PENYELESAIAN SOAL UJIAN TENGAH SEMESTER 2005

SOAL A

Tabel di bawah ini menunjukkan frekuensi (dalam persen) kejadian angin di Stasiun Dok II Jayapura tahun 2001-2005.

Kecepatan (knots)	Arah (°)							
	337.5 – 22.5	22.5 – 67.5	67.5 – 112.5	112.5 – 157.5	157.5 – 202.5	202.5 – 247.5	247.5 – 292.5	292.5 – 337.5
0 – 5	5.54	3.79	13.85	4.05	4.02	1.81	2.33	1.38
5 – 10	10.62	12.23	19.69	5.64	3.87	1.93	2.40	3.35
10 – 15	0.48	0.94	0.82	0.13	0.10	0.07	0.19	0.18
15 – 20	0.04	0.17	0.08	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00
20 – ∞	0.02	0.09	0.07	0.01	0.03	0.02	0.01	0.01

- Hitunglah nilai rata-rata dan varian kecepatan angin.
- Hitunglah nilai rata-rata dan varian arah angin.
- Jika suatu saat arah angin berada di sektor 90° (67.5°–112.5°), perkirakanlah peluang kecepatan (*magnitude*) angin tersebut lebih daripada 15 knots.
- Suatu saat terjadi angin 12 knots; berapakah kemungkinan bahwa arah angin 45°?
- Buatlah tabel yang menunjukkan probabilitas kecepatan angin sektor 22.5°–112.5°.

PENYELESAIAN

Hitungan magnitude dan arah kecepatan angin dapat dilakukan dengan mudah melalui tabulasi seperti disajikan pada tabel di halaman berikut.

Nilai rata-rata dan varian kecepatan (magnitude) angin.

Kecepatan (magnitude) angin rata-rata dihitung dengan persamaan berikut:

$$\bar{V} = \sum f\ v$$

Nilai tersebut ditunjukkan pada jumlah kolom ke-12, yaitu $\bar{V}$ = 5.88 knots.

Varian kecepatan angin dihitung dengan persamaan berikut:

$$\mathrm{var}(V) = \sum f\left(v - \bar{V}\right)^2$$

Nilai tersebut ditunjukkan pada jumlah kolom ke-13, yaitu var(V) = 8.18 knots^2.

Nilai rata-rata dan varian arah angin.

Dengan cara yang sama seperti pada hitungan kecepatan rata-rata dan varian angin, diperoleh:

$$\bar{\Theta} = \sum f\ \theta = 104°\ ,$$

$$\mathrm{var}(\Theta) = \sum f\left(\theta - \bar{\Theta}\right)^2 = 7140\ \mathrm{deg}^2\ .$$

Tabel 1. Hitungan frekuensi kejadian kecepatan (magnitude dan arah) angin di Dok II Jayapura tahun 2001–2005.

Kecepatan Angin, v (knots)		Arah Angin, θ (°)								Σ	$f\,v$	$f\left(v-\bar{v}\right)^2$
		337.5-22.5	22.5-67.5	67.5-112.5	112.5-157.5	157.5-202.5	202.5-247.5	247.5-292.5	292.5-337.5			
		0	45	90	135	180	225	270	315			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0 – 5	2.5	5.54	3.79	13.85	4.05	4.02	1.81	2.33	1.38	36.76	0.92	4.20
5 – 10	7.5	10.62	12.23	19.69	5.64	3.87	1.93	2.40	3.35	59.73	4.48	1.57
10 – 15	12.5	0.48	0.94	0.82	0.13	0.10	0.07	0.19	0.18	2.91	0.36	1.28
15 – 20	17.5	0.04	0.17	0.08	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.36	0.06	0.48
20 – ∞	22.5	0.02	0.09	0.07	0.01	0.03	0.02	0.01	0.01	0.24	0.05	0.66
Σ		16.70	17.23	34.49	9.86	8.04	3.85	4.93	4.91	**100.00**	**5.88**	**8.18**
$f\,\theta$		0.00	7.75	31.04	13.31	14.47	8.66	13.31	15.47	**104.01**		
$f\left(\theta-\bar{\theta}\right)^2$		1806.06	599.94	67.68	94.67	464.14	563.40	1357.88	2186.71	**7140.49**		

Peluang kecepatan (magnitude) angin lebih daripada 15 knots jika arah angin berada di sektor 90° (67.5°□ – 112.5°).

