UJIAN AKHIR SEMESTER
METODE NUMERIK

SEMESTER GENAP 2024-2025 | SENIN, 16 JUNI 2025 | 120 MENIT

Boleh membuka buku, **tidak boleh** menggunakan komputer.

Soal 1 Persamaan Diferensial Biasa (Bobot 1/3 | CP: a2, a3, a4, f5)

Soal A

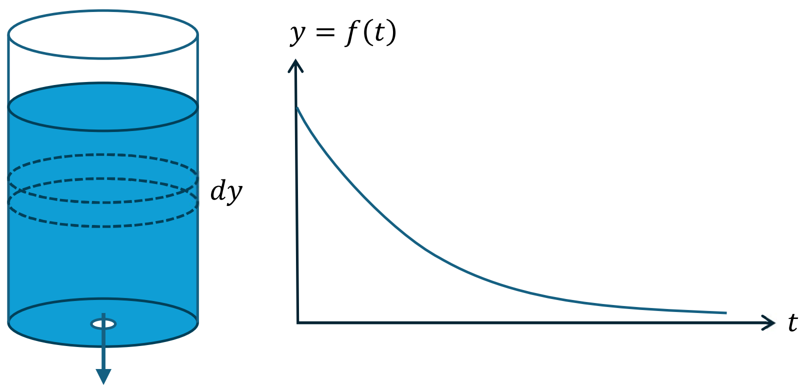
Air dalam tangki akan mengalir keluar ketika katup buang di dasar tangki dibuka. Air mengalir cepat ketika tangki penuh air. Aliran melambat seiring dengan penurunan muka air di tangki dan aliran berhenti ketika tangki telah kosong. Kecepatan penurunan muka air di tangki dinyatakan dalam persamaan matematik

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

Dalam persamaan di atas, y adalah kedalaman air di tangki dalam satuan meter, t adalah waktu dalam satuan menit, dan k adalah konstanta yang nilainya bergantung pada bentuk lubang katup buang, luas lubang katup buang, dan luas tampang melintang tangki. Apabila $k = 0.6$, tentukan durasi aliran dari tangki penuh ($y = 3$) sampai dengan tangki hampir kosong ($y \approx 0 \wedge y > 0$). Pilih salah satu metode yang telah dibahas saat kuliah. Gunakan langkah waktu $\Delta t = 0.5$ menit. Gambarlah kurva posisi muka air di tangki sebagai fungsi waktu (y *vs* t).

Penyelesaian

Gambar berikut adalah ilustrasi soal perubahan muka air di tangki ketika air mengalir keluar tangki.



Penyelesaian secara numerik persamaan diferensial biasa

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} = -0.6\sqrt{y}$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

yang memenuhi syarat awal

$$t = 0 \Rightarrow y = 3$$

dilakukan dengan memakai metode Euler, Heun, poligon, dan Runge-Kutta orde 2.

a. Metode Euler.

Posisi muka air dalam tangki dihitung dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1} = y_i + \phi_i \Delta t$$

Dalam persamaan di atas, ϕ_i adalah gradien perubahan muka air di tangki terhadap waktu atau kecepatan perubahan muka air di tangki

$$\phi_i = \left(\frac{dy}{dt}\right)_i = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

Perlu dicatat bahwa kecepatan perubahan muka air di tangki, dalam soal ini, merupakan fungsi y, $f(t, y) = f(y)$. Tabel berikut menyajikan langkah hitung posisi muka air dalam tangki menurut metode Euler.

i	t_i	y_i	ϕ_i	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	2.480
1	0.5	2.480	-0.945	2.008
2	1	2.008	-0.850	1.583
3	1.5	1.583	-0.755	1.205
4	2	1.205	-0.659	0.876
5	2.5	0.876	-0.562	0.595
6	3	0.595	-0.463	0.364
7	3.5	0.364	-0.362	0.183
8	4	0.183	-0.257	0.055
9	**4.5**	**0.055**	-0.140	-0.016
10	5	-0.016	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 4.5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 5.5 cm dari dasar tangki.

b. Metode Heun.

Posisi muka air dalam tangki dihitung dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1}^{prediktor} = y_i + \phi_i \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{2}\left(\phi_i + \phi_{i+1}^{prediktor}\right)\Delta t$$

Gradien ϕ dalam persamaan di atas dihitung dengan persamaan

$$\phi_i = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

$$\phi_{i+1}^{prediktor} = f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^{prediktor}\right) = -0.6\sqrt{y_{i+1}^{prediktor}}$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Tabel berikut menyajikan langkah hitung posisi muka air dalam tangki menurut metode Heun.

i	t_i	y_i	ϕ_i	t_{i+1}	y_{i+1}^{pred}	ϕ_{i+1}^{pred}	ϕ_{rerata}	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	0.500	2.480	-0.945	-0.992	2.504
1	0.5	2.504	-0.949	1.000	2.029	-0.855	-0.902	2.053
2	1	2.053	-0.860	1.500	1.623	-0.764	-0.812	1.647
3	1.5	1.647	-0.770	2.000	1.262	-0.674	-0.722	1.286
4	2	1.286	-0.680	2.500	0.946	-0.583	-0.632	0.970
5	2.5	0.970	-0.591	3.000	0.674	-0.493	-0.542	0.699
6	3	0.699	-0.502	3.500	0.448	-0.402	-0.452	0.473
7	3.5	0.473	-0.413	4.000	0.267	-0.310	-0.361	0.293
8	4	0.293	-0.325	4.500	0.130	-0.217	-0.271	0.157
9	4.5	0.157	-0.238	5.000	0.038	-0.117	-0.178	0.068
10	**5**	**0.068**	-0.157	5.500	-0.010	#NUM!	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 6.8 cm dari dasar tangki.

c. Metode poligon.

