UJIAN TENGAH SEMESTER
STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Dr. Ir. Istiarto, M.Eng. | Rabu, 10 April 2013 | 100 menit
[Boleh Membuka Buku | Tidak Boleh Memakai Komputer]

SOAL A

Seorang mahasiswa menemukan fakta bahwa probabilitas aliran listrik di kos tempat tinggalnya terputus (listrik padam) per minggu adalah 7%. Apabila listrik padam adalah variabel random dan dengan memakai pendekatan distribusi binomial, hitunglah:

1) probabilitas terjadi 1 kali listrik padam dalam perioda 4 minggu,
2) probabilitas listrik tidak pernah padam dalam perioda 4 minggu,
3) probabilitas terjadi maksimum 2 kali listrik padam dalam perioda 4 minggu.

PENYELESAIAN

Probabilitas suatu variabel random berdistribusi binomial dinyatakan dengan persamaan:

$$f_X(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Diketahui bahwa p = 0.07 dan n =4.

Probabilitas terjadi 1 kali listrik padam dalam perioda 4 minggu = $f_X(1;4{,}0.07)$

$$f_X(1;4{,}0.07) = \binom{4}{1} 0.07^1 (1-0.07)^{4-1} = \frac{4!}{(4-1)!\,1!} \times 0.07^1 \times 0.93^3 = 0.2252$$

Probabilitas listrik tidak pernah padam dalam perioda 4 minggu = $f_X(0;4{,}0.07)$

$$f_X(0;4{,}0.07) = \binom{4}{0} 0.07^0 (1-0.07)^{4-0} = 1 \times 1 \times 0.93^4 = 0.7481$$

Probabilitas terjadi maksimum 2 kali listrik padam dalam perioda 4 minggu = $F_X(2;4{,}0.07)$, yaitu probabilitas kumulatif terjadi listrik padam sampai dengan 2 kali (0, 1, dan 2 kali)

$$F_X(x;n,p) = \sum_{i=0}^{x} f_X(i;n,p)$$

$$\begin{aligned} F_X(2;4{,}0.07) &= \sum_{i=0}^{2} f_X(i;4{,}0.07) = f_X(0;4{,}0.07) + f_X(1;4{,}0.07) + f_X(2;4{,}0.07) \\ &= 0.7481 + 0.2252 + \frac{4!}{(4-2)!\,2!} \times 0.07^2 \times (1-0.07)^{4-2} \\ &= 0.7481 + 0.2252 + 0.0254 = 0.9987 \end{aligned}$$

SOAL B

Mahasiswa pada Soal A di atas juga mencatat volum pemakaian air bulanan (Q) di kos tempat tinggalnya dan mendapati bahwa volum air rerata yang dipakai adalah 100 m^3 dengan simpangan baku 8 m^3. Dengan asumsi bahwa volum air tersebut berdistribusi normal, hitunglah:

1) probabilitas volum pemakaian air kurang daripada 110 m^3, prob(Q < 110 m^3),
2) probabilitas volum pemakaian air antara 94 s.d. 102 m^3, prob(94 < Q [m^3] < 102),
3) probabilitas volum pemakaian air melebihi 112 m^3, prob(Q > 112 m^3).

PENYELESAIAN

Diketahui bahwa Q berdistribusi normal dengan $\bar{Q}$ = 100 m^3/s dan s_Q = 8 m^3/s. Gunakan tabel distribusi normal standar untuk menghitung berbagai nilai probabilitas yang ditanyakan pada Soal

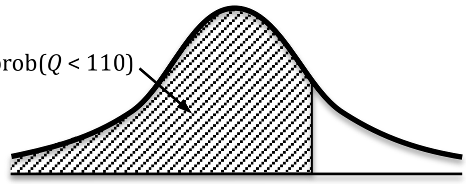
B. Untuk menggunakan tabel distribusi normal standar, nilai Q perlu diubah menjadi nilai Z menurut persamaan transformasi berikut:

$$Z_Q = \frac{Q - \bar{Q}}{s_Q}$$

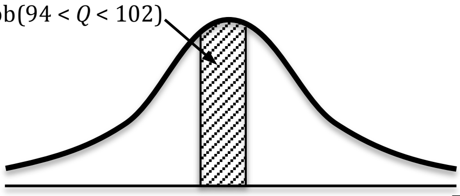
Q (m³/s)	Z
94	−0.75
102	0.25
110	1.25
112	1.5

