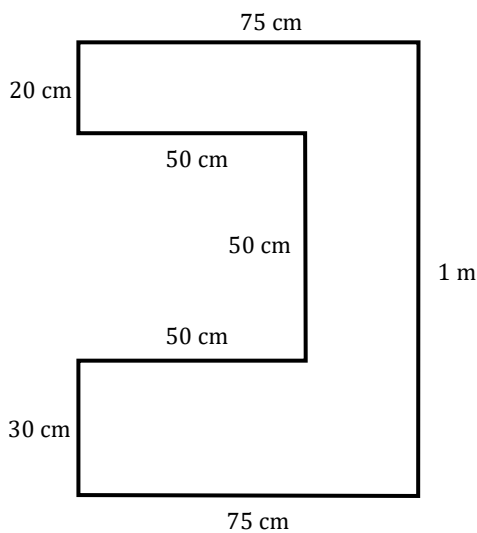


UJIAN TENGAH SEMESTER

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL

JUMAT, 4 OKTOBER 2024 | 13:30—15:30 | BUKU TERTUTUP

SOAL 1: CP A1, A2, A3, K1 (BOBOT NILAI 50%)



Persamaan lendutan pelat dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

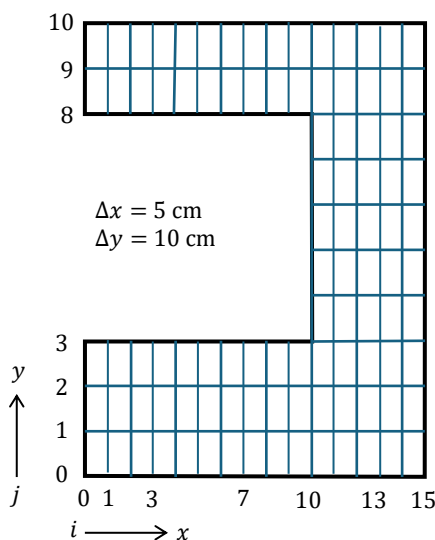
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Variabel x dan y adalah koordinat arah timur dan utara, w adalah lendutan (dalam cm), dan q adalah konstan. Susun penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut dengan menggunakan metode beda hingga untuk kasus pelat dengan bentuk dan dimensi seperti gambar.

Batas keliling pelat dianggap sendi. Nilai $q = 5$. Susunlah persamaan diskret di seluruh titik interior (titik hitung). Nilai Δx dan Δy **maksimal** adalah 10 cm.

PENYELESAIAN

Langkah pertama penyelesaian persamaan diferensial parsial lendutan pelat adalah diskretisasi domain hitung. Domain hitung ke arah timur (absis, sumbu x) dan arah utara (ordinat, sumbu y) dibagi menjadi sejumlah pias berjarak $\Delta x = 5$ cm dan $\Delta y = 10$ cm. Ada 66 titik hitung dan 61 titik yang telah diketahui lendutannya, yaitu $w = 0$ di tumpuan sendi.



Titik hitung adalah di titik-titik persilangan garis-garis berwarna merah di gambar samping kiri.

Persamaan diskret lendutan di titik hitung adalah

$$\frac{w_{i+1,j} + 2w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$= q$$

$$\Rightarrow \Delta y^2 (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})$$

$$+ \Delta x^2 (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})$$

$$= \Delta y^2 \Delta x^2 q$$

$$\Rightarrow \Delta y^2 w_{i-1,j} + \Delta y^2 w_{i+1,j} + \Delta x^2 w_{i,j-1} + \Delta x^2 w_{i,j+1} - (2\Delta y^2 + 2\Delta x^2) w_{i,j} = \Delta y^2 \Delta x^2 q$$

Untuk memfasilitasi penyelesaian persamaan di atas dengan **hitungan iteratif metode Jacobi**, maka persamaan di atas dituliskan dalam bentuk

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{(2\Delta y^2 + 2\Delta x^2)} (\Delta y^2 w_{i-1,j}^n + \Delta y^2 w_{i+1,j}^n + \Delta x^2 w_{i,j-1}^n + \Delta x^2 w_{i,j+1}^n - \Delta y^2 \Delta x^2 q)$$

