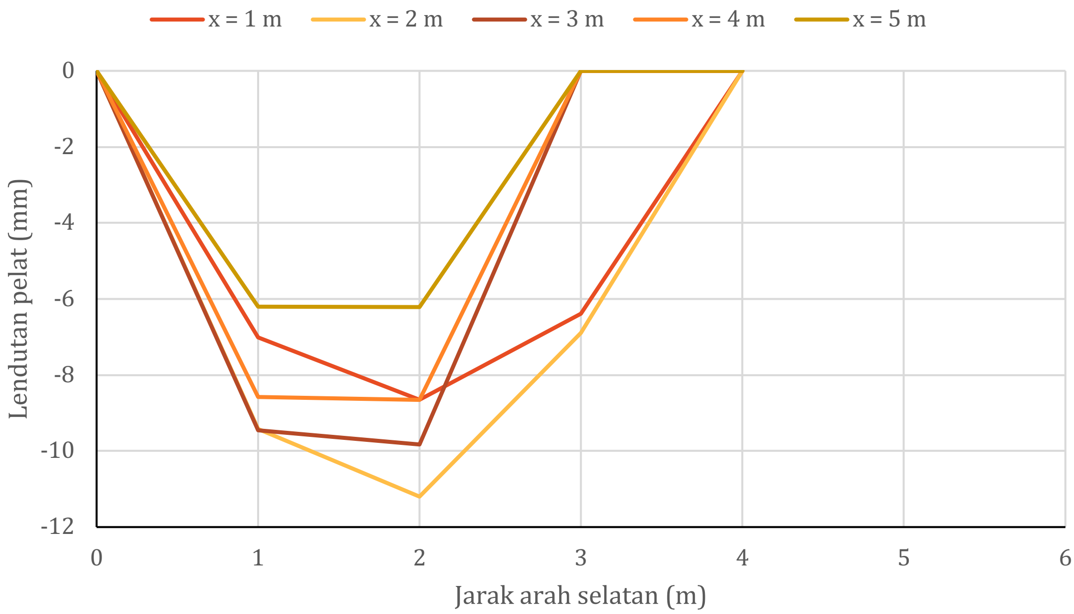
Langkah ketiga penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah hitungan iteratif untuk mendapatkan nilai-nilai lendutan di setiap titik hitung. Hitungan iterasi dilakukan secara tabulasi. Tabel di bawah ini menampilkan cuplikan iterasi untuk faktor relaksasi $\lambda = 1{,}5$. Lendutan pelat, w, dinyatakan dalam satuan milimeter untuk mengurangi jumlah angka sehingga nilai lendutan dapat dimuat dalam tabel. Tampak bahwa solusi persamaan diskret lendutan pelat diperoleh setelah iterasi keempat belas.