Peluang kejadian ini merupakan probabilitas bersyarat (*conditional probability*). Pada kolom ke-5, tampak bahwa peluang angin berasal dari sektor 90° adalah 34.49%. Pada sektor tersebut, kecepatan angin yang melebihi 15 knots berjumlah (0.08 + 0.07)% terhadap seluruh kejadian angin pada tahun 2001-2005. Terhadap angin yang berasal dari sektor 90°, peluang angin berkecepatan lebih daripada 15 knots tersebut dengan demikian adalah:

$$\text{prob}\left(V > 15\,\text{knots}\,\middle|\,\Theta = 90°\right) = \frac{0.08 + 0.07}{34.49} = 0.0042 = 0.42\%\,.$$

Peluang arah angin 45° jika kecepatan angin 12 knots.

Ini merupakan permasalahan probabilitas bersyarat (*conditional probability*). Peluang seluruh kejadian angin berkecepatan 12 knots adalah 2.91%, relatif terhadap seluruh kejadian angin pada tahun 2001-2005 (lihat jumlah kejadian pada kecepatan angin 10 – 15 knots). Pada kecepatan angin 12 knots tersebut, terdapat 0.94% kemungkinan arah angin dari sektor 45°. Terhadap angin berkecepatan 12 knots, peluang arah angin dari sektor 45° adalah:

$$\text{prob}\left(\Theta = 45°\,\middle|\,V = 12\,\text{knots}\right) = \frac{0.94}{2.91} = 0.3247 = 32.47\%\,.$$

Buatlah tabel yang menunjukkan probabilitas kecepatan angin sektor 22.5° – 112.5°.

Probabilitas kecepatan angin sektor 22.5° – 112.5° diperoleh denga menjumlahkan seluruh kejadian angin yang berasal dari sektor tersebut, yaitu penjumlahan data pada kolom ke-5 dan 6.

V (knots)		θ (°) 22.5 – 112.5 67.5
0 – 5	2.5	17.64
5 – 10	7.5	31.91
10 – 15	12.5	1.76
15 – 20	17.5	0.25
20 – ∞	22.5	0.16
Σ		51.72

SOAL B

Salah satu parameter kualitas air yang dipakai sebagai air pendingin pembangkit listrik tenaga uap (PLTU) adalah temperatur air di intake. Data pencatatan yang dilakukan setiap hari selama setahun terakhir dirangkum dalam tabel di bawah ini.

temp. air, X°C	25	26	27	28	29	30	31	32	33	Σ
frekuensi, f	9	22	43	65	76	67	49	24	10	365

Apabila temperatur air tersebut dianggap berdistribusi normal, hitunglah:

- kemungkinan mendapati temperatur air berkisar antara 27 – 31°C,
- kemungkinan mendapati temperatur air di luar batas toleransi 26 – 32°C,
- kemungkinan mendapati temperatur air kurang daripada 30°C,
- buatlah sketsa sebaran frekuensi temperatur air tersebut, dan
- rentang keyakinan temperatur air rata-rata dengan tingkat keyakinan 95%.

PENYELESAIAN

Dengan anggapan bahwa temperatur air di intake selama setahun tersebut berdistribusi normal, maka distribusi frekuensi temperatur air di intake tersebut dapat diperkirakan dengan memanfaatkan persamaan distribusi teoretik. Untuk keperluan itu, perlu dihitung terlebih dulu nilai temperatur rata-rata dan simpangan baku temperatur. Hitungan disajikan pada tabel di bawah ini.