Superskrip n dalam persamaan di atas merujuk pada nomor urut iterasi hitungan. Cara penyelesaian, tentu saja, tidak harus menggunakan metode Jacobi. Ada beberapa metode yang lain, misalnya metode Gauss-Seidel, metode SOR, operasi matriks. Substitusi nilai-nilai Δx , Δy , dan q ke persamaan itu memberikan persamaan

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{(2 \times 10^2 + 2 \times 5^2)} (10^2 w_{i-1,j}^n + 10^2 w_{i+1,j}^n + 5^2 w_{i,j-1}^n + 5^2 w_{i,j+1}^n - 10^2 \times 5^2 \times 5)$$

$$\Rightarrow w_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{250} (100 w_{i-1,j}^n + 100 w_{i+1,j}^n + 25 w_{i,j-1}^n + 25 w_{i,j+1}^n - 12500)$$

$$\Rightarrow w_{i,j}^{n+1} = 0.4 w_{i-1,j}^n + 0.4 w_{i+1,j}^n + 0.1 w_{i,j-1}^n + 0.1 w_{i,j+1}^n - 50$$

Persamaan di atas berlaku untuk titik-titik hitung (i, j) yang tidak bertetangga dengan batas domain hitung. Titik hitung (i, j) ini bertetangga dengan 4 titik hitung interior, yaitu $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, dan $(i, j+1)$. Apabila titik hitung (i, j) bertetangga dengan batas domain hitung, maka variabel w di batas domain hitung diketahui, yaitu $w = 0$ cm. Nilai ini disubstitusikan ke variabel w di batas domain hitung. Titik hitung (i, j) yang bertetangga dengan batas domain hitung dapat memiliki 1, 2, atau 3 tetangga batas domain hitung. Contoh titik hitung yang memiliki 1 titik tetangga di batas domain hitung adalah titik hitung (7,2). Persamaan di titik hitung (7,2) adalah

$$w_{7,2}^{n+1} = 0.4 w_{6,2}^n + 0.4 w_{8,2}^n + 0.1 w_{7,1}^n + 0 - 50$$

Contoh titik hitung yang memiliki 2 titik tetangga di batas domain hitung adalah titik hitung (7,9). Persamaan di titik hitung (7,9) adalah

$$w_{7,9}^{n+1} = 0.4 w_{6,9}^n + 0.4 w_{8,9}^n + 0 + 0 - 50$$

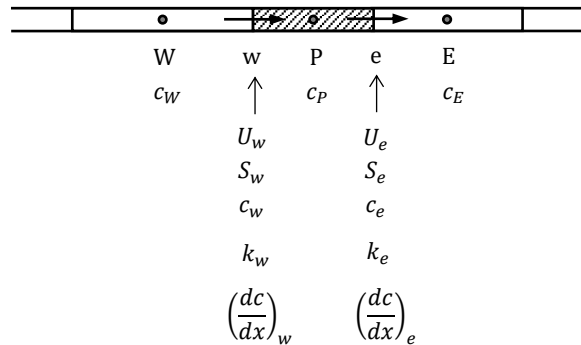
Contoh titik hitung yang memiliki 3 titik tetangga di batas domain hitung adalah titik hitung (1,9). Persamaan di titik hitung (1,9) adalah

$$w_{1,9}^{n+1} = 0 + 0.4 w_{2,9}^n + 0 + 0 - 50$$

SOAL 2: METODE VOLUME HINGGA (CP: A1, A2, A3, K1; BOBOT 50%)

Di suatu muara sungai yang memiliki tampang hampir seragam, dinamika intrusi air asin ke hulu dapat didekati dengan persamaan

Persamaan transpor konvektif-difusif di suatu volume kontrol dalam domain hitung yang dicacah menjadi sejumlah volume kontrol berukuran tak seragam, dalam kasus intrusi air asin di muara sungai dalam soal ini, adalah



$$\underbrace{[(U_e S_e)c_e - (U_w S_w)c_w]}_{\text{konveksi}} - \underbrace{\left[k_e \left(\frac{dc}{dx} \right)_e S_e - k_w \left(\frac{dc}{dx} \right)_w S_w \right]}_{\text{difusi}} = \underbrace{\bar{R} \Delta V}_{\text{source/sink}}$$

