PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2004

SOAL A

Untuk penyiapan penarikan retribusi air tanah, Dinas Pertambangan Pemkot XYZ melakukan survei kedalaman sumur gali penduduk. Data yang diperoleh dari Kecamatan UVW dirangkum pada tabel berikut ini.

kedalaman sumur (m)	7	8	9	10	11	12	13	14	15
jumlah (buah)	10	26	40	70	95	93	70	36	10

– Berapa kedalaman sumur gali rata-rata?
– Berapa meter simpangan baku kedalaman sumur gali?
– Berapa persen kemungkinan kedalaman sumur gali adalah antara 10 dan 12 meter?

PENYELESAIAN

Hitungan disajikan dengan bantuan tabel berikut ini.

h (m)	f	$f\,h$	$f\,h^2$	Σf	%
7	10	70	490	10	2%
8	26	208	1664	36	8%
9	40	360	3240	76	17%
10	70	700	7000	146	32%
11	95	1045	11495	241	54%
12	93	1116	13392	334	74%
13	70	910	11830	404	90%
14	36	504	7056	440	98%
15	10	150	2250	450	100%
Σ	450	5063	58417		

Kedalaman sumur gali rata-rata.

$$\bar{h} = \sum f\,h \Big/ \sum f = 5063/450 = 11.25\text{ m}.$$

Simpangan baku kedalaman sumur gali.

$$s = \sqrt{\frac{\sum f\left(h-\bar{h}\right)^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{\sum f\,h^2 - \left(\sum f\,h\right)^2 \big/ \sum f}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{58417 - 5063^2/450}{450-1}} = 1.80\text{ m}.$$

Catatan:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f\left(h-\bar{h}\right)^2}{\sum f - 1}} \quad \text{dan} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f\left(h-\bar{h}\right)^2}{\sum f}}$$

Dalam hitungan simpangan baku kedalaman sumur gali di atas, pembagian dengan $\Sigma f - 1$ atau Σf dapat dilakukan mengingat:

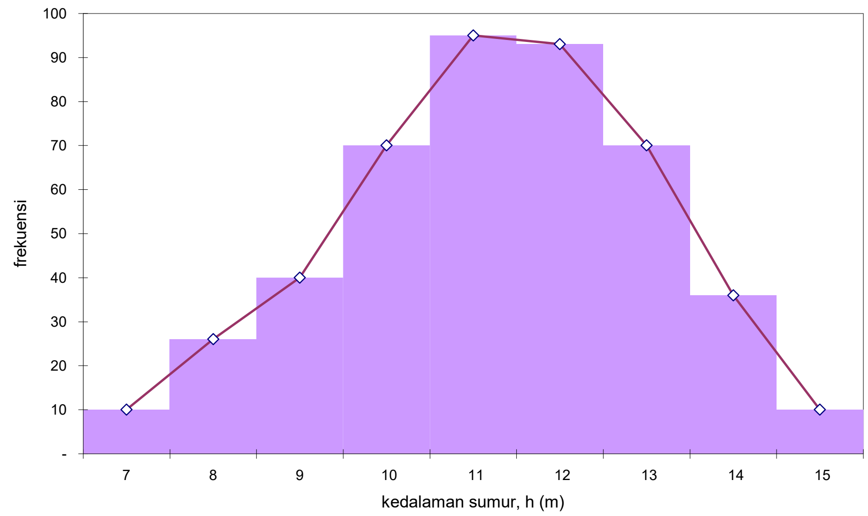
- data sampel kedalaman sumur gali tersebut dapat dianggap merupakan data populasi apabila sampel 450 sumur merupakan jumlah seluruh sumur yang dimiliki penduduk,
- lagi pula, kedua persamaan memberikan hasil yang hampir sama, yaitu 1.799 m dan 1.797 m, hanya berselisih 2 mm,
- apalagi, data dibuat/dibulatkan ke dalam meter terdekat,
- dalam kenyataan, h bervariasi, sehingga
- dalam hal ini, kita dapat mengatakan bahwa simpangan baku kedalaman sumur gali adalah 2 m.