		Tabel
prob(Q < 110 m³/s)	prob(Z < 1.25)	0.8944
prob(94 < Q (m³/s) < 102)	prob(−0.75 < Z < 0.25)	0.3721
prob(Q > 112 m³/s)	prob(Q > 1.5)	0.0668

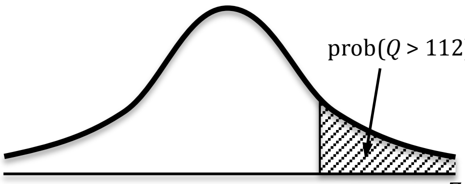
Dalam membaca tabel distribusi normal standar, akan lebih mudah apabila disertai dengan sketsa pdf distribusi normal standar.



prob(Z < 1.25)



prob(Z < 0.25) – prob(Z < −0.75)



1 – prob(Z < 1. 5)

Soal C

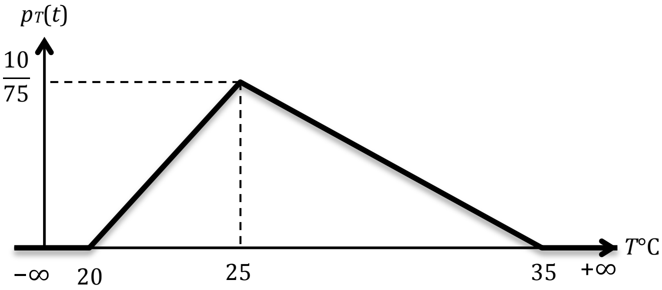
Data temperatur udara (T dalam °C) di suatu kota menunjukkan bahwa distribusi probabilitas temperatur udara dapat dinyatakan dengan persamaan pdf di bawah ini:

$$p_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{75}(t-20) & \text{untuk } 20 < t < 25 \\ \frac{1}{75}(35-t) & \text{untuk } 25 < t < 25 \\ 0 & \text{untuk nilai } t \text{ yang lain} \end{cases}$$

1) Buat sketsa grafik pdf tersebut.
2) Cari cdf.
3) Buat sketsa grafik cdf.
4) Hitung probabilitas temperatur udara kurang daripada 24°C, prob(T < 24°C).
5) Hitung probabilitas temperatur udara lebih daripada 27°C , prob(T > 27°C).
6) Hitung probabilitas temperatur udara antara 24°C s.d. 27°C , prob(24 < T [°C] < 27).

Penyelesaian

Temperatur udara T adalah variabel random kontinu dan dapat bernilai dari −∞ s.d. +∞. Dari pdf temperatur udara, dapat diketahui bahwa distribusi T didefinisikan pada empat rentang, yaitu pada rentang kurang daripada 20°C, antara 20°C s.d. 25°C, antara 25°C s.d. 35°C, dan rentang lebih daripada 35°C. Sketsa pdf adalah sbb.



Kurva cdf dicari dengan mengintegralkan pdf pada keempat rentang T.

Untuk t < 20°C.

$$P_T(t) = \int p(t)\,\mathrm{d}t = \int 0\mathrm{d}t = C$$

Syarat batas: $P_T(20) = 0 \Longrightarrow C = 0$.