Tabel 2. Hitungan nilai rata-rata dan simpangan baku temperatur air di intake berdasarkan data pengukuran selama 1 tahun.

temp. air, X°C	25	26	27	28	29	30	31	32	33	Σ
frekuensi, f	9	22	43	65	76	67	49	24	10	365
fX	225	572	1161	1820	2204	2010	1519	768	330	10609
fX^2	5625	14872	31347	50960	63916	60300	47089	24576	10890	309575
$f(X-\bar{X})^2$	144	198	172	65	0	67	196	216	160	1218

Temperatur air rata-rata (lihat baris ke-1, 2, dan 3 pada tabel di atas) adalah:

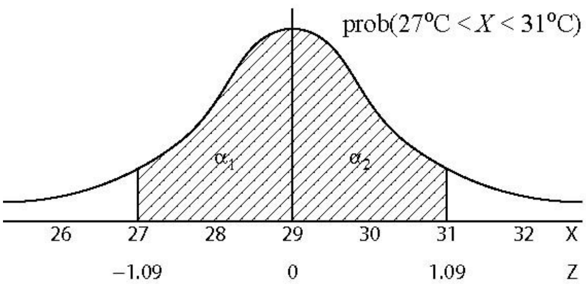
$$\bar{X} = \frac{\left(\sum f X\right)}{\sum f} = \frac{10609}{365} = 29°\text{C}$$

Simpangan baku temperatur air dapat dengan mudah dihitung (lihat baris ke-3, 4 dan 5 pada tabel di atas) sebagai berikut:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f\left(X-\bar{X}\right)^2}{\sum f - 1}} = \sqrt{\frac{\sum f X^2 - \left(\sum f X\right)^2 / \sum f}{\sum f - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{309575 - 10609^2/365}{365-1}} = 1.83°\text{C}$$

Kemungkinan mendapati temperatur air berkisar antara 27 – 31°C.



$$Z = \frac{X-\bar{X}}{s} = \frac{X-29}{1.83}.$$

$X = 27°\text{C} \rightarrow$

$Z_{27} = (27-29)/1.83 = -1.09.$

$X = 31°\text{C} \rightarrow$

$Z_{31} = (31-29)/1.83 = 1.09.$

prob(27°C < X < 31°C) = prob(–1.09 < Z < 1.09).

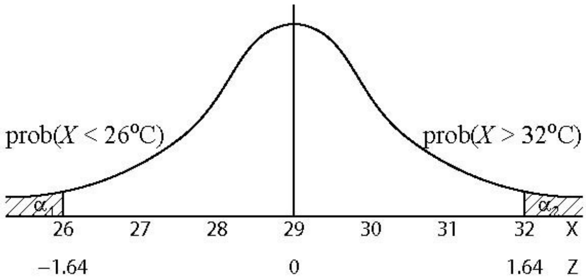
Memperhatikan sifat simetri distribusi normal, diperoleh prob(27°C < X < 29°C) = prob(29°C < X < 31°C). Dengan menggunakan tabel distribusi normal standar yang telah disediakan, diperoleh:

prob(29°C < X < 31°C) = prob(0 < Z < 1.09) = α_2 = 0.3621.

Dengan demikian:

prob(27°C < X < 31°C) = 2 × 0.3621 = 0.7242 ≈ 72.5%.

Kemungkinan mendapati temperatur air di luar batas toleransi 26 – 32°C.



X = 26°C →
Z_{26} = (26 – 29)/1.83 = –1.64.
X = 32°C →
Z_{32} = (32 – 29)/1.83 = 1.64.

prob(X < 26°C) = prob(Z < –1.64),
prob(X > 32°C) = prob(Z > 1.64).

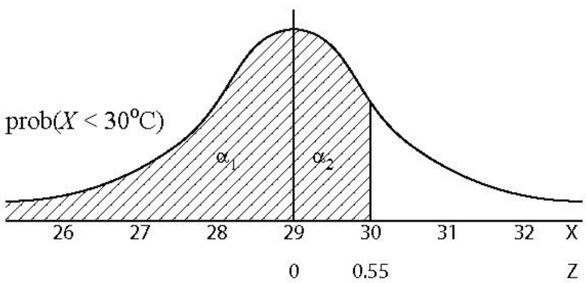
Mengingat sifat simetri distribusi normal, nilai kedua probabilitas tersebut sama. Dengan menggunakan tabel distribusi normal standar yang telah disediakan, diperoleh:

prob(X > 32°C) = prob(Z > 1.64) = α_2 = 0.5 – 0.4495 = 0.0505.

