

UJIAN TENGAH SEMESTER

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL

JUMAT, 7 OKTOBER 2022 | 13:30—15:30 | OPEN BOOK AND LAPTOP

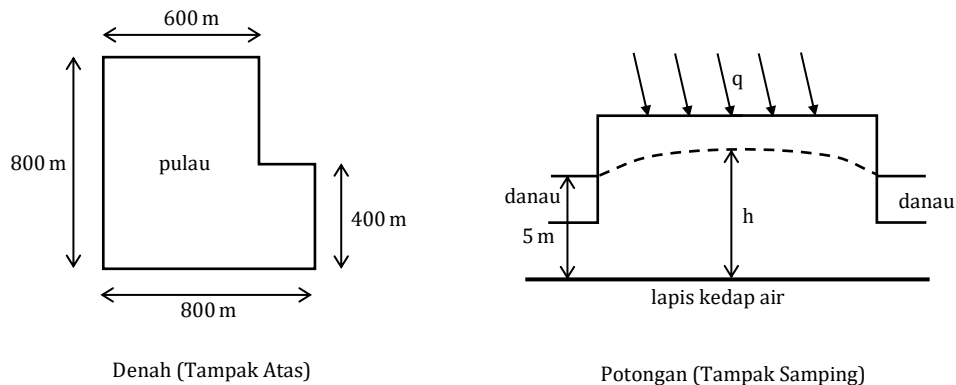
Tuliskan jawaban Saudara di lembar jawaban dengan tulisan yang rapi dan mudah dibaca. Jika hitungan dilakukan secara iterasi, tuliskan (salin) baris-baris awal dan akhir tabel hitungan.

SOAL 1: METODE BEDA HINGGA (CP: A1, A2, A3, K1; BOBOT 50%)

Persamaan tebal akuifer, h , disederhanakan menjadi

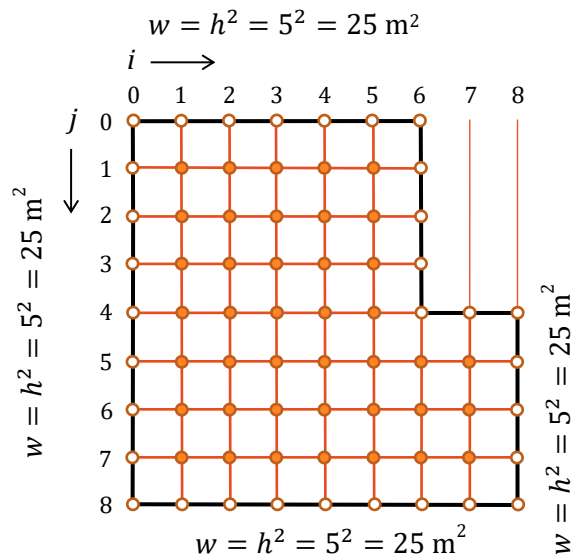
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q$$

dengan x dan y adalah koordinat arah timur dan selatan, $w = h^2$, dan q adalah konstanta sumber (*source*) atau hisap (*sink*) yang juga dapat merupakan fungsi x dan y . Susun penyelesaian PDP (persamaan diferensial parsial) tersebut dengan menggunakan metode beda hingga untuk tebal akuifer di sebuah pulau di tengah-tengah danau dan di atas lapis kedap air horizontal. Bentuk pulau seperti gambar di bawah. Batas keliling daerah hitungan adalah elevasi muka air danau setinggi 5 m di atas muka lapis kedap air. Dimensi pulau dapat dilihat pada gambar. Gunakan panjang pias seragam, $\Delta x = \Delta y = 100$ m, dan $q = 0,001$. Penyelesaian persamaan diskret menggunakan metode iterasi dan boleh memakai bantuan aplikasi *spreadsheet* di komputer.



PENYELESAIAN

Langkah pertama penyelesaian persamaan diferensial parsial kedalaman air tanah di atas lapis kedap air (tebal air tanah) adalah diskretisasi domain hitung. Domain hitung ke arah timur dan selatan dibagi menjadi sejumlah pias setiap jarak $\Delta x = \Delta y = 100$ m. Ada 41 titik hitung dan 31 titik yang telah diketahui posisi muka air tanahnya.