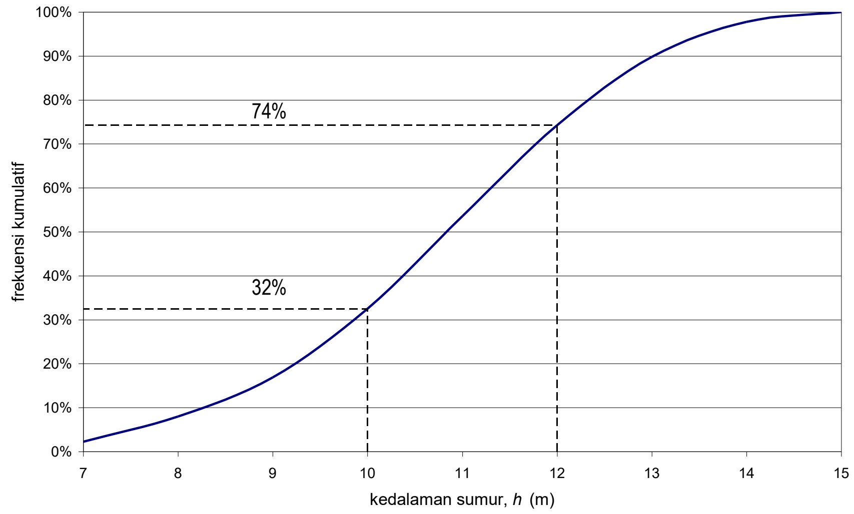
Peluang menjumpai kedalaman sumur gali 10 – 12 m.

prob($10 < h < 12$) = prob($h < 12$) – prob($h < 10$)

$$\mathrm{prob}(10 < h < 12) = \mathrm{prob}(h < 12) - \mathrm{prob}(h < 10)$$

$$= \frac{334 - 146}{450} = 0.42 = 42\%$$





SOAL B

Di suatu *quarry site*, petugas bagian peledakan mendapati bahwa dari empat titik ledak, kemungkinan masing-masing titik meledak adalah 20%. Untuk menjamin pasokan material, **paling sedikit** satu titik harus meledak. Apabila si petugas memencet keempat tombol peledakan berturut-turut, berapa persen kemungkinan pasokan material dapat tersedia?

PENYELESAIAN

Peluang jumlah titik yang meledak dalam satu seri peledakan dapat didekati dengan melihat peledakan tersebut sebagai proses Bernoulli. Setiap kali dilakukan peledakan terhadap salah satu titik, kemungkinan titik tersebut meledak (sukses) adalah $p = 0.20$ dan kemungkinan tidak meledak (gagal) adalah $q = 1 - p = 0.80$. Dalam n kali peledakan, terjadi sukses r kali dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$\text{prob}\left(\text{sukses } r \text{ kali dalam } n \text{ kali experimen}\right) = f_X(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} p^r q^{n-r} .$$

Untuk menjamin pasokan material, paling tidak 1 titik harus meledak. Dengan demikian, pasokan material dapat dijamin apabila 1, 2, 3, atau 4 titik meledak. Peluang kejadian ini adalah:

1 titik meledak → $\binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$

2 titik meledak → $\binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2 = 0.1536$

3 titik meledak → $\binom{4}{3}(0.2)^3(0.8)^1 = 0.0256$

4 titik meledak → $\binom{4}{4}(0.2)^4(0.8)^0 = 0.0016$

Peluang paling sedikit 1 titik meledak = 0.4096 + 0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.5904 = 59%.

Notasi $\binom{n}{r}$ merepresentasikan operasi kombinasi (n,r), yaitu jumlah kelompok yang mungkin disusun dari sejumlah n anggota dan setiap kelompok terdiri dari r anggota. Dalam MSExcel, perintah operasi kombinasi adalah =**COMBIN**(n,r).

SOAL C

Salah satu dari dua bencana alam dapat mengakibatkan keruntuhan dam di suatu kawasan rawan gempa. Pertama adalah banjir dengan debit yang melebihi debit rancangan pelimpah (Event A). Kedua adalah gempa yang sangat kuat (Event B). Ahli hidrologi dan ahli gempa memperkirakan bahwa peluang (probabilitas) banjir dan gempa tersebut masing-masing adalah prob(A) = 0.02 dan prob(B) = 0.01. Berapakah peluang terjadi keruntuhan dam?