Dengan demikian:

prob(X < 26°C atau X > 32°C) = 2 × 0.0505 = 0.1010 ≈ 10%.

Kemungkinan mendapati temperatur kurang daripada 30°C.



X = 30°C →
Z_{30} = (30 – 29)/1.83 = 0.55.

prob(X < 30°C) = prob(Z < 0.55).

Dengan menggunakan tabel distribusi normal standar yang telah disediakan, diperoleh:

prob(X < 30°C) = prob(Z < 0.55) = $\alpha_1 + \alpha_2$ = 0.5 + 0.2088 = 0.7088 ≈ 71%.

Sketsa distribusi frekuensi.

Sketsa distribusi frekuensi dapat dibuat dengan memplotkan setiap nilai temperatur air terhadap frekuensi relatifnya (kolom ke-1 terhadap kolom ke-3 pada tabel di bawah ini). Plot diujudkan dalam bentuk histogram seperti disajikan pada gambar di bawah tabel berikut ini. Pada sketsa tersebut disajikan pula distribusi frekuensi teoretik yang diperoleh dari plot nilai-nilai pada kolom ke-1 dan kolom ke-8. Nilai frekuensi teoretik pada kolom ke-8 diperoleh dari hubungan antara pdf dan cdf berikut:

$$f_X(x) = \Delta x \cdot p_X(x)$$

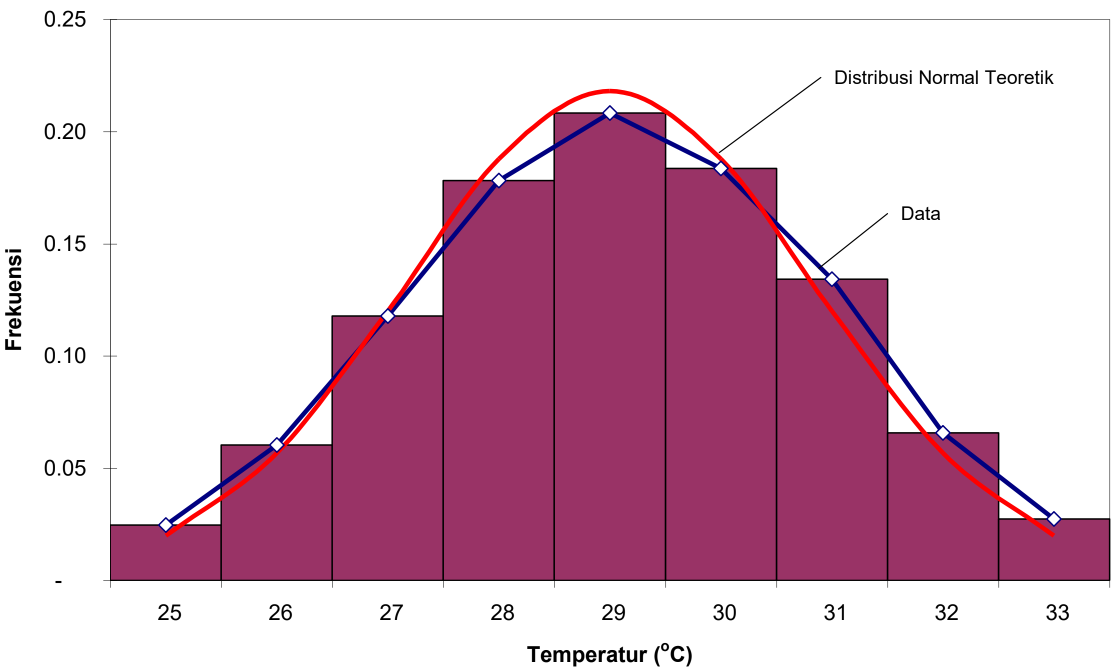
$$p_X(x) = \frac{\mathrm{d}\,P_X(x)}{\mathrm{d}\,x} \rightarrow p_X(x) = \frac{P_X(x)_{\text{batas atas}} - P_X(x)_{\text{batas bawah}}}{\Delta x}$$

$$f_X(x) = P_X(x)_{\text{batas atas}} - P_X(x)_{\text{batas bawah}}$$

dalam persamaan tersebut, $P_X(x) = \text{prob}(X < x)$ adalah nilai kumulatif (cdf) dan Δx adalah lebar klas, yang dalam hal ini dipakai lebar klas 1°C. Nilai prob($X < x$) dapat diperoleh dengan mudah dengan memakai tabel distribusi normal standar. Untuk memakai tabel ini, nilai X perlu diubah dulu menjadi nilai Z.