Langkah kedua penyelesaian persamaan diferensial parsial tebal air tanah adalah pengubahan persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diskret tebal air tanah.

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} = q_{i,j}$$

Karena $\Delta x = \Delta y = 100$ m dan mengingat $q = -0,001$ (perhatikan nilai q yang negatif), maka persamaan di atas menjadi

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} = 100^2 \times (-0,001)$$

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} = -10$$

Persamaan di atas diubah menjadi bentuk di bawah ini untuk memfasilitasi penyelesaian persamaan dengan metode iterasi.

$$w_{i,j} = \frac{1}{4}(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} + 10)$$

Dengan memakai indeks iterasi n dan $n + 1$, persamaan iteratif metode SOR di kedua belas titik hitung adalah sebagai berikut

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + w_{i+1,j}^n + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Faktor relaksasi λ bernilai antara 0 s.d. 1 untuk skema *under relaxation* dan antara 1 s.d. 2 untuk skema *over relaxation*. Faktor relaksasi λ bernilai nol untuk skema Jacobi dan bernilai satu untuk skema Gauss-Seidel. Penerapan persamaan iteratif di atas ke titik-titik hitung menghasilkan 41 persamaan di bawah ini. Untuk menyingkat penulisan sistem persamaan, maka persamaan di titik-titik hitung interior, yang tidak bertetangga dengan titik yang sudah diketahui nilai tebal air tanahnya, dituliskan dengan indeks i dan j .

Titik-titik hitung interior.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + w_{i+1,j}^n + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Persamaan di titik-titik hitung yang bertetangga dengan titik yang telah diketahui tebal air tanahnya dikelompokkan menjadi delapan jenis.

Titik $w_{i-1,j}$ dan $w_{i,j-1}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(25 + w_{i+1,j}^n + 25 + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Titik $w_{i,j-1}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + w_{i+1,j}^n + 25 + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Titik $w_{i+1,j}$ dan $w_{i,j-1}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + 25 + 25 + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Titik $w_{i-1,j}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(25 + w_{i+1,j}^n + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Titik $w_{i+1,j}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + 25 + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + w_{i,j+1}^n + 10)$$

Titik $w_{i-1,j}$ dan $w_{i,j+1}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(25 + w_{i+1,j}^n + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + 25 + 10)$$

Titik $w_{i,j+1}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + w_{i+1,j}^n + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + 25 + 10)$$

Titik $w_{i+1,j}$ dan $w_{i,j+1}$ berada di batas domain hitung.

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\lambda w_{i-1,j}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i-1,j}^n + 25 + \lambda w_{i,j-1}^{n+1} + (1 - \lambda)w_{i,j-1}^n + 25 + 10)$$

Langkah ketiga penyelesaian persamaan diferensial parsial tebal air tanah adalah penyelesaian sistem persamaan linear yang dibentuk oleh persamaan diskret di atas. Hitungan iterasi dilakukan secara tabulasi. Karena jumlah titik hitung yang banyak, maka penyelesaian dilakukan dengan bantuan fitur yang ada dalam Microsoft Excel. Skema iterasi yang dipakai adalah skema Jacobi, yaitu dengan menolkan faktor relaksasi, $\lambda = 0$. Tabel di bawah ini adalah rekaman tabel hitungan $w_{i,j}$ dalam Microsoft Excel¹. Variabel $w_{i,j}$ bersatuan meter persegi.

