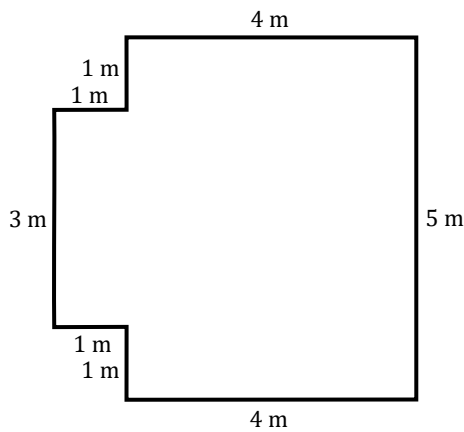


# UJIAN TENGAH SEMESTER

## SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL

JUMAT, 6 OKTOBER 2023 | 13:30—15:30 | OPEN BOOK AND LAPTOP

### SOAL 1: CP A1, A2, A3, K1 (BOBOT NILAI 50%)



Persamaan lendutan pelat disederhanakan menjadi

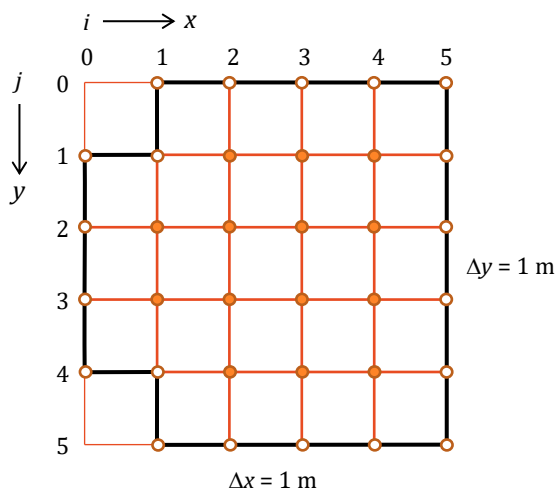
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q$$

Dalam persamaan di atas,  $x$  dan  $y$  adalah koordinat arah timur dan utara,  $w$  adalah lendutan, dan  $q$  adalah konstan. Susun penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut dengan menggunakan metode beda hingga untuk kasus pelat dengan bentuk dan dimensi seperti gambar di samping. Batas keliling

pelat dianggap sendi. Gunakan panjang pias  $\Delta x = \Delta y = 1$  m dan  $q = 0,01$ . Penyelesaian persamaan diskret menggunakan metode iterasi dan boleh memakai bantuan aplikasi *spreadsheet* di komputer.

### PENYELESAIAN

Langkah pertama penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah diskretisasi domain hitung. Domain hitung ke arah timur (absis, sumbu  $x$ ) dan arah selatan (ordinat, sumbu  $y$ ) dibagi menjadi sejumlah pias berjarak  $\Delta x = \Delta y = 1$  m. Ada 14 titik hitung dan 20 titik yang telah diketahui lendutannya, yaitu di tumpuan sendi yang tidak melendut,  $w = 0$ .



○ Syarat batas,  $w = 0$  m

Arah ordinat (sumbu  $y$ ) dibuat ke arah bawah (selatan) untuk memudahkan pembacaan persamaan dan angka-angka lendutan, yaitu dari kiri ke kanan dan dari atas ke bawah.

Langkah kedua penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah pengubahan persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diskret lendutan pelat.

$$\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} = q_{i,j}$$

Karena  $\Delta x = \Delta y = 1$  m dan mengingat  $q = 0,01$ , maka persamaan di atas menjadi

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} = 0,01 \times 1^2$$

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} = 0,01$$

Persamaan di atas diubah menjadi bentuk di bawah ini untuk memfasilitasi penyelesaian persamaan dengan metode iterasi.

$$w_{i,j} = \frac{1}{4}(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - 0,01)$$

Dengan memakai indeks iterasi  $n$  dan  $n + 1$ , persamaan iteratif metode Jacobi di 14 titik hitung adalah sebagai berikut

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(w_{i-1,j}^n + w_{i+1,j}^n + w_{i,j-1}^n + w_{i,j+1}^n - 0,01)$$

Sejumlah titik hitung bertetangga dengan titik tumpu sendi, yang tidak melendut,  $w = 0$ . Keempat belas persamaan lendutan di 14 titik hitung disajikan dalam tabel di bawah ini.