Untuk 20°C < t < 25°C.

$$P_T(t) = \int p(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{75}(t-20)\mathrm{d}t = \frac{2}{75}\left(\frac{t^2}{2} - 20t + C\right)$$

Syarat batas: $P_T(20) = 0$.

$$P_T(20) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{75}\left(\frac{20^2}{2} - 20^2 + C\right) \Leftrightarrow C = 200$$

$$P_T(t) = \frac{2}{75}\left(\frac{t^2}{2} - 20t + 200\right) = \frac{1}{75}(t^2 - 40t + 400)$$

Untuk 25°C < t < 35°C.

$$P_T(t) = \int p(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{75}(35-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{75}\left(35t - \frac{t^2}{2} + C\right)$$

Syarat batas: $P_T(35) = 1$.

$$P_T(35) = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{75}\left(35^2 - \frac{35^2}{2} + C\right) \Leftrightarrow C = -\frac{1075}{2}$$

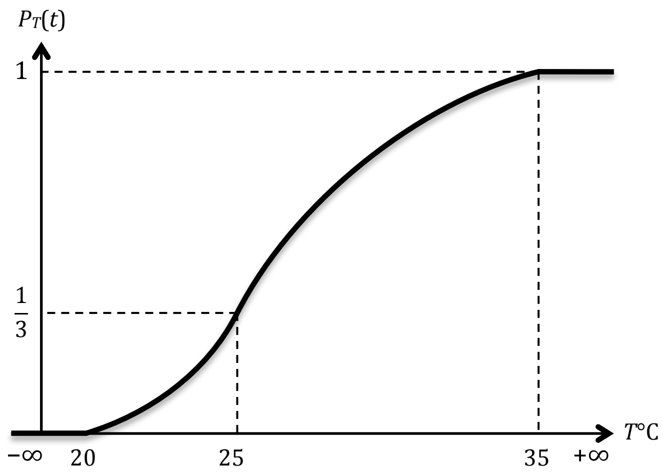
$$P_T(t) = \frac{1}{75}\left(35t - \frac{t^2}{2} - \frac{1075}{2}\right) = -\frac{1}{150}(t^2 - 70t + 1075)$$

Untuk t > 35°C, berlaku syarat batas: $P_T(35) = 1 \Leftrightarrow P_T(t) = 1$.

Dengan demikian, cdf temperatur udara adalah sbb.

$$P_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t < 20 \\ \frac{1}{75}(t^2 - 40t + 400) & \text{untuk } 20 < t < 25 \\ -\frac{1}{150}(t^2 - 70t + 1075) & \text{untuk } 25 < t < 35 \\ 1 & \text{untuk } t > 35 \end{cases}$$

Sketsa cdf.

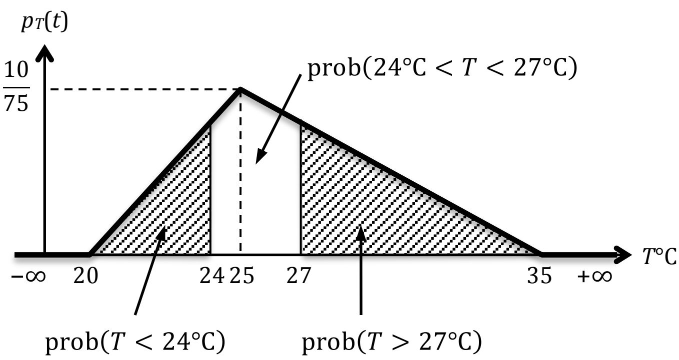


Nilai-nilai probabilitas dapat dihitung dengan cdf atau, karena bentuk kurva pdf sederhana, maka nilai probabilitas dapat pula diperoleh dari luas daerah di bawah kurva pada batas-batas yang diinginkan.

$$\text{prob}(T < 24°\text{C}) = P_T(24) = \frac{1}{75}(24^2 - 40\times24 + 400) = 0.2133$$

$$\text{prob}(T > 27°\text{C}) = 1 - \text{prob}(T < 27°\text{C}) = 1 - P(27) = 1 + \frac{1}{150}(27^2 - 70\times27 + 1075)$$
$$= 1 - 0.5733 = 0.4267$$

$$\text{prob}(24°\text{C} < T < 27°\text{C}) = P_T(27) - P_T(24) = 0.5733 - 0.2133 = 0.36$$



-o0o-