PENYELESAIAN

Dam runtuh apabila terjadi Event A saja atau Event B saja atau keduanya. Peluang dam runtuh adalah:

$$\begin{aligned}\text{prob}(\text{dam runtuh}) &= \text{prob}(A \cup B)\\ &= \text{prob}(A) + \text{prob}(A) - \text{prob}(A \cap B)\\ &= 0.02 + 0.01 - 0\\ &= 3\%.\end{aligned}$$

Catatan: Event A dan Event B tidak saling mempengaruhi (*independent*), sehingga $\text{prob}(A \cap B) = 0$.

SOAL D

Pengolahan data debit, Q m^3/s, suatu sungai menunjukkan bahwa sebaran peluang terjadinya suatu besaran debit, $p_Q(q)$, dapat dinyatakan dengan fungsi berikut:

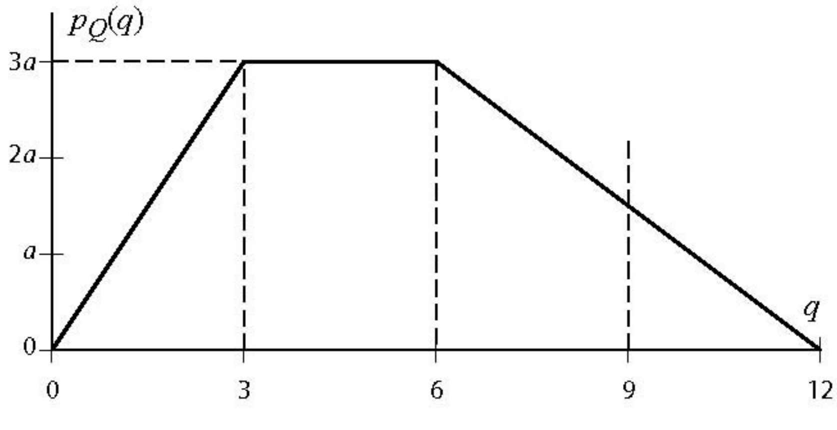
$$\begin{aligned} p_Q(q) &= a\,q && \text{untuk} \quad 0 \le q \le 3\\ &= 3a && \text{untuk} \quad 3 < q \le 6\\ &= -\tfrac{1}{2}a(q-12) && \text{untuk} \quad 6 < q \le 12\\ &= 0 && \text{untuk nilai } q \text{ yang lain}\end{aligned}$$

- Carilah nilai konstanta a. Buat sketsa pdf tsb.
- Cari dan buat sketsa fungsi distribusi kumulatifnya.
- Hitung prob(Q > 7 m^3/s).
- Berapakah debit rata-rata sungai tersebut?

PENYELESAIAN

Nilai konstanta *a*.

Penyelesaian soal tersebut akan lebih mudah apabila sketsa pdf dibuat terlebih dulu.



$$\int_0^3 P_Q(q)\,\mathrm{d}q + \int_3^6 P_Q(q)\,\mathrm{d}q + \int_6^{12} P_Q(q)\,\mathrm{d}q = 1$$

Luas di bawah kurva pdf = $\int P_Q(q)\,\mathrm{d}q = 1$

$\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot (3+12) = 1$

$$a = \frac{2}{45}$$

Fungsi distribusi kumulatif, cdf.

$$P_Q(q) = \int p_Q(q) \, \mathrm{d}q$$

Interval $q < 0$ m^3/s.

$$P_Q(q) = 0 .$$

Interval $0 < q < 3$ m^3/s.

$$P_Q(q) = \int a\, q \; \mathrm{d}q = \int \frac{2}{45} q \; \mathrm{d}q$$

$$= \frac{1}{45} q^2 + C_1$$

Syarat batas: $P_Q(q) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

$$P_Q(q) = \frac{1}{45} q^2 .$$

$$P_Q(3) = \frac{1}{45} 3^2 = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} .$$

Interval $3 < q < 6$ m^3/s.