n	$w_{1,1}$	$w_{2,1}$	$w_{3,1}$	$w_{4,1}$	$w_{5,1}$	$w_{1,2}$	$w_{2,2}$	$w_{3,2}$	$w_{4,2}$	$w_{5,2}$	$w_{1,3}$	$w_{2,3}$	Δ_{maks}
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	---
1	-2,50	-3,44	-3,79	-3,92	-3,97	-3,44	-5,08	-5,83	-6,15	-6,30	-3,79	-5,83	6,297
2	-4,22	-5,99	-6,75	-7,09	-6,24	-5,99	-9,04	-8,85	-8,83	-6,89	-5,77	-6,95	3,965
3	-5,49	-7,98	-8,73	-8,70	-6,60	-7,74	-10,85	-10,08	-9,27	-6,57	-6,39	-7,11	1,995
4	-6,43	-9,12	-9,62	-8,98	-6,42	-8,53	-11,45	-10,27	-9,01	-6,31	-6,51	-7,08	1,138
5	-6,91	-9,56	-9,76	-8,82	-6,26	-8,78	-11,51	-10,09	-8,76	-6,20	-6,50	-7,01	0,484
6	-7,08	-9,61	-9,64	-8,65	-6,19	-8,79	-11,38	-9,91	-8,65	-6,19	-6,45	-6,94	0,179
7	-7,10	-9,53	-9,51	-8,57	-6,18	-8,74	-11,26	-9,83	-8,63	-6,20	-6,41	-6,90	0,122
8	-7,07	-9,46	-9,45	-8,56	-6,19	-8,68	-11,20	-9,80	-8,64	-6,21	-6,39	-6,89	0,075
9	-7,03	-9,42	-9,44	-8,56	-6,19	-8,65	-11,18	-9,81	-8,65	-6,21	-6,38	-6,89	0,039
10	-7,02	-9,41	-9,44	-8,57	-6,20	-8,64	-11,18	-9,82	-8,65	-6,21	-6,38	-6,89	0,017
11	-7,01	-9,41	-9,45	-8,58	-6,20	-8,64	-11,19	-9,83	-8,66	-6,21	-6,38	-6,90	0,007
12	-7,01	-9,41	-9,45	-8,58	-6,20	-8,65	-11,20	-9,83	-8,66	-6,21	-6,39	-6,90	0,005
13	-7,02	-9,42	-9,46	-8,58	-6,20	-8,65	-11,20	-9,83	-8,65	-6,21	-6,39	-6,90	0,003
14	-7,02	-9,42	-9,46	-8,58	-6,20	-8,65	-11,20	-9,83	-8,65	-6,21	-6,39	-6,90	0,001

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Untuk memudahkan pembacaan lendutan pelat, maka angka-angka lendutan pelat ditampilkan dalam bentuk kurva di beberapa tampang arah timur (arah sumbu x) dan arah selatan (arah sumbu y).





Langkah hitungan iterasi dapat pula dilakukan secara tabulasi dengan memanfaatkan fitur yang ada di Microsoft Excel. Fitur ini memudahkan hitungan karena langkah iterasi sudah *imbedded* dalam *spreadsheet*. Untuk memanfaatkan fitur ini, maka skema iterasi diubah menjadi skema Jacobi. Dalam hal ini, nilai faktor relaksasi adalah nol, $\lambda = 0$. Tabel di bawah ini adalah rekaman tabel hitungan dalam Microsoft Excel. Dalam tabel ini, nilai lendutan pelat dinyatakan dalam satuan meter.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

		$i \longrightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
j	y (m)	x (m)→	0	1	2	3	4	5	6
0	0		0	0	0	0	0	0	0
1	1		0	-0,0070	-0,0094	-0,0095	-0,0086	-0,0062	0
2	2		0	-0,0087	-0,0112	-0,0098	-0,0087	-0,0062	0
3	3		0	-0,0064	-0,0069	0	0	0	0
4	4		0	0	0	0	---	---	---

SOAL 2: METODE VOLUME HINGGA (CP: A1, A2, A3, K1; BOBOT 50%)

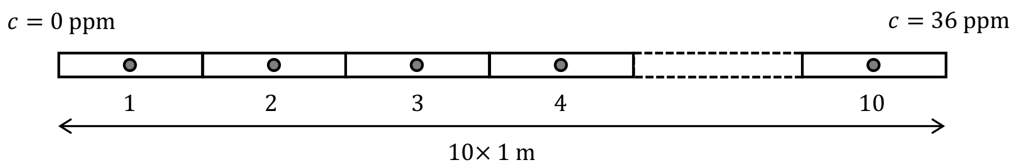
Di suatu muara sungai yang memiliki tampang hampir seragam, dinamika intrusi air asin ke hulu dapat didekati dengan persamaan berikut:

$$U\frac{\partial c}{\partial x} - k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