Pers. #	$i$	$j$	Persamaan
1	2	1	$w_{2,1} = \frac{1}{4}(0 + w_{3,1} + 0 + w_{2,2} - 0,01)$
2	3	1	$w_{3,1} = \frac{1}{4}(w_{2,1} + w_{4,1} + 0 + w_{3,2} - 0,01)$
3	4	1	$w_{4,1} = \frac{1}{4}(w_{3,1} + 0 + 0 + w_{4,2} - 0,01)$
4	1	2	$w_{1,2} = \frac{1}{4}(0 + w_{2,2} + 0 + w_{1,3} - 0,01)$
5	2	2	$w_{2,2} = \frac{1}{4}(w_{1,2} + w_{3,2} + w_{2,1} + w_{2,3} - 0,01)$
6	3	2	$w_{3,2} = \frac{1}{4}(w_{2,2} + w_{4,2} + w_{3,1} + w_{3,3} - 0,01)$
7	4	2	$w_{4,2} = \frac{1}{4}(w_{3,2} + 0 + w_{4,1} + w_{4,3} - 0,01)$
8	1	3	$w_{1,3} = \frac{1}{4}(0 + w_{2,3} + w_{1,2} + 0 - 0,01)$
9	2	3	$w_{2,3} = \frac{1}{4}(w_{1,3} + w_{3,3} + w_{2,2} + w_{2,4} - 0,01)$
10	3	3	$w_{3,3} = \frac{1}{4}(w_{2,3} + w_{4,3} + w_{3,2} + w_{3,4} - 0,01)$
11	4	3	$w_{4,3} = \frac{1}{4}(w_{3,3} + 0 + w_{4,2} + w_{4,4} - 0,01)$
12	2	4	$w_{2,4} = \frac{1}{4}(0 + w_{3,4} + w_{2,3} + 0 - 0,01)$
13	3	4	$w_{3,4} = \frac{1}{4}(w_{2,4} + w_{4,4} + w_{3,3} + 0 - 0,01)$
14	4	4	$w_{4,4} = \frac{1}{4}(w_{3,4} + 0 + w_{4,3} + 0 - 0,01)$

Langkah ketiga penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah penyelesaian sistem persamaan linear yang dibentuk oleh persamaan diskret di atas. Hitungan iterasi dilakukan secara tabulasi. Karena jumlah titik hitung yang banyak, maka penyelesaian secara iterasi dilakukan dengan bantuan fitur yang ada dalam Microsoft Excel. Untuk memfasilitasi hitungan iterasi ini, maka perlu dilakukan pengaturan Microsoft Excel terlebih dulu. Pilih menu *File | Options | Formulas*. Di bagian *Calculation options*, klik *Enable iterative calculation* untuk mengaktifkan fitur hitungan iterasi. Biarkan isian *Maximum Iterations* 100 dan *Maximum Change* 0,001. Dalam sistem operasi MacOS, pengaktifan fitur hitungan iterasi Microsoft Excel dilakukan melalui menu *Excel |*

*Preferences*. Di bagian *Formulas and Lists*, pilih *Calculation*. Klik *Use iterative calculation* untuk mengaktifkan fitur hitungan iterasi. Jika fitur hitungan iterasi tidak aktif, maka Microsoft Excel akan memberikan pesan kesalahan “*Circular references*”.