Tabel 3. Hitungan frekuensi kejadian elevasi muka air reservoir dengan anggapan elevasi muka air reservoir berdistribusi normal.

X°C	frek	frek rel	Klas *X*		Klas *Z*		frek teoretik
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
25	9	0.02	24.5	25.5	-2.4590	-1.9126	0.02
26	22	0.06	25.5	26.5	-1.9126	-1.3661	0.06
27	43	0.12	26.5	27.5	-1.3661	-0.8197	0.12
28	65	0.18	27.5	28.5	-0.8197	-0.2732	0.19
29	76	0.21	28.5	29.5	-0.2732	0.2732	0.22
30	67	0.18	29.5	30.5	0.2732	0.8197	0.19
31	49	0.13	30.5	31.5	0.8197	1.3661	0.12
32	24	0.07	31.5	32.5	1.3661	1.9126	0.06
33	10	0.03	32.5	33.5	1.9126	2.4590	0.02



Gambar 1. Kurva distribusi probabilitas kejadian elevasi muka air reservoir.

Rentang keyakinan temperatur air rata-rata.

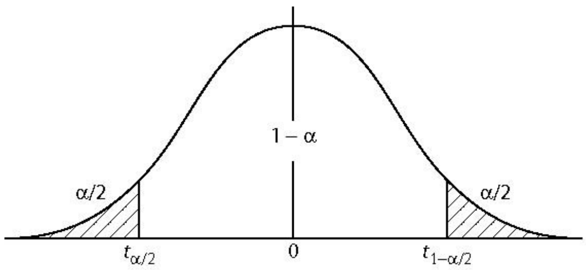
Rentang keyakinan (*confidence interval*) temperatur air rata-rata didefinisikan sebagai rentang temperatur dengan batas bawah L dan batas U sedemikian hingga dengan tingkat keyakinan $(1-\alpha)$, atau dengan probabilitas $(1-\alpha)$, nilai temperatur air rata-rata, μ, berada di dalam rentang tersebut:

$$\text{prob}(L < \mu < U) = (1-\alpha)$$

Mengingat temperatur air di depan intake berdistribusi normal, maka suatu variabel random V yang didefinisikan sebagai $V = (\overline{X} - \mu)/s_{\overline{X}}$ berdistribusi t. Dengan demikian, rentang keyakinan temperatur air rata-rata dapat dicari dari:

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\overline{X} - \mu}{s_{\overline{X}}} < v_2 \right) = 1 - \alpha$$

Jika nilai v_1 dan v_2 ditetapkan sedemikian sehingga prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$), dan dengan demikian prob($t < v_1$) = prob($t > v_2$) = $\alpha/2$ (lihat sketsa di bawah), maka batas bawah dan atas rentang keyakinan temperatur air rata-rata dapat diperoleh dari:



$$\text{prob}\left(t_{a/2,n-1} < \frac{\overline{X} - \mu}{s_{\overline{X}}} < t_{1-\alpha/2,n-1} \right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(\overline{X} + t_{a/2,n-1}\, s_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\alpha/2,n-1}\, s_{\overline{X}}\right) = 1 - \alpha$$

Dalam persamaan di atas, n adalah jumlah data ($n = \Sigma f$), $t_{\alpha/2}$ dan $t_{1-\alpha/2}$ masing-masing adalah nilai X sedemikian hingga prob($X < t_{\alpha/2}$) = $\alpha/2$ dan prob($X < t_{1-\alpha/2}$) = $1 - \alpha/2$ untuk $\nu = n - 1$ *degrees of freedom*, serta $s_{\overline{X}} = s/\sqrt{n}$. Nilai batas bawah dan atas rentang keyakinan temperatur air rata-rata dengan demikian adalah:

$l = \overline{X} + t_{\alpha/2}\left(s_X / \sqrt{n}\right)$ dan $u = \overline{X} + t_{1-\alpha/2}\left(s_X / \sqrt{n}\right)$.