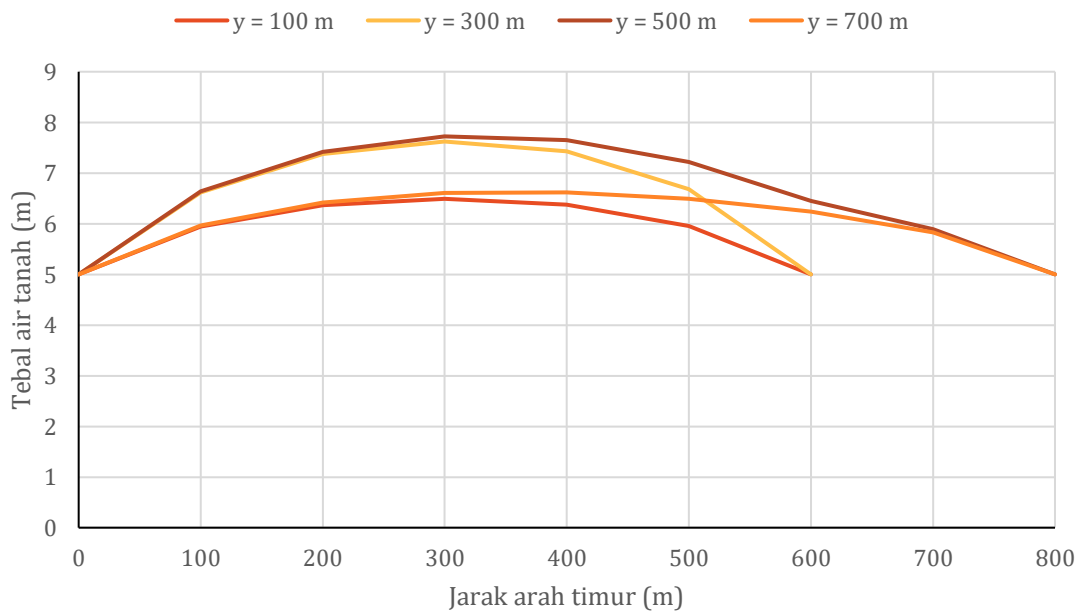
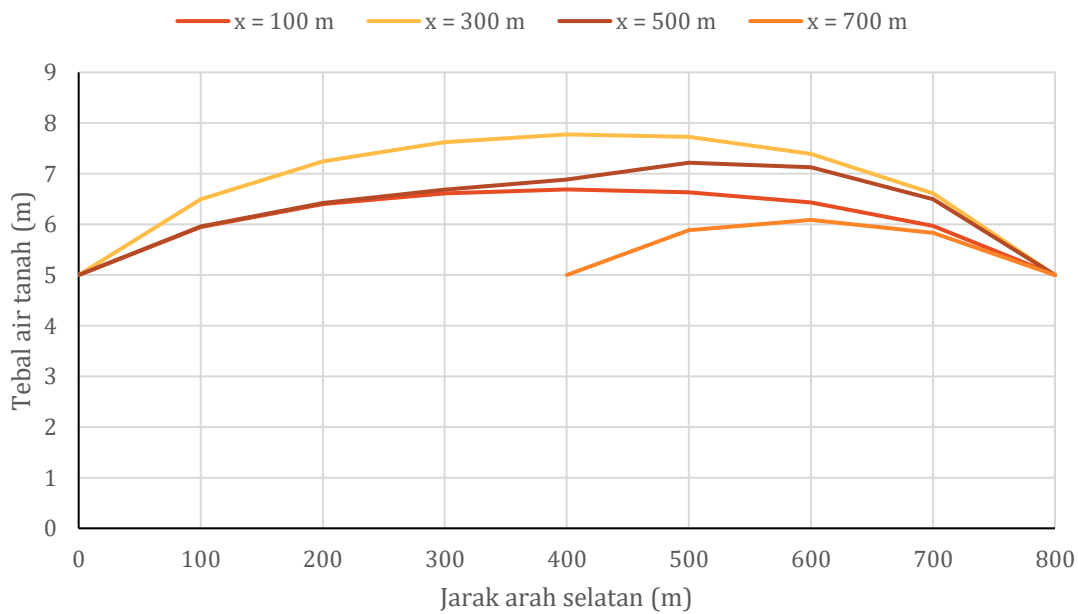
j	y (m)	$i \rightarrow$ x (m) \rightarrow	0	1	2	3	4	5	6	7	8
			0	100	200	300	400	500	600	700	800
0	0		25	25	25	25	25	25	25	---	---
1	100		25	35,359	40,514	42,135	40,614	35,467	25	---	---
2	200		25	40,922	49,563	52,413	49,854	41,256	25	---	---
3	300		25	43,767	54,402	58,100	55,133	44,701	25	---	---
4	400		25	44,745	56,176	60,453	57,877	47,414	25	25	25
5	500		25	44,038	55,104	59,658	58,509	52,079	41,585	34,662	25
6	600		25	41,302	50,544	54,566	54,421	50,808	44,598	37,065	25
7	700		25	35,626	41,203	43,642	43,799	42,135	38,933	34,000	25
8	800		25	25	25	25	25	25	25	25	25

¹ Fitur hitungan iterasi dalam Microsoft Excel perlu diaktifkan. Pilih menu *File | Options | Formulas*. Di bagian *Calculation options*, klik *Enable iterative calculation* untuk mengaktifkan fitur hitungan iterasi. Biarkan isian *Maximum Iterations* 100 dan *Maximum Change* 0,001. Dalam sistem operasi MacOS, pengaktifan fitur hitungan iterasi Microsoft Excel dilakukan melalui menu *Excel | Preferences*. Di bagian *Formulas and Lists*, pilih *Calculation*. Klik *Use iterative calculation*.