Source dan sink tidak ada di semua volume kontrol, sehingga $R = 0 \Rightarrow \bar{R} = 0$.

$$\underbrace{[(U_e S_e)c_e - (U_w S_w)c_w]}_{\text{konveksi}} - \underbrace{\left[k_e \left(\frac{dc}{dx} \right)_e S_e - k_w \left(\frac{dc}{dx} \right)_w S_w \right]}_{\text{difusi}} = 0$$

Skema *hybrid difference* memandu komponen konvektif dan difusif dalam persamaan transpor massa di atas. Apabila Angka Peclet di luar rentang -2 s.d. 2 , maka transpor konvektif dihitung dengan cara *upwind difference* dan transpor difusif diabaikan. Angka Peclet di volume kontrol terbesar (volume kontrol #7-#8) dan terkecil (volume kontrol #1-#2) di domain hitung adalah

$$Pe = \frac{US}{kS/\Delta x} = \frac{0.6 \times 300}{900 \times 300 / (500 + 500)} = 0.667$$

$$Pe = \frac{US}{kS/\Delta x} = \frac{0.6 \times 300}{900 \times 300 / (250 + 300)} = 0.367$$

Dengan demikian, Angka Peclet di semua volume kontrol berada dalam rentang -2 s.d. 2 , sehingga komponen konvektif dihitung dengan cara **central difference** dan **komponen difusif tidak diabaikan**. Skema *central difference* memandu variabel konsentrasi garam di sisi volume kontrol, c_w dan c_e . Variabel konsentrasi garam di sisi volume kontrol mengacu pada konsentrasi garam di volume kontrol kiri (*West*) dan volume kontrol kanan (*East*). Interpolasi nilai-nilai konsentrasi garam di kedua volume kontrol ini memberikan konsentrasi garam di sisi antara kedua volume kontrol.

$$c_w = \frac{\Delta x_{wP} c_P + \Delta x_{wW} c_W}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} \quad \text{dan} \quad c_e = \frac{\Delta x_{eE} c_E + \Delta x_{eP} c_P}{\Delta x_{eP} + \Delta x_{eE}}$$

Gradien konsentrasi di sisi volume kontrol dihitung dengan diferensi tengah.

$$\left(\frac{dc}{dx}\right)_w = \frac{c_P - c_W}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} \text{ dan } \left(\frac{dc}{dx}\right)_e = \frac{c_E - c_P}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}}$$

Persamaan diskret transpor konvektif-difusif di sebuah volume kontrol interior (bukan di batas domain hitung), yaitu di volume kontrol #2 s.d. #12, dengan demikian, adalah

$$\begin{aligned} & \left[(U_e S_e) \left(\frac{\Delta x_{eE} c_P + \Delta x_{Pe} c_E}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) - (U_w S_w) \left(\frac{\Delta x_{wP} c_W + \Delta x_{Ww} c_P}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} \right) \right] \\ & - \left[k_e \left(\frac{c_E - c_P}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) S_e - k_w \left(\frac{c_P - c_W}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} \right) S_w \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left(-\frac{U_w S_w \Delta x_{wP}}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} - \frac{k_w S_w}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} \right) c_W \\ & + \left(-\frac{U_w S_w \Delta x_{Ww}}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} + \frac{U_e S_e \Delta x_{eE}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) c_P \\ & + \left(\frac{U_e S_e \Delta x_{Pe}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} - \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) c_E = 0 \end{aligned}$$

Persamaan transpor konsentrasi garam di volume kontrol #3 dan #7, sebagai contoh, adalah sebagai berikut.

Volume kontrol #3

Koefisien c_W

$$-\frac{U_w S_w \Delta x_{wP}}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} - \frac{k_w S_w}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} = -\frac{0.6 \times 300 \times 350}{300 + 350} - \frac{900 \times 300}{300 + 350} = -512.308$$

Koefisien c_P

$$\begin{aligned} & -\frac{U_w S_w \Delta x_{Ww}}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} + \frac{U_e S_e \Delta x_{eE}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \\ & = -\frac{0.6 \times 300 \times 300}{300 + 350} + \frac{0.6 \times 300 \times 400}{350 + 400} + \frac{900 \times 300}{300 + 350} + \frac{900 \times 300}{350 + 400} \\ & = 788.308 \end{aligned}$$