Dengan nilai *degrees of freedom* $\nu = 364$ dan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 0.95$ ($\alpha/2$ = 0.025 dan $1 - \alpha/2 = 0.975$), maka dengan memakai tabel distribusi t, diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

prob($T < t_{0.025}$) = 0.025 → $t_{0.025} = -1.9665$ dan
prob($T < t_{0.975}$) = 0.975 → $t_{0.975} = 1.9665$.

Dengan demikian, batas bawah dan atas rentang keyakinan temperatur air rata-rata di depan intake adalah:

$l = 29 - 1.9665\left(1.83/\sqrt{365}\right) = 28.81°\text{C}$ dan $u = 29 + 1.9665\left(1.83/\sqrt{365}\right) = 29.19°\text{C}$

sehingga: $28.81°\text{C} \le \overline{T} \le 29.19°\text{C}$.

PENYELESAIAN SOAL UJIAN AKHIR SEMESTER 2005

SOAL A

Sama dengan Soal B UTS 2005.

SOAL B

Laboratorium Hidraulika Jurusan Teknik Sipil FT UGM baru saja membeli dua buah currentmeter. Kedua alat dicoba di flume dan hasil pengukuran kecepatan di titik yang sama ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

Currentmeter #1	
Pengukuran ke-	Kecepatan aliran (m/s)
1	0.36
2	0.29
3	0.33
4	0.37
5	0.35
6	0.36
7	0.38
8	0.38
9	0.30
10	0.37

Currentmeter #2	
Pengukuran ke-	Kecepatan aliran (m/s)
1	0.37
2	0.36
3	0.31
4	0.32
5	0.34
6	0.38
7	0.35
8	0.37

Apakah dapat disimpulkan bahwa currentmeter kedua lebih baik daripada currentmeter pertama (lebih konsisten, memiliki varian hasil pengukuran kecepatan lebih kecil)? Asumsi maupun tetapan yang Saudara anggap perlu harap dinyatakan dengan jelas.

PENYELESAIAN

Langkah pertama adalah mengasumsikan bahwa data hasil pengukuran kedua currentmeter tersebut berdistribusi normal. Kualitas currentmeter diukur dari kekonsistenan hasil pengukuran. Hasil pengukuran konsisten apabila nilai varian data pengukuran rendah. Di sini, diperlukan pembuktian bahwa varian hasil pengukuran salah satu currentmeter berbeda (lebih besar atau lebih kecil) daripada varian hasil pengukuran currentmeter yang lain. Untuk keperluan ini, disusun suatu hipotesis sebagai berikut:

Hipotesis utama (*null hipothesis*), H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Hipotesis alternatif (*alternative hypothesis*), H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Statistik uji pada pembuktian ini adalah $F_c = s_1^2/s_2^2$. Dalam persamaan ini, s_1^2 dan s_2^2 masing-masing adalah varian kelompok sampel hasil pengukuran currentmeter #1 dan #2.

H_0 diterima apabila $F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-2} > F_c$. Dalam persamaan ini, $1 - \alpha$ adalah tingkat keyakinan, $n_1 - 1$ dan $n_2 - 2$ adalah *degrees of freedom* kelompok sampel pertama dan kedua. Penerimaan H_0 berarti penerimaan hipotesis yang menyatakan bahwa kedua kelompok sampel memiliki varian yang sama, yang berarti bahwa konsistensi hasil pengukuran kedua currentmeter tidak berbeda secara signifikan.

Data hasil pengukuran kedua currentmeter menunjukkan bahwa varian kedua sampel masing-masing adalah:
$s_1^2 = 0.0010$ m^2/s^2 dan
$s_2^2 = 0.0006$ m^2/s^2.

Melihat kedua nilai varian tersebut, sebenarnya hipotesis alternatif dapat dituliskan H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Dengan nilai kedua varian tersebut, maka nilai statistik uji adalah $F_c = s_1^2/s_2^2 = 1.6422$.