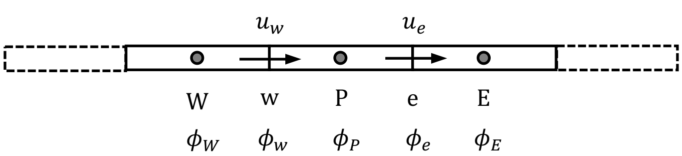
Dalam persamaan di atas, c adalah konsentrasi garam dalam satuan ppm. Syarat batas (*boundary conditions*) di hulu ($x = 0$ m) adalah $c(0) = 0$ ppm dan di hilir ($x = 10.000$ m) adalah $c(10.000) = 36$ ppm. Kecepatan aliran dan koefisien difusi diketahui, yaitu $U = 1{,}2$ m/s dan $k = 1.500$ m²/s. Lebar sungai adalah 100 m dan kedalaman aliran 10 m. Gunakan skema *upwind* untuk melakukan interpolasi nilai konsentrasi garam c di batas atau sisi sel (*control volume*) dan ukuran sel $\Delta x = 1.000$ m.

PENYELESAIAN

Sama dengan langkah pertama dalam penyelesaian soal lendutan pelat, langkah pertama penyelesaian persamaan parsial diferensial intrusi air asin ke hulu adalah diskretisasi domain hitung. Alur sungai sepanjang 10 ribu meter dibagi menjadi 10 sel (volume kontrol) berjarak seragam, $\Delta x = 1.000$ meter.



Langkah kedua penyelesaian persamaan diferensial parsial intrusi air asin adalah penjabaran persamaan konveksi-difusi menjadi persamaan diskret. Persamaan diskret konveksi-difusi di suatu sel adalah



$$([uS]_e\phi_e - [uS]_w\phi_w) - \left(\left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}S\right]_e - \left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}S\right]_w\right) = \bar{R}\Delta V$$

$$(u_eS_e\phi_e - u_wS_w\phi_w) - \left(\Gamma_eS_e\left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}}\right) - \Gamma_wS_w\left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}}\right)\right) = \bar{R}\Delta V$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Dalam persamaan di atas, variabel ϕ adalah konsentrasi garam, $\phi = c$. Dalam soal intrusi air asin, diketahui bahwa kecepatan aliran di sepanjang alur sungai adalah seragam, koefisien difusi seragam, lebar sungai seragam, kedalaman aliran seragam, panjang sel seragam, dan tidak ada *source/sink*.

$u_e = u_w = U = 1{,}2$ m/s (arah aliran ke hilir).

$\Gamma_e = \Gamma_w = k = 1500$ m^2/s.

$S_e = S_w = S = 100 \times 10 = 1000$ m^2.

$\Delta x_{PE} = \Delta x_{WP} = \Delta x = 1000$ m.

$\bar{R}\Delta V = 0$ ppm.m^3/s.

Dengan menggunakan skema *upwind difference*, konsentrasi garam di batas sel, ϕ_e dan ϕ_w, adalah

$u_e = 1{,}2$ m/s $\implies \phi_e = \phi_P$

$u_w = 1{,}2$ m/s $\implies \phi_w = \phi_W$

Dengan demikian, persamaan diskret konveksi-difusi di suatu sel menjadi

$$(u_e S_e \phi_P - u_w S_w \phi_W) - \left(\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}}\right)\right) = \bar{R}\Delta V$$

$$\left(-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}}\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}}\right)\phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}}\right)\phi_E = \bar{R}\Delta V$$

Koefisien-koefisien ϕ_W, ϕ_P, dan ϕ_E dalam persamaan di atas adalah

$$-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} = -1{,}2 \times 1000 - \frac{1500 \times 1000}{1000} = -2700$$

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = \frac{1500 \times 1000}{1000} + 1{,}2 \times 1000 + \frac{1500 \times 1000}{1000} = 4200$$

$$-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = -\frac{1500 \times 1000}{1000} = -1500$$

Persamaan intrusi air asin di suatu sel menjadi

$$\implies -2700\phi_W + 4200\phi_P - 1500\phi_E = 0$$

Persamaan di atas berlaku di sel nomor 2 s.d. 9.