Koefisien c_E

$$\frac{U_e S_e \Delta x_{Pe}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} - \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} = \frac{0.6 \times 300 \times 350}{350 + 400} - \frac{900 \times 300}{350 + 400} = -276$$

Volume kontrol #7

Koefisien c_W

$$-\frac{U_w S_w \Delta x_{wP}}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} - \frac{k_w S_w}{\Delta x_{Ww} + \Delta x_{wP}} = -\frac{0.6 \times 300 \times 500}{500 + 350} - \frac{900 \times 300}{500 + 500} = -360$$

Koefisien c_P

$$-\frac{U_w S_w \Delta x_{wP}}{\Delta x_{wP} + \Delta x_{wE}} + \frac{U_e S_e \Delta x_{eE}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wP} + \Delta x_{wE}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}}$$

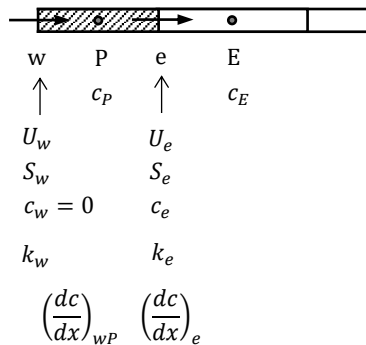
$$= -\frac{0.6 \times 300 \times 300}{300 + 350} + \frac{0.6 \times 300 \times 400}{350 + 400} + \frac{900 \times 300}{300 + 350} + \frac{900 \times 300}{350 + 400} = 540$$

Koefisien c_E

$$\frac{U_e S_e \Delta x_{Pe}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} - \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} = \frac{0.6 \times 300 \times 350}{350 + 400} - \frac{900 \times 300}{350 + 400} = -180$$

Volume kontrol #1

Di volume kontrol #1, yang berada di batas kiri domain hitung, konsentrasi garam diketahui, yaitu $c_w = 0$ ppm. Persamaan transpor konvektif-difusif di volume kontrol #1 adalah



$$\left[(U_e S_e) \left(\frac{\Delta x_{eE} c_P + \Delta x_{Pe} c_E}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) - (U_w S_w) c_w \right] - \left[k_e \left(\frac{c_E - c_P}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) S_e - k_w \left(\frac{c_P - c_w}{\Delta x_{wP}} \right) S_w \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{U_e S_e \Delta x_{eE}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wP}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) c_P + \left(\frac{U_e S_e \Delta x_{Pe}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} - \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} \right) c_E$$

$$= \left(U_w S_w + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wP}} \right) c_w$$

Koefisien c_P

$$\frac{U_e S_e \Delta x_{eE}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wP}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} = \frac{0.6 \times 300 \times 300}{250 + 300} + \frac{900 \times 300}{250} + \frac{900 \times 300}{250 + 300}$$

$$= 1669.091$$

Koefisien c_E

$$\frac{U_e S_e \Delta x_{Pe}}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} - \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe} + \Delta x_{eE}} = \frac{0.6 \times 300 \times 250}{250 + 300} - \frac{900 \times 300}{250 + 300} = -490.091$$

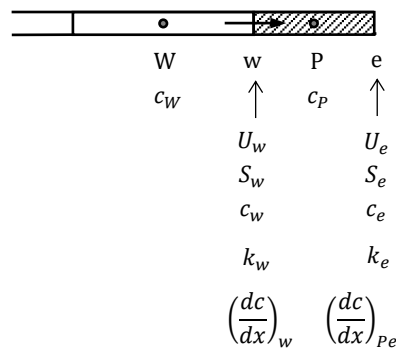
Istianto • <https://istianto.staff.ugm.ac.id> • Email: istianto@ugm.ac.id

Konstanta di kanan tanda kesamaan

$$\left(U_w S_w + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wP}} \right) c_w = \left(0.6 \times 300 + \frac{900 \times 300}{250} \right) \times 0 = 0$$