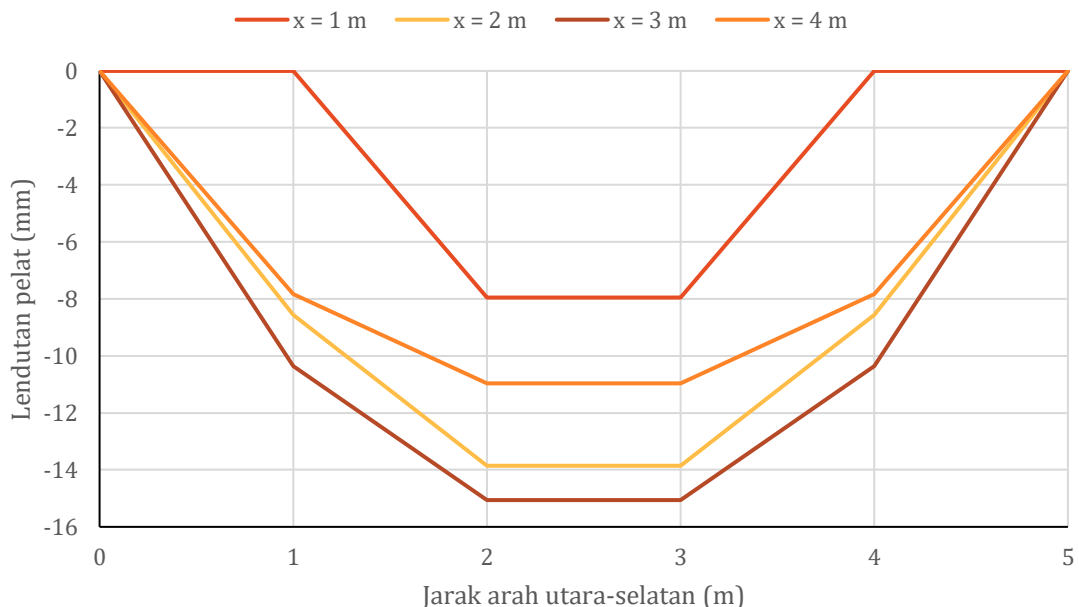
Tabel di bawah ini adalah rekaman tabel hitungan  $w_{i,j}$  dalam Microsoft Excel. Variabel  $w_{i,j}$  bersatuan meter.

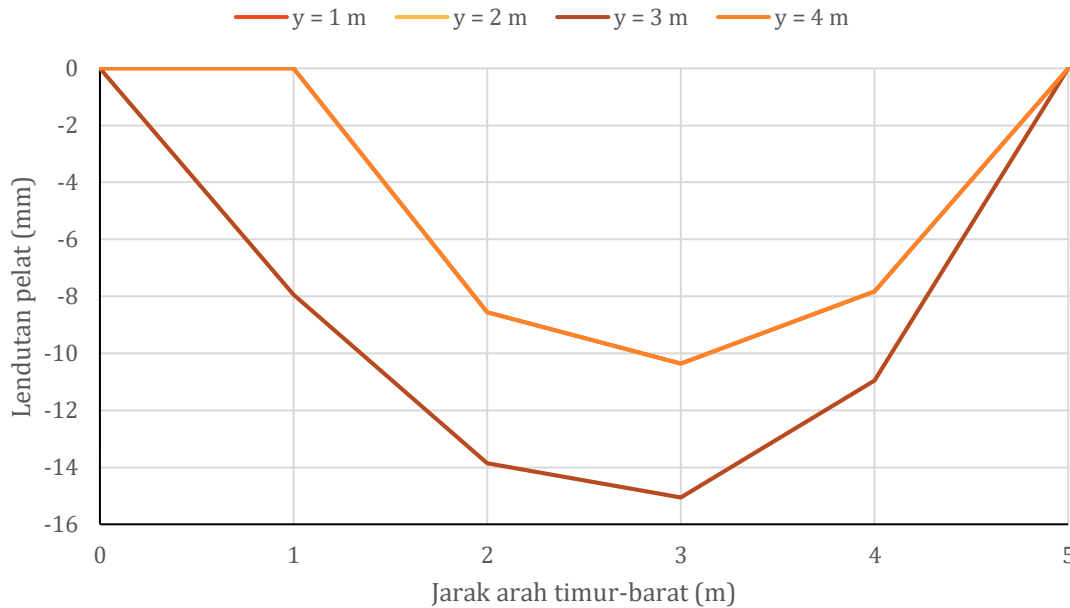
$w$ (m)		$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5
$j$	$y$ (m)	$x$ (m) $\rightarrow$	0	1	2	3	4	5
0	0		---	0	0	0	0	0
1	1		0	0	-0,0086	-0,0104	-0,0078	0
2	2		0	-0,0080	-0,0139	-0,0151	-0,0110	0
3	3		0	-0,0080	-0,0139	-0,0151	-0,0110	0
4	4		0	0	-0,0086	-0,0104	-0,0078	0
5	5		---	0	0	0	0	0

Untuk memudahkan pembacaan lendutan pelat, maka  $w_{i,j}$  dinyatakan dalam satuan milimeter seperti disajikan dalam tabel berikut ini.