Koefisien-koefisian ϕ_W, ϕ_P, dan ϕ_E dalam persamaan di atas dapat pula diperoleh dengan cara yang sedikit berbeda. Persamaan intrusi air asin di suatu sel dituliskan dalam bentuk

$$a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E = R_u$$

Dalam persamaan di atas, koefisien-koefisien a_W, a_E, dan a_P adalah

$$a_W = -\max(F_w, 0) - D_w$$

$$a_E = -\max(-F_e, 0) - D_e$$

$$a_P = -a_W - a_E + F_e - F_w - R_P$$

$$F_w = u_w S_w, \quad F_e = u_e S_e$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x}, \quad D_e = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x}$$

Karena kecepatan aliran, luas tampang aliran, koefisien difusi, dan panjang sel seragam, maka

$$F_w = F_e = US = 1{,}2 \times 100 \times 10 = 1200$$

$$D_w = D_e = \frac{\Gamma S}{\Delta x} = \frac{1500 \times 100 \times 10}{1000} = 1500$$

Karena tidak ada *source/sink*, maka

$$R_u = 0$$

$$R_P = 0$$

Dengan demikian, koefisien-koefisien a_W, a_E, dan a_P adalah

$$a_W = -\max(F_w, 0) - D_w = -\max(1200{,}0) - 1500 = -2700$$

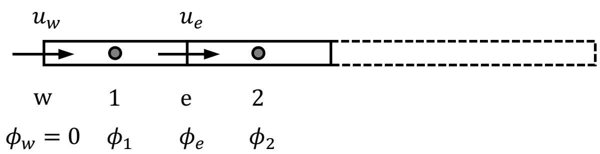
$$a_E = -\max(-F_e, 0) - D_e = -\max(-1200{,}0) - 1500 = -1500$$

$$a_P = -a_W - a_E + F_e - F_w - R_P = 2700 + 1500 + 1200 - 1200 - 0 = 4200$$

$$\Longrightarrow -2700\phi_W + 4200\phi_P - 1500\phi_E = 0$$

Tampak bahwa cara pertama dan kedua untuk mendapatkan persamaan diskret di suatu sel menghasilkan persamaan yang sama. Untuk sel yang berada di batas domain hitung, perlu dilakukan penjabaran yang berbeda dengan penjabaran persamaan di sel nomor 2 s.d. 9.

Sel nomor 1.



$$(u_e S_e \phi_1 - u_w S_w \phi_w) - \left(\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_1 - \phi_w}{\Delta x_{wP}}\right)\right) = \bar{R}\Delta V$$

$$\left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x}\right)\phi_1 + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x}\right)\phi_2 = \bar{R}\Delta V + \left(u_w S_w + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2}\right)\phi_w$$

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} = \frac{1500 \times 1000}{1000/2} + 1{,}2 \times 1000 + \frac{1500 \times 1000}{1000} = 5700$$

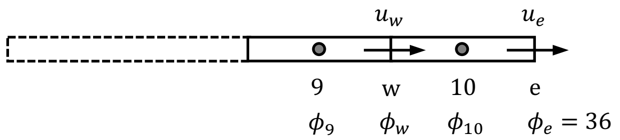
$$-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} = -\frac{1500 \times 1000}{1000} = -1500$$

$$\bar{R}\Delta V + \left(u_w S_w + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2}\right)\phi_w = 0 + \left(1{,}2 \times 1000 + \frac{1500 \times 1000}{1000/2}\right) \times 0 = 0$$

$$\Longrightarrow 5700\phi_1 - 1500\phi_2 = 0$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id

Sel nomor 2.