Dengan tingkat keyakinan $1 - \alpha = 95\%$, diperoleh nilai $F_{0.95,9,7} = 3.6767$. Karena $F_{0.95,9,7} > F_c$, maka H_0 diterima. Jadi kedua sampel tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan antara varian hasil pengukuran currentmeter yang satu dengan hasil pengukuran currentmeter yang lain (dengan tingkat keyakinan 95%). Dengan demikian, tidak dapat dikatakan bahwa currentmeter yang satu lebih baik daripada currentmeter yang lain.

PENYELESAIAN SOAL UJIAN AKHIR SEMESTER 2005 (ULANGAN)

SOAL A

Sama dengan Soal B UTS 2005.
Sama dengan Soal A UAS 2005.

SOAL B

Hasil pengamatan pergerakan muka air di suatu reservoir menunjukkan bahwa elevasi muka air tersebut dapat dinyatakan sebagai variabel random kontinyu, X m, dengan probabilitas kejadian, $p_X(x)$, mengikuti distribusi sbb.

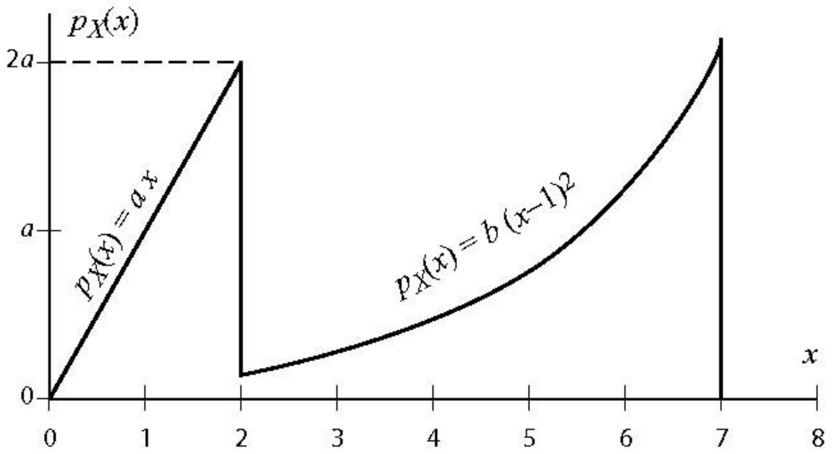
$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= a\,x && \text{untuk } 0\text{ m} \le x \le 2\text{ m},\\
&= b(x-1)^2 && \text{untuk } 2\text{ m} < x \le 7\text{ m},\\
&= 0 && \text{untuk nilai } x \text{ yang lain.}
\end{aligned}
$$

Di samping itu, diketahui bahwa kemungkinan muka air melebihi elevasi 2 m adalah dua kali kemungkinan elevasi kurang daripada 2 m: $\text{prob}(X > 2) = 2\ \text{prob}(X < 2)$.

- Buatlah sketsa pdf elevasi muka air tersebut.
- Carilah nilai konstanta a dan b (beri satuan jika diperlukan).
- Carilah fungsi distribusi kumulatif muka air, $P_X(x)$.
- Hitunglah probabilitas elevasi muka air melebihi 3 m.
- Hitunglah elevasi muka air rata-rata.

PENYELESAIAN

Sketsa pdf.



Konstanta *a* dan *b*.

Nilai kedua konstanta, a dan b, dapat dicari dengan dua persamaan yang dibentuk dari:

- probabilitas semua nilai elevasi muka air yang mungkin terjadi adalah 1, dan

– kemungkinan elevasi muka air melebihi 2 m adalah dua kali kemungkinan elevasi muka air kurang daripada 2 m.