$w$ (mm)		$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5
$j$	$y$ (m)	$x$ (m) $\rightarrow$	0	1	2	3	4	5
0	0		---	0	0	0	0	0
1	1		0	0	-8,6	-10,4	-7,8	0
2	2		0	-8,0	-13,9	-15,1	-11,0	0
3	3		0	-8,0	-13,9	-15,1	-11,0	0
4	4		0	0	-8,6	-10,4	-7,8	0
5	5		---	0	0	0	0	0

Untuk memudahkan pembacaan profil lendutan pelat, maka angka-angka dalam tabel di atas ditampilkan dalam bentuk kurva di beberapa tampang arah utara-selatan (arah sumbu  $y$ ) dan arah timur-barat (arah sumbu  $x$ ).





### SOAL 2: METODE VOLUME HINGGA (CP: A1, A2, A3, K1; BOBOT 50%)

Di suatu muara sungai yang memiliki tampang hampir seragam, dinamika intrusi air asin ke hulu dapat didekati dengan persamaan

$$U \frac{\partial c}{\partial x} - k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

Dalam persamaan di atas,  $c$  adalah konsentrasi garam dalam satuan ppm. Syarat batas (*boundary conditions*) di hulu ( $x = 0$  m) adalah  $c(0) = 0$  ppm dan di hilir ( $x = 10.000$  m) adalah  $c(10.000) = 40$  ppm. Kecepatan aliran dan koefisien difusi diketahui, yaitu  $U = 0,6$  m/s dan  $k = 1.100$  m<sup>2</sup>/s. Lebar sungai adalah 115 m dan kedalaman aliran 2,7 m. Gunakan skema **central difference** untuk melakukan interpolasi nilai konsentrasi garam  $c$  di sisi/batas sel (*control volume*) dan ukuran sel  $\Delta x = 1.000$  m.

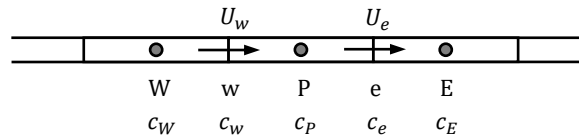
- Tuliskan persamaan diskret dinamika intrusi air asin menurut metode volume hingga.
- Buat sketsa domain hitung dan diskretisasinya.
- Tuliskan persamaan diskret di setiap volume kontrol.
- Hitung konsentrasi garam di sepanjang 10.000 m muara sungai.
- Gambarkan konsentrasi garam di sepanjang 10.000 m muara sungai.

### PENYELESAIAN

a. Persamaan dinamika intrusi air asin menurut metode volume hingga adalah

$$\iiint U \frac{\partial c}{\partial x} dV - \iiint k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dV = \iiint 0 dV$$

Karena konsentrasi garam merupakan fungsi spasial saja, maka persamaan diferensial parsialnya dapat diubah menjadi persamaan diferensial biasa,  $\partial c / \partial x = dc / dx$ . Selanjutnya, untuk suatu volume kontrol, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut.



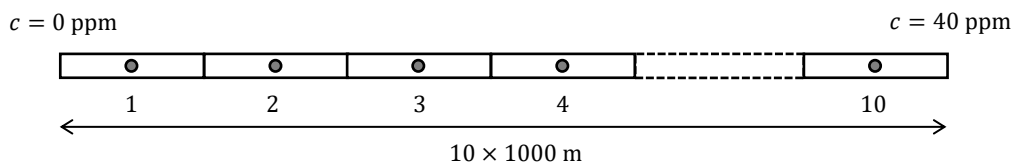
$$\iint (Uc)\vec{n} \cdot d\vec{S} - \iint \left(k \frac{dc}{dx}\right) \vec{n} \cdot d\vec{S} = \iiint 0dV$$

$$[-(UcS)_w + (UcS)_e] - \left[-\left(k \frac{dc}{dx} S\right)_w + \left(k \frac{dc}{dx} S\right)_e\right] = 0$$