$$P_Q(q) = \int 3a \; \mathrm{d}q = \int \frac{6}{45} \; \mathrm{d}q$$

$$= \frac{6}{45} q + C_2$$

Syarat batas: $P_Q(3) = 1/5$.

$$\frac{1}{5} = \frac{6}{45}(3) + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{9-18}{45} = -\frac{9}{45} .$$

$$P_Q(q) = \frac{6}{45} q - \frac{9}{45} = \frac{1}{45}(6q - 0) .$$

Interval $6 < q < 12$ m^3/s.

$$P_Q(q) = \int -\frac{1}{2} a(q-12) \, \mathrm{d}q = \int -\frac{1}{45}(q-12) \, \mathrm{d}q$$

$$= -\frac{1}{45}\left(\frac{q^2}{2} - 12q \right) + C_3$$

Syarat batas: $P_Q(12) = 1$.

$$1 = -\frac{1}{45}\left(\frac{12^2}{2} - 12 \cdot 12 \right) + C_3 \quad \Leftrightarrow \quad C_3 = 1 - \frac{1}{45}\left(\frac{144}{2} \right) = -\frac{27}{45} .$$

$$P_Q(q) = -\frac{1}{45}\left(\frac{q^2}{2} - 12q + 27\right).$$

Interval $q > 12$ m^3/s.

$$P_Q(q) = 1.$$

Dengan demikian, cdf debit sungai tersebut adalah:

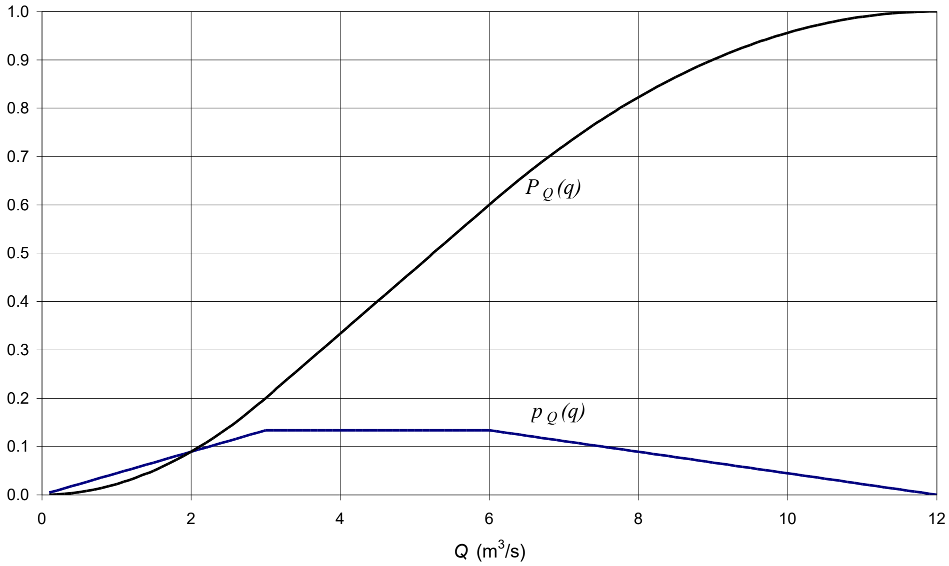
$$P_Q(q) = 0 \quad \text{untuk} \quad q < 0$$

$$= \frac{1}{45} q^2 \quad \text{untuk} \quad 0 < q < 3$$

$$= \frac{1}{45}(6q - 9) \quad \text{untuk} \quad 3 < q < 6$$

$$= -\frac{1}{45}\left(\frac{q^2}{2} - 12q + 27\right) \quad \text{untuk} \quad 6 < q < 12$$

$$= 1 \quad \text{untuk} \quad q > 12.$$



Peluang Q > 7 m³/s.

$$\begin{aligned}
\text{prob}\left(Q > 7\ \text{m}^3/\text{s}\right) &= 1 - \text{prob}\left(Q < 7\ \text{m}^3/\text{s}\right) \\
&= 1 - \int_6^7 -\frac{1}{45}\left(\frac{q^2}{2} - 12q + 27\right)\text{d}\,q \\
&= 1 + \frac{1}{45}\left[\frac{q^3}{6} - 6q^2 + 27q\right]_6^7 \\
&= 1 + \frac{1}{45}\left[\frac{7^3 - 6^3}{6} - 6\left(7^2 - 6^2\right) + 27(7-6)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{45}\left[\frac{127}{6} - 78 + 27\right] \\
&= 0.337 \approx 34\%.
\end{aligned}$$