Tabel di bawah ini adalah nilai tebal lapis air tanah yang diperoleh dari akar kuadrat angka-angka dalam tabel di atas, $h = \sqrt{w}$, dalam satuan meter.

j	y (m)	$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
		x (m) \rightarrow	0	100	200	300	400	500	600	700	800
0	0		5	5	5	5	5	5	5	---	---
1	100		5	5,95	6,37	6,49	6,37	5,96	5	---	---
2	200		5	6,40	7,04	7,24	7,06	6,42	5	---	---
3	300		5	6,62	7,38	7,62	7,43	6,69	5	---	---
4	400		5	6,69	7,50	7,78	7,61	6,89	5	5	5
5	500		5	6,64	7,42	7,72	7,65	7,22	6,45	5,89	5
6	600		5	6,43	7,11	7,39	7,38	7,13	6,68	6,09	5
7	700		5	5,97	6,42	6,61	6,62	6,49	6,24	5,83	5
8	800		5	5	5	5	5	5	5	5	5

Gambar di bawah ini menampilkan profil tebal air tanah arah sumbu y dan sumbu x .



Istiarto • <https://istiarto.staff.ugm.ac.id> • Email: istiarto@ugm.ac.id

SOAL 2: METODE VOLUME HINGGA (CP: A1, A2, A3, K1; BOBOT 50%)

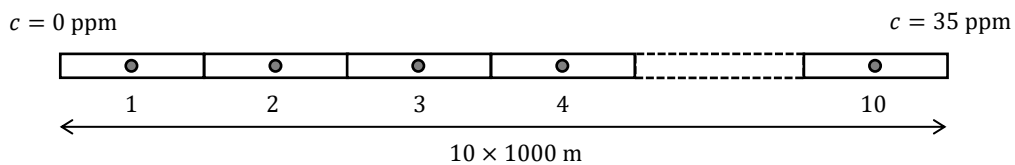
Di suatu muara sungai yang memiliki tampang hampir seragam, dinamika intrusi air asin ke hulu dapat didekati dengan persamaan

$$U \frac{\partial c}{\partial x} - k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

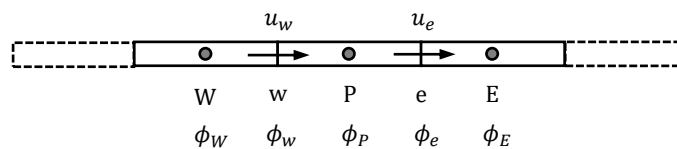
Dalam persamaan di atas, c adalah konsentrasi garam dalam satuan ppm. Syarat batas (*boundary conditions*) di hulu ($x = 0$ m) adalah $c(0) = 0$ ppm dan di hilir ($x = 10.000$ m) adalah $c(10.000) = 35$ ppm. Kecepatan aliran dan koefisien difusi diketahui, yaitu $U = 1,12$ m/s dan $k = 1.600$ m²/s. Lebar sungai adalah 98 m dan kedalaman aliran 8,1 m. Gunakan skema *upwind* untuk melakukan interpolasi nilai konsentrasi garam c di sisi/batas sel (*control volume*) dan ukuran sel $\Delta x = 1.000$ m. Hitung dan gambarkan konsentrasi garam di sepanjang 10.000 m muara sungai.

PENYELESAIAN

Langkah pertama penyelesaian intrusi air asin ke hulu adalah diskretisasi domain hitung. Alur sungai sepanjang 10 ribu meter dibagi menjadi 10 volume kontrol berjarak seragam, $\Delta x = 1.000$ meter.