Dalam persamaan di atas,  $S$  adalah luas bidang sisi volume kontrol. Skema *central difference* dipakai untuk menyatakan nilai konsentrasi garam di bidang-bidang sisi volume kontrol,  $c_w$  dan  $c_e$ . Persamaan diskret dinamika air asin menjadi

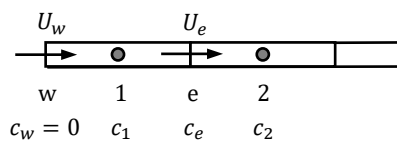
$$\left[-U_w S_w \left(\frac{c_W + c_P}{2}\right) + U_e S_e \left(\frac{c_P + c_E}{2}\right)\right] - \left[-k_w S_w \left(\frac{c_P - c_W}{\Delta x}\right) + k_e S_e \left(\frac{c_E - c_P}{\Delta x}\right)\right] = 0$$

- b. Domain hitung alur sungai sepanjang 10 ribu meter dibagi menjadi 10 volume kontrol berjarak seragam,  $\Delta x = 1000$  meter.



- c. Persamaan diskret dinamika intrusi air asin di volume kontrol dapat dikelompokkan menjadi tiga, yaitu persamaan di volume kontrol #1, di volume kontrol #2 s.d. #9, dan di volume kontrol #10.

Di volume kontrol #1, yang merupakan batas hulu domain, persamaan diskret dinamika intrusi air asin adalah



$$\left[-U_w S_w (c_w) + U_e S_e \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)\right] - \left[-k_w S_w \left(\frac{c_1 - c_w}{\Delta x/2}\right) + k_e S_e \left(\frac{c_2 - c_1}{\Delta x}\right)\right] = 0$$

$$\left(\frac{U_e S_e}{2} + \frac{k_w S_w}{\Delta x/2} + \frac{k_e S_e}{\Delta x}\right) c_1 + \left(\frac{U_e S_e}{2} - \frac{k_e S_e}{\Delta x}\right) c_2 = \left(U_w S_w + \frac{k_w S_w}{\Delta x/2}\right) c_w$$

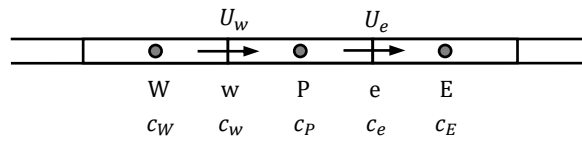
$$\left(\frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000/2} + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000}\right) c_1$$

$$+ \left(\frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} - \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000}\right) c_2$$

$$= \left(0,6 \times 115 \times 2,7 + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000/2}\right) \times 0$$

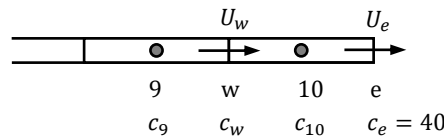
$$\Rightarrow 1117,8c_1 - 248,4c_2 = 0$$

Di volume kontrol #2 s.d. #9, persamaan diskret dinamika intrusi air asin adalah



$$\begin{aligned} & \left[ -U_w S_w \left( \frac{c_W + c_P}{2} \right) + U_e S_e \left( \frac{c_P + c_E}{2} \right) \right] - \left[ -k_w S_w \left( \frac{c_P - c_W}{\Delta x} \right) + k_e S_e \left( \frac{c_E - c_P}{\Delta x} \right) \right] = 0 \\ & \left( -\frac{U_w S_w}{2} - \frac{k_w S_w}{\Delta x} \right) c_W + \left( -\frac{U_w S_w}{2} + \frac{U_e S_e}{2} + \frac{k_w S_w}{\Delta x} + \frac{k_e S_e}{\Delta x} \right) c_P + \left( \frac{U_e S_e}{2} - \frac{k_e S_e}{\Delta x} \right) c_E = 0 \\ & \left( -\frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} - \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000} \right) c_W \\ & + \left( -\frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} + \frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000} \right. \\ & \left. + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000} \right) c_P + \left( \frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} - \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000} \right) c_E = 0 \\ & \Rightarrow -434,7c_W + 683,1c_P - 248,4c_E = 0 \end{aligned}$$