Debit rata-rata.

$$\begin{aligned}
\overline{Q} &= \int q\, p_Q(q)\,\text{d}\,q \\
&= \int_0^3 q\frac{2}{45}q\ \text{d}\,q + \int_3^6 q\,3\left(\frac{2}{45}\right)\text{d}\,q + \int_6^{12} q\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{45}\right)(q-12)\ \text{d}\,q \\
&= \int_0^3 \frac{2}{45}q^2\ \text{d}\,q + \int_3^6 \frac{6}{45}q\ \text{d}\,q - \int_6^{12}\frac{1}{45}\left(q^2 - 12q\right)\text{d}\,q \\
&= \frac{2}{45}\left[\frac{q^3}{3}\right]_0^3 + \frac{6}{45}\left[\frac{q^2}{2}\right]_3^6 - \frac{1}{45}\left[\frac{q^3}{3} - 6q^2\right]_6^{12} \\
&= 0.4 + 1.8 + 3.2 \\
&= 5.4\ \text{m}^3/\text{s}.
\end{aligned}$$

PENYELESAIAN SOAL UJIAN AKHIR SEMESTER 2004

SOAL A

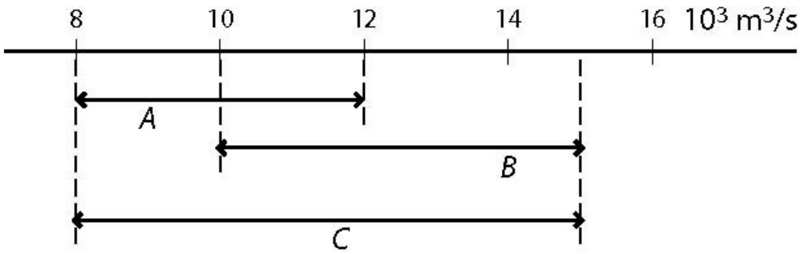
An engineer is designing a spillway for a dam. The evaluation of maximum flow data is based on a short period of recordkeeping. The critical flow rates and their properties are estimated from A, discharge measurements, B, rainfall observation, and C, the combination of flow discharge and rainfall data, as follows:

Event A from flow data: 8,000 to 12,000 m^3/s, prob(A) = 0.5.
Event B from rainfall data: 10,000 to 15,000 m^3/s, prob(B) = 0.6.
Event $C = A \cup B$: 8,000 to 15,000 m^3/s, prob(C) = 0.9.

- Draw the sample space.
- Show on the sketch $A \cap B$, $A \cap C$, and $A^c \cup B^c$.
- Determine the probabilities prob($A \cap B$) and prob($A^c \cup B^c$).
- Determine the conditional probabilities prob($A \mid B$) and prob($B \mid A$).

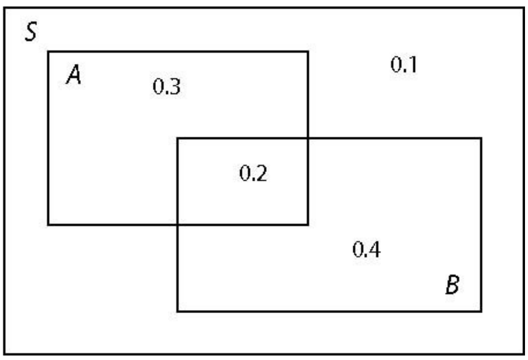
PENYELESAIAN

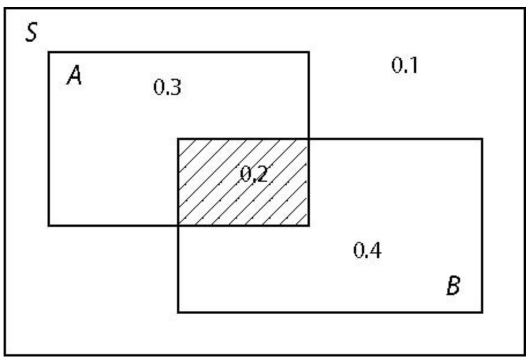
The method of critical flow rates estimation is depicted on the following sketch:



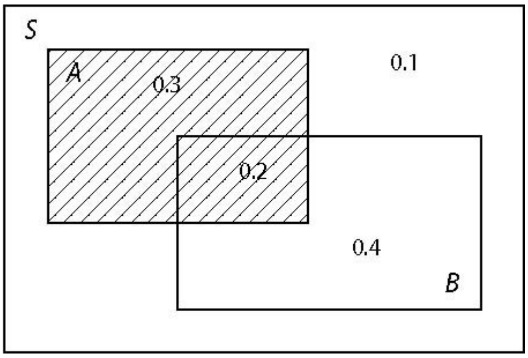
Sample space and its corresponding possible events.

Below are sketches of $A \cap B$, $A \cap C$, and $A^c \cup B^c$.

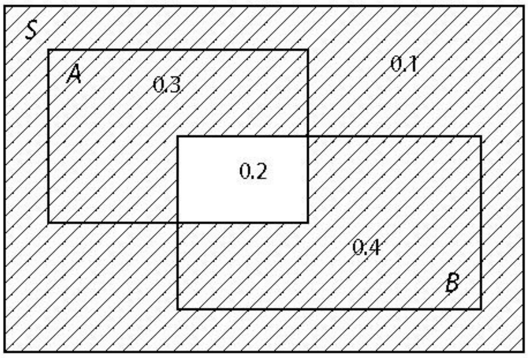




$A \cap B$



$A \cap C$



$A^c \cup B^c$

Probabilities of events.

The probabilities of various events can be easily obtained by looking at the above sketches.

$$\text{prob}(A \cap B) = 0.2\,.$$

$$\begin{aligned}\text{prob}\left(A^c \cap B^c\right) &= 0.8 \\ &= \text{prob}\left[(A \cap B)^c\right] \\ &= 1 - \text{prob}(A \cap B).\end{aligned}$$

Conditional probabilities.

$$\text{prob}(A|B) = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3} = 0.33\,.$$

$$\text{prob}(B|A) = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 0.4\,.$$

SOAL B

Tabel di bawah menunjukkan hasil pengukuran tinggi gelombang terbesar dan periodenya, X m dan Y detik, di suatu stasiun.

tinggi (m)	periode (s)	tinggi (m)	periode (s)	tinggi (m)	periode (s)	tinggi (m)	periode (s)
2.26	6.1	4.22	6.9	1.81	5.4	4.45	8.8
3.10	4.3	2.01	5.0	3.93	6.8	2.57	6.4
3.22	5.7	2.77	5.9	3.24	7.2	2.68	6.5
3.84	7.7	3.61	6.5	3.18	7.1	3.86	7.8
2.56	5.3	3.51	7.4	2.74	6.6	4.02	8.0
2.74	5.7	2.42	5.0	3.49	7.4	3.39	7.3
2.28	4.9	2.12	5.1	2.12	5.8	2.61	6.5
3.88	6.7	2.73	6.5	5.10	9.0	2.22	6.0
2.49	5.0	3.30	5.4	2.14	5.8	4.05	8.0

– Buatlah tabel yang menunjukkan probabilitas tinggi dan periode gelombang tersebut, prob($X = x$, $Y = y$). Untuk penyederhanaan, tinggi gelombang dibulatkan ke meter terdekat dan periode gelombang ke detik terdekat.
– Suatu saat terjadi gelombang 3 m; berapakah peluang bahwa periode gelombang tersebut adalah 6 s atau lebih.
– Suatu saat terjadi gelombang dengan periode 7 s; hitunglah peluang bahwa tinggi gelombang tersebut tidak lebih daripada 3 m.