Langkah kedua penyelesaian intrusi air asin adalah penjabaran persamaan konveksi-difusi menjadi persamaan diskret. Persamaan diskret konveksi-difusi di suatu volume kontrol adalah



$$[(uS)_e \phi_e - (uS)_w \phi_w] - \left[\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} S \right)_w \right] = \bar{R} \Delta V$$

$$[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = \bar{R} \Delta V$$

Dalam persamaan di atas, variabel ϕ adalah konsentrasi garam, $\phi = c$. Dalam soal intrusi air asin, diketahui bahwa kecepatan aliran di sepanjang alur sungai adalah seragam, koefisien difusi seragam, lebar sungai seragam, kedalaman aliran seragam, panjang sel seragam, dan tidak ada *source/sink*. Perhatikan, diferensial parsial dalam persamaan intrusi air asin dituliskan dalam bentuk diferensial biasa, $\partial \phi / \partial x = d\phi / dx$, karena konsentrasi garam merupakan fungsi spasial (x) saja.

$$u_e = u_w = U = 1,12 \text{ m/s (arah aliran ke hilir, searah sumbu } x).$$

$$\Gamma_e = \Gamma_w = k = 1600 \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$S_e = S_w = S = 98 \times 8,1 = 793,8 \text{ m}^2.$$

$$\Delta x_{PE} = \Delta x_{WP} = \Delta x = 1000 \text{ m}.$$

$$\bar{R}\Delta V = 0 \text{ ppm}\cdot\text{m}^3/\text{s}.$$

Dengan menggunakan skema *upwind difference*, konsentrasi garam di batas volume kontrol, ϕ_e dan ϕ_w , adalah

$$u_e = 1,12 \text{ m/s} \Rightarrow \phi_e = \phi_P$$

$$u_w = 1,12 \text{ m/s} \Rightarrow \phi_w = \phi_W$$

Dengan demikian, persamaan diskret konveksi-difusi di suatu volume kontrol menjadi

$$[u_e S_e \phi_P - u_w S_w \phi_W] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = \bar{R}\Delta V$$

$$\left(-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} \right) \phi_E = \bar{R}\Delta V$$

Koefisien-koefisien ϕ_W , ϕ_P , dan ϕ_E dalam persamaan di atas adalah

$$-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} = -1,12 \times 793,8 - \frac{1600 \times 793,8}{1000} = -2159,136$$

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x_{WP}} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = \frac{1600 \times 793,8}{1000} + 1,12 \times 793,8 + \frac{1600 \times 793,8}{1000} = 3429,216$$

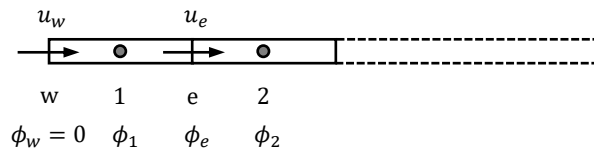
$$-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x_{PE}} = -\frac{1600 \times 793,8}{1000} = -1270,080$$

Persamaan intrusi air asin di suatu volume menjadi

$$\Rightarrow -2159,136\phi_W + 3429,216\phi_P - 1270,080\phi_E = 0$$

Persamaan di atas berlaku di volume kontrol nomor 2 s.d. 9. Untuk volume kontrol yang berada di batas domain hitung, perlu dilakukan penjabaran yang berbeda dengan penjabaran persamaan di volume kontrol nomor 2 s.d. 9.

Volume kontrol nomor 1.



$$[u_e S_e \phi_1 - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_1 - \phi_w}{\Delta x_{WP}} \right) \right] = \bar{R}\Delta V$$

$$\left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} \right) \phi_1 + \left(-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} \right) \phi_2 = \bar{R}\Delta V + \left(u_w S_w + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2} \right) \phi_w$$

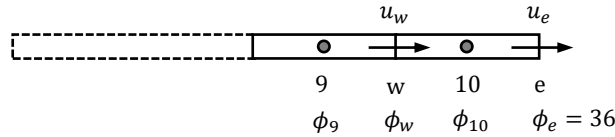
$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2} + u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} = \frac{1600 \times 793,8}{1000/2} + 1,12 \times 793,8 + \frac{1600 \times 793,8}{1000} = 4699,296$$

$$-\frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} = -\frac{1600 \times 793,8}{1000} = -1270,080$$

$$\bar{R}\Delta V + \left(u_w S_w + \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x/2}\right) \phi_w = 0 + \left(1,12 \times 793,8 + \frac{1600 \times 793,8}{1000/2}\right) \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow 4699,296\phi_1 - 1270,080\phi_2 = 0$$