Persamaan yang diperoleh adalah:

$$\text{prob}(X < 2) + \text{prob}(X > 2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{prob}(X < 2) + 2\,\text{prob}(X < 2) = 1$$

sehingga:

$$\text{prob}(X < 2) = 1/3 \text{ dan } \text{prob}(X > 2) = 2/3 .$$

Selanjutnya, dari kedua persamaan tersebut dapat dihitung nilai konstanta *a* dan *b* dengan cara sebagai berikut ini.

$$\text{prob}(X < 2) = \int_0^2 a\,x\,\mathrm{d}\,x = 1/3$$

$$1/2\,a\,x^2\Big|_0^2 = 1/3$$

$$2\,a = 1/3 \;\Rightarrow\; a = 1/6 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{prob}(X > 2) = \int_2^7 b(x-1)^2\,\mathrm{d}\,x = \int_2^7 b\left(x^2 - 2x +\right)\mathrm{d}\,x = 2/3$$

$$b\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_2^7 = \frac{2}{3}$$

$$b\left[\frac{343}{3} - 49 + 7 - \frac{8}{3} + 4 - 2\right] = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{215} \text{ m}^{-2}$$

Cumulative distribution function.

Memperhatikan pdf serta sketsa pdf, tampak bahwa cdf harus dihitung pada empat rentang nilai elevasi muka air, yaitu $x < 0$ m, 0 m $< x <$ 2 m, 2 m $< x <$ 7 m, serta $x > 7$ m.

<u>Untuk $x < 0$ m.</u>

$$P_X(x) = \text{prob}(X < x) = 0 .$$

<u>Untuk 0 m $< x <$ 2 m.</u>

$$P_X(x) = \int x/6\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{12} + C_1 .$$

Syarat batas:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \text{ atau}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad P_X(x) = 1/3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 .$$

Dengan demikian:

$$P_X(x) = \frac{x^2}{12} \text{ untuk 0 m} < x < \text{2 m.}$$

Untuk 2 m < x < 7 m.

$$P_X(x) = \int \frac{2}{215}\left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{2}{215}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x + C_2\right)$$

Syarat batas: $x = 7 \quad \Rightarrow \quad P_X(x) = 1$

$$1 = \frac{2}{215}\left(\frac{343}{3} - 49 + 7 + C_2\right)$$

$$\frac{215}{2} = \frac{217}{3} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{211}{6}$$

Dengan demikian:

$$P_X(x) = \frac{2}{215}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x + \frac{211}{6}\right) = \frac{2}{215}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right) + \frac{211}{645} \quad \text{untuk 2 m} < x < \text{7 m.}$$

Untuk x > 7 m.

$P_X(x) = 1$.

Tabel 4. Rangkuman fungsi distribusi probabilitas dan distribusi kumulatif elevasi muka air reservoir.

Elevasi muka air, x	pdf, $p_X(x)$	cdf, $P_X(x)$
$x < 0$ m	$p_X(x) = 0$	$P_X(x) = 0$
0 m $< x <$ 2 m	$p_X(x) = x/6$	$P_X(x) = \frac{x^2}{12}$
2 m $< x <$ 7 m	$p_X(x) = \frac{2}{215}(x-1)^2$	$P_X(x) = \frac{2}{215}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x + \frac{211}{6}\right)$
$x > 7$ m	$p_X(x) = 0$	$P_X(x) = 1$

Probabilitas elevasi muka air melewati 3 m.

Probabilitas elevasi muka air melewati 3 m, prob(X > 3 m), dihitung dengan memakai cdf untuk 2 m < x < 7 m sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\text{prob}(X > 3\text{ m}) &= 1 - \text{prob}(X < 3\text{ m}) \\
&= 1 - P_X(3) \\
&= 1 - \frac{2}{215}\left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 + \frac{211}{6}\right) \\
&= 0.645 = 64.5\%.
\end{aligned}$$

Elevasi muka air rata-rata.

Elevasi muka air rata-rata merupakan nilai expektasi elevasi muka air, E(x), yang merupakan momen pertama terhadap sumbu ordinat pada pdf.

$$\overline{X} = \mathrm{E}(x) = \int x \; p_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^2 x \,\frac{x}{6}\,\mathrm{d}\,x + \int_2^7 x \,\frac{2}{215}\left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[\frac{x^3}{18}\right]_0^2 + \frac{2}{215}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_2^7 = \frac{8}{18} + \frac{2}{215}\left(\frac{49^2}{4} - \frac{2 \cdot 49 \cdot 7}{3} + \frac{49}{2} - \frac{16}{4} + \frac{16}{3} - \frac{4}{2}\right)$$

$= 4.12$ m.