PENYELESAIAN

Probabilitas tinggi dan periode gelombang, prob($X = x$, $Y = y$), diperkirakan dari frekuensi kejadian pasangan tinggi gelombang dan periode gelombang (x, y) seperti disajikan pada tabel kedua di bawah ini. Tabel ini disusun berdasarkan frekuensi kejadian yang disajikan pada tabel yang pertama di bawah ini.

		periode (s)						Σ
		4	5	6	7	8	9	
tinggi (m)	2	0	6	4	0	0	0	10
	3	1	2	4	8	0	0	15
	4	0	0	0	5	4	1	10
	5	0	0	0	0	0	1	1
Σ		1	8	8	13	4	2	36

		periode (s)						Σ
		4	5	6	7	8	9	
tinggi (m)	2	0	0.17	0.11	0	0	0	0.28
	3	0.03	0.05	0.11	0.22	0	0	0.41
	4	0	0	0	0.14	0.11	0.03	0.28
	5	0	0	0	0	0	0.03	0.03
Σ		0.03	0.22	0.22	0.36	0.11	0.06	1.00

$$\text{prob}\left(X = 3, Y > 6\right) = \frac{4+8}{15} = \frac{4}{5} = 0.80.$$

$$\text{prob}\left(X < 3, Y = 7\right) = \frac{8}{13} = 0.615.$$

SOAL C

Tabel di bawah menunjukkan data debit maximum tahunan (dalam m^3/s) di DAS Pond Creek dari tahun 1945 sampai dengan 1968 yang dibagi dalam 2 periode. Dari periode pertama ke periode kedua, diduga telah terjadi peningkatan debit maximum yang diakibatkan oleh perbaikan alur sungai yang dilakukan pada pertengahan periode pengukuran debit tersebut.

periode ke-1	2000	1740	1460	2060	1530	1590	1690	1420	1330	607	1380	1660
periode ke-2	2290	2590	3260	2490	3080	2520	3360	8020	4310	4380	3220	4320

– Apabila debit maximum rata-rata seluruh data dan simpangan bakunya dapat dianggap mendekati nilai rata-rata dan simpangan baku populasi, buktikan apakah memang telah terjadi peningkatan debit maximum. Anggaplah bahwa simpangan baku populasi periode ke-1 dan ke-2 sama dengan simpangan baku populasi.

- Jika simpangan baku populasi tidak diketahui, susunlah hipotesis yang baru tentang peningkatan debit maximum tersebut.
- Jika keragaman populasi (*variance*) kedua periode data debit tersebut tidak diketahui tetapi diketahui bahwa kedua keragaman data tidak sama, susunlah hipotesis yang baru tentang peningkatan debit maximum tersebut.

PENYELESAIAN

Dari sampel data debit maximum tahunan dapat dihitung parameter statistik sebagai berikut:

	periode ke-1	periode ke-2	gabungan
jumlah sampel, n	12	12	24
nilai rata-rata, $\overline{X}$ m^3/s	1539	3653	2596
simpangan baku, s m^3/s	372	1563	1549

Apakah telah terjadi peningkatan debit maximum (debit maximum periode ke-2 lebih besar daripada debit maximum periode ke-1)?

Dengan asumsi bahwa debit rata-rata dan simpangan baku selama periode ke-1 dan ke-2 mendekati nilai populasinya, maka: $\mu = 2596$ m^3/s dan $\sigma = 1549$ m^3/s.

Ingin diuji, apakah $\mu_2 > 2596$ m^3/s. Untuk keperluan ini, dilakukan uji satu sisi (*one-tailed test*).

Dari data debit selama periode ke-2 dengan n =12, diperoleh $\overline{X}_2 = 3653$ m^3/s. Apabila debit maximum tahunan tersebut dianggap berdistribusi normal, maka statistik ujinya adalah:

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_2 - \mu\right).$$

Uji hipotesisnya adalah:

H_0: $\mu_2 = 2596$ m^3/s
H_a: $\mu_2 > 2596$ m^3/s

Untuk tingkat keyakinan $(1 - \alpha) = 95\%$ ($z_{1-\alpha} = 1.64$), maka H_0 ditolak jika $z > z_{1-\alpha}$.

$$z = \frac{\sqrt{12}}{1549}\left(3653 - 2596\right) = 2.36\,.$$

Karena $z > z_{1-\alpha}$, maka H_0 ditolak, yang berarti bahwa μ_2 tidak sama dengan 2596 m^3/s, namun lebih besar daripada 2596 m^3/s. Ini menunjukkan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum pada periode ke-2.