Di volume kontrol #10, yang merupakan batas hilir domain, persamaan diskret dinamika intrusi air asin adalah



$$\begin{aligned} & \left[ -U_w S_w \left( \frac{c_9 + c_{10}}{2} \right) + U_e S_e (c_e) \right] - \left[ -k_w S_w \left( \frac{c_{10} - c_9}{\Delta x} \right) + k_e S_e \left( \frac{c_e - c_{10}}{\Delta x/2} \right) \right] = 0 \\ & \left( -\frac{U_w S_w}{2} - \frac{k_w S_w}{\Delta x} \right) c_9 + \left( -\frac{U_w S_w}{2} + \frac{k_w S_w}{\Delta x} + \frac{k_e S_e}{\Delta x/2} \right) c_{10} = \left( -U_e S_e + \frac{k_e S_e}{\Delta x/2} \right) c_e \\ & \left( -\frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} - \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000} \right) c_9 \\ & + \left( -\frac{0,6 \times 115 \times 2,7}{2} + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000} + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000/2} \right) c_{10} \\ & = \left( -0,6 \times 115 \times 2,7 + \frac{1100 \times 115 \times 2,7}{1000/2} \right) \times 40 \\ & \Rightarrow -434,7c_9 + 931,5c_{10} = 19872 \end{aligned}$$

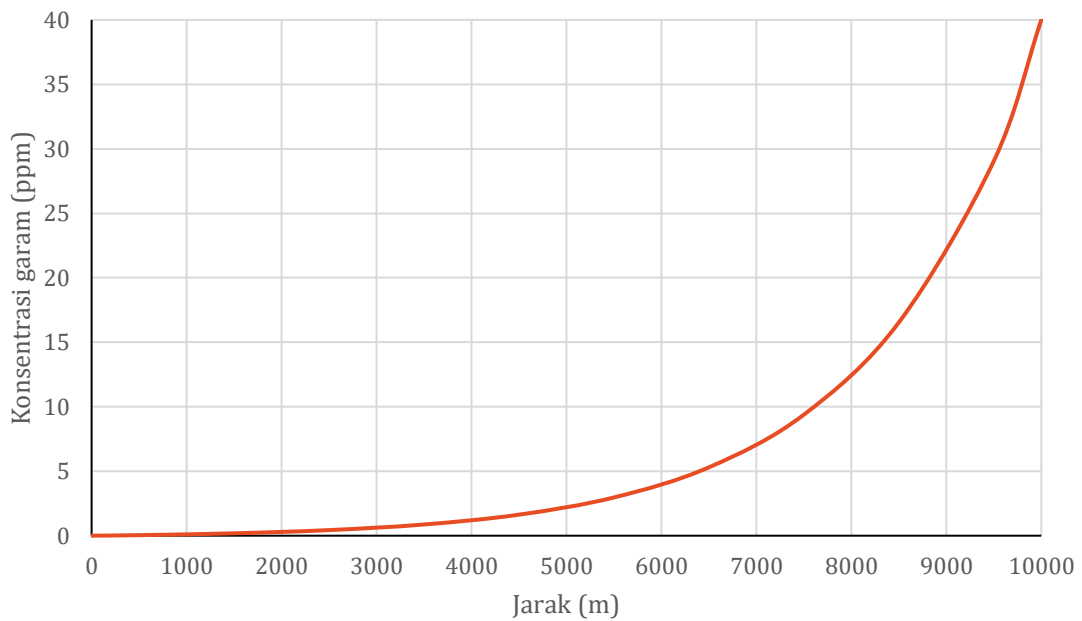
d. Sepuluh persamaan di semua volume kontrol, yang dituliskan dalam bentuk perkalian matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 1117,8 & -248,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -434,7 & 683,1 & -248,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -434,7 & 931,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19872 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian perkalian matriks di atas dengan bantuan *spreadsheet* menghasilkan nilai-nilai konsentrasi garam di setiap volume kontrol, dalam satuan ppm.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,04 \\ 0,18 \\ 0,43 \\ 0,87 \\ 1,63 \\ 2,96 \\ 5,30 \\ 9,39 \\ 16,54 \\ 29,05 \end{Bmatrix}$$

e. Profil kadar garam di sepanjang 10 km alur sungai disajikan dalam gambar berikut.



-o0o-