Volume kontrol nomor 10.



$$[u_e S_e \phi_e - u_w S_w \phi_w] - \left[\Gamma_e S_e \left(\frac{\phi_e - \phi_{10}}{\Delta x_{pe}}\right) - \Gamma_w S_w \left(\frac{\phi_{10} - \phi_9}{\Delta x_{wp}}\right)\right] = \bar{R}\Delta V$$

$$\left(-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x}\right) \phi_9 + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2}\right) \phi_{10} = \bar{R}\Delta V + \left(-u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2}\right) \phi_e$$

$$-u_w S_w - \frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} = -1,12 \times 793,8 - \frac{1600 \times 793,8}{1000} = -2159,136$$

$$\frac{\Gamma_w S_w}{\Delta x} + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2} = \frac{1600 \times 793,8}{1000} + \frac{1600 \times 793,8}{1000/2} = 3810,240$$

$$\bar{R}\Delta V + \left(-u_e S_e + \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x/2}\right) \phi_e = 0 + \left(-1,12 \times 793,8 + \frac{1600 \times 793,8}{1000/2}\right) \times 35 = 57788,640$$

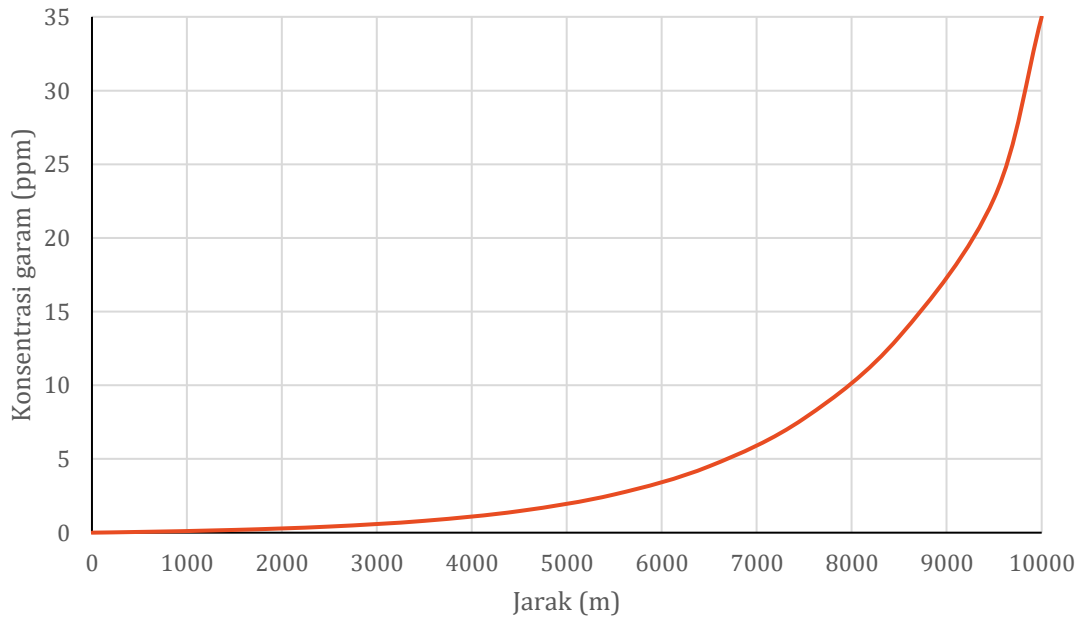
$$\Rightarrow -2159,136\phi_9 + 3810,240\phi_{10} = 57788,640$$

Sepuluh persamaan di semua volume kontrol, yang dituliskan dalam bentuk perkalian matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 4699,296 & -1270,080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2159,136 & 3429,216 & -1270,080 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2159,136 & 3810,240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 57788,640 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian perkalian matriks di atas dengan bantuan *spreadsheet* menghasilkan nilai-nilai konsentrasi garam di setiap volume kontrol, dalam satuan ppm.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,050 \\ 0,185 \\ 0,414 \\ 0,804 \\ 1,466 \\ 2,592 \\ 4,507 \\ 7,761 \\ 13,294 \\ 22,700 \end{Bmatrix}$$



-o0o-