Pertanyaan yang sama, namun dianggap nilai simpangan baku populasi tidak diketahui.

Uji hipotesis untuk melihat adanya peningkatan debit maximum pada periode ke-2 jika nilai simpangan baku populasi tidak diketahui adalah:

H_0: $\mu_2 = 2596$ m^3/s
H_a: $\mu_2 > 2596$ m^3/s

dengan statistik uji $T = \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_2 - \mu\right)$.

Untuk $n = 12$, $\sigma = 1549$ m^3/s, $\overline{X}_2 = 3653$ m^3/s, dan $\mu = 2596$ m^3/s, diperoleh *t score*:

$$t = \frac{\sqrt{12}}{1549}\left(3653 - 2596\right) = 2.36\,.$$

Dengan tingkat keyakinan $(1 - \alpha) = 95\%$, diperoleh $t_{1-\alpha} = 0.06$. Karena $t > t_{1-\alpha}$, maka H_0 ditolak, yang menunjukkan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum tahunan pada periode ke-2.

Pertanyaan yang sama, namun dianggap nilai keragaman populasi tidak diketahui dan nilai keragaman pada kedua periode tidak sama.

Uji hipotesis untuk melihat adanya peningkatan debit maximum pada periode ke-2 jika nilai keragaman populasi tidak diketahui dan nilai keragaman pada kedua periode data tidak sama adalah:

H_0: $\mu_2 = \mu_1$
H_a: $\mu_2 > \mu_1$

dengan statistik uji $T = \dfrac{\left(\overline{X}_2 - \overline{X}_1\right) - \left(\mu_2 - \mu_1\right)}{\sqrt{{s_{X_2}}^2 / n_2 + {s_{X_1}}^2 / n_1}}$ yang berdistribusi mendekati distribusi Student's t dengan ν *degrees of freedom* yang dinyatakan dengan persamaan:

$$\nu = \frac{\left({s_{X_2}}^2 / n_2 + {s_{X_1}}^2 / n_1\right)^2}{\dfrac{\left({s_{X_2}}^2 / n_2\right)^2}{n_2 - 1} + \dfrac{\left({s_{X_1}}^2 / n_1\right)^2}{n_1 - 1}}$$

Dari data debit maximum tahunan, diketahui:

$n_1 = 12$	$n_2 = 12$
$\overline{X}_1 = 1539 \text{ m}^3/\text{s}$	$\overline{X}_2 = 3563 \text{ m}^3/\text{s}$
$s_{X_1} = 372 \text{ m}^3/\text{s}$	$s_{X_2} = 1563 \text{ m}^3/\text{s}$

sehingga diperoleh $\nu \approx 12$ dan $t = 4.56$.

Apabila dipakai tingkat keyakinan $(1 - \alpha) = 95\%$, diperoleh $t_{1-\alpha} = 0.06$. Karena $t > t_{1-\alpha}$, maka H_0 ditolak, yang menunjukkan bahwa telah terjadi peningkatan debit maximum tahunan pada periode ke-2.

Catatan.

Nilai z dan t untuk nilai tingkat keyakinan $(1-\alpha)$ yang diketahui dapat diperoleh dari tabel distribusi normal standar atau tabel distribusi Student's t. Nilai-nilai ini dapat pula dihitung dengan bantuan MSExcel. Perintah MSExcel untuk menghitung nilai z untuk nilai $(1-\alpha)$ yang diketahui adalah =**NORMSINV**(*probability*). Di sini, *probability* adalah peluang untuk sampel atau populasi yang berdistribusi normal, yang dalam hal ini adalah $(1-\alpha)$.

=**NORMSINV**(0.95)
=1.64.

Perintah MSExcel untuk menghitung nilai t untuk nilai $(1-\alpha)$ yang diketahui adalah =**TINV**(*probability*,*degrees_of_freedom*). Di sini, *probability* adalah peluang untuk sampel berdistribusi Student's t dua sisi (*two-tailed Student's t-distribution*).

=**TINV**(0.95,12)
=0.06.