Volume kontrol #13

Di volume kontrol #13, yang berada di batas kanan domain hitung, konsentrasi garam diketahui, yaitu $c_e = 40$ ppm. Persamaan transpor konvektif-difusif di volume kontrol #13 adalah



$$\begin{aligned} & \left[(U_e S_e) c_e - (U_w S_w) \left(\frac{\Delta x_{wP} c_w + \Delta x_{wW} c_p}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} \right) \right] - \left[k_e \left(\frac{c_e - c_p}{\Delta x_{Pe}} \right) S_e - k_w \left(\frac{c_p - c_w}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} \right) S_w \right] \\ & = 0 \\ \Rightarrow & \left(-\frac{U_w S_w \Delta x_{wP}}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} - \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} \right) c_w + \left(-\frac{U_w S_w \Delta x_{wW}}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) c_p \\ & = \left(-U_e S_e + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) c_e \end{aligned}$$

Koefisien c_w

$$-\frac{U_w S_w \Delta x_{wP}}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} - \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} = -\frac{0.6 \times 300 \times 250}{300 + 250} - \frac{900 \times 300}{300 + 250} = -572.727$$

Koefisien c_p

$$\begin{aligned} -\frac{U_w S_w \Delta x_{wW}}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} + \frac{k_w S_w}{\Delta x_{wW} + \Delta x_{wP}} + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe}} &= -\frac{0.6 \times 300 \times 300}{300 + 250} + \frac{900 \times 300}{300 + 250} + \frac{900 \times 300}{250} \\ &= 1472.727 \end{aligned}$$

Konstanta di kanan tanda kesamaan

$$\left(-U_e S_e + \frac{k_e S_e}{\Delta x_{Pe}} \right) c_e = \left(-0.6 \times 300 + \frac{900 \times 300}{250} \right) \times 40 = 36000$$

Volume kontrol #1 s.d. #13

Persamaan-persamaan diskret intrusi air asin di volume kontrol #1 s.d. #13, dengan demikian, adalah sebagai berikut.

v.k. #1			+1669.091	c_1	-409.091	c_2	= 0
v.k. #2	-589.091	c_1	+921.399	c_2	-332.308	c_3	= 0
v.k. #3	-512.308	c_2	+788.308	3	-276	c_4	= 0
v.k. #4	-456	c_3	+688.941	c_4	-232.941	c_5	= 0
v.k. #5	-412.941	c_4	+611.889	c_5	-198.947	c_6	= 0
v.k. #6	-378.947	c_5	+558.947	c_6	-180	c_7	= 0
v.k. #7	-360	c_6	+540	c_7	-180	c_8	= 0
v.k. #8	-360	c_7	+549.474	c_8	-189.474	c_9	= 0
v.k. #9	-369.474	c_8	+591.827	c_9	-222.353	c_{10}	= 0
v.k. #10	-402.353	c_9	+666.353	c_{10}	-264	c_{11}	= 0
v.k. #11	-444	c_{10}	+762.462	c_{11}	-318.462	c_{12}	= 0
v.k. #12	-498.462	c_{11}	+891.189	c_{12}	-392.727	c_{13}	= 0
v.k. #13	-572.727	c_{12}	+1472.727	c_{13}			= 36000

Penyelesaian persamaan di atas dapat dilakukan secara iteratif. Salah cara iteratif adalah **metode Jacobi**.

$$c_i^{n+1} = \frac{r_i - a_{i,1}c_{i-1}^n - a_{i,3}c_{i+1}^n}{a_{i,2}}$$

Dalam persamaan di atas, subskrip $i = 1, 2, \dots, 13$ mengacu pada nomor volume kontrol dan superskrip $n = 0, 1, \dots$ menunjukkan nomor urut iterasi. Variabel r_i adalah kontanta di sisi kanan tanda kesamaan, variabel $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, dan $a_{i,3}$ adalah koefisien-koefisien persamaan diskret intrusi air asin. Berikut adalah cuplikan hitungan iteratif metode Jacobi

iterasi	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	error
0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	34	37	39	40	
1	0.7353	2.8033	5.4508	8.7049	12.6011	16.5763	20.6667	24.7586	29.0056	32.7733	36.0884	38.3220	39.6111	0.2647
2	0.6871	2.4360	4.8695	7.8684	11.2642	15.1985	19.3037	23.5422	27.7698	31.8117	35.0909	37.6408	39.3475	0.3673
.														
.														
.														

-o0o-