$$(u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_9) - \left(\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_e - \phi_{10}}{\Delta x_{Pe}}\right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_{10} - \phi_9}{\Delta x_{WP}}\right)\right) = \bar{R}\Delta V$$

$$\left(-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x}\right)\phi_9 + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2}\right)\phi_{10} = \bar{R}\Delta V + \left(-u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2}\right)\phi_e$$

$$-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} = -1{,}2 \times 1000 - \frac{1500 \times 1000}{1000} = -2700$$

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2} = \frac{1500 \times 1000}{1000} + \frac{1500 \times 1000}{1000/2} = 4500$$

$$\bar{R}\Delta V + \left(-u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2}\right)\phi_e = 0 + \left(-1{,}2 \times 1000 + \frac{1500 \times 1000}{1000/2}\right) \times 36 = 64800$$

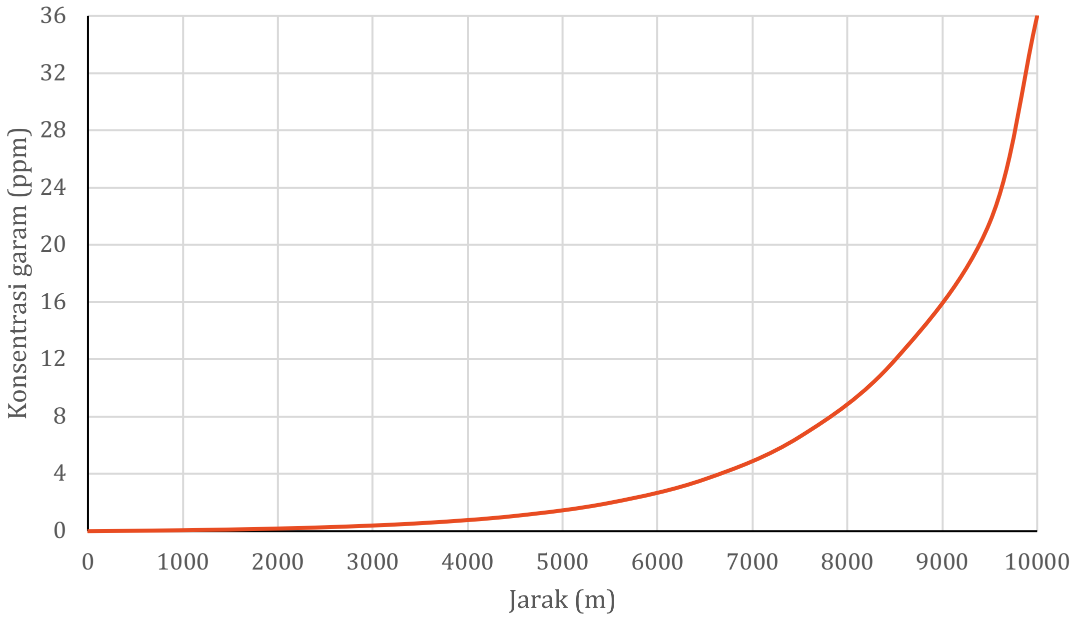
$$\Longrightarrow -2700\phi_9 + 4500\phi_{10} = 64800$$

Sepuluh persamaan di semua sel, yang dituliskan dalam bentuk perkalian matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 5700 & -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2700 & 4200 & -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2700 & 4200 & -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2700 & 4200 & -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2700 & 4200 & -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2700 & 4200 & -1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2700 & 4200 & -1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2700 & 4200 & -1500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2700 & 4200 & -1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2700 & 4500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64800 \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian perkalian matriks di atas dengan bantuan *spreadsheet* menghasilkan nilai-nilai konsentrasi garam di setiap sel, dalam satuan ppm.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}031 \\ 0{,}118 \\ 0{,}276 \\ 0{,}558 \\ 1{,}068 \\ 1{,}984 \\ 3{,}634 \\ 6{,}603 \\ 11{,}948 \\ 21{,}569 \end{Bmatrix}$$



-o0o-

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • Email: istiarto@ugm.ac.id