Posisi muka air dalam tangki dihitungan dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1/2} = y_i + \phi_i \,\Delta t/2$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi_{i+1/2}\Delta t$$

Gradien ϕ dalam persamaan di atas dihitung memakai persamaan berikut

$$\phi_i = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

$$\phi_{i+1/2} = f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) = -0.6\sqrt{y_{i+1/2}}$$

Tabel berikut menyajikan langkah hitung posisi muka air dalam tangki menurut metode poligon.

i	t_i	y_i	ϕ_i	$t_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$\phi_{i+1/2}$	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	0.250	2.740	-0.993	2.503
1	0.5	2.503	-0.949	0.750	2.266	-0.903	2.052
2	1	2.052	-0.859	1.250	1.837	-0.813	1.645
3	1.5	1.645	-0.770	1.750	1.453	-0.723	1.284
4	2	1.284	-0.680	2.250	1.114	-0.633	0.967
5	2.5	0.967	-0.590	2.750	0.820	-0.543	0.695
6	3	0.695	-0.500	3.250	0.570	-0.453	0.469
7	3.5	0.469	-0.411	3.750	0.366	-0.363	0.287
8	4	0.287	-0.322	4.250	0.207	-0.273	0.151
9	4.5	0.151	-0.233	4.750	0.093	-0.183	0.060
10	5	0.060	-0.146	5.250	0.023	-0.091	0.014
11	**5.5**	**0.014**	-0.071	5.750	-0.004	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 5.5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 1.4 cm dari dasar tangki.

d. Metode Runge-Kutta orde 2.

Posisi muka air dalam tangki dihitung dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1} = y_i + \phi_i \Delta t$$

Gradien ϕ dihitung secara bertahap dengan persamaan-persamaan berikut

$$\phi_i = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

$$k_1 = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 \Delta t, y_i + q_{11} k_1 \Delta t) = -0.6\sqrt{y_i + q_{11} k_1 \Delta t}$$

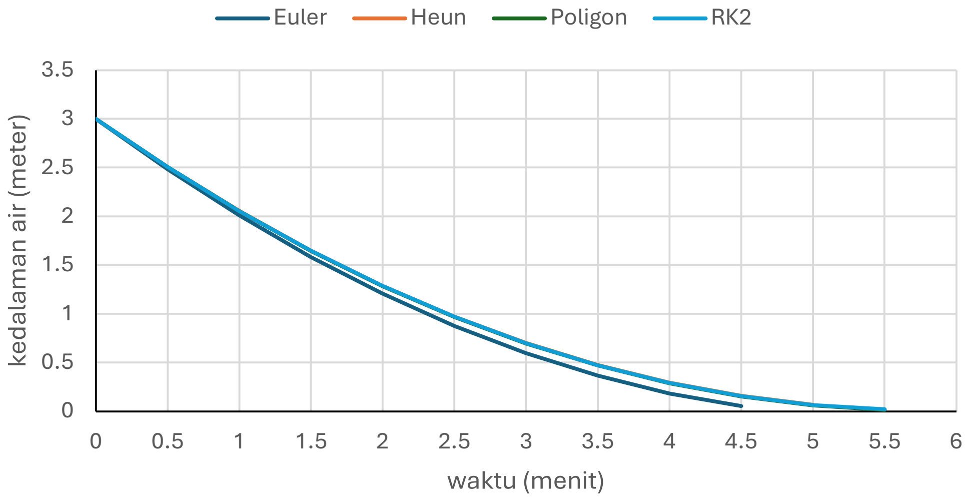
$$a_1 = 1 - a_2,\;\; a_2 = 2/3,\;\; p_1 = 1/2a_2,\;\; q_{11} = 1/2a_2$$

i	t_i	y_i	k_1	$t_i + p_1\Delta t$	$y_i + q_{11}k_1\Delta t$	k_2	ϕ_i	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	0.375	2.610	-0.969	-0.993	2.504
1	0.5	2.504	-0.949	0.875	2.148	-0.879	-0.903	2.052
2	1	2.052	-0.860	1.375	1.730	-0.789	-0.813	1.646
3	1.5	1.646	-0.770	1.875	1.357	-0.699	-0.723	1.285
4	2	1.285	-0.680	2.375	1.030	-0.609	-0.633	0.968
5	2.5	0.968	-0.590	2.875	0.747	-0.519	-0.543	0.697
6	3	0.697	-0.501	3.375	0.509	-0.428	-0.452	0.471
7	3.5	0.471	-0.412	3.875	0.317	-0.338	-0.362	0.290
8	4	0.290	-0.323	4.375	0.169	-0.246	-0.272	0.154
9	4.5	0.154	-0.235	4.875	0.066	-0.154	-0.181	0.063
10	5	0.063	-0.151	5.375	0.007	-0.049	-0.083	0.022
11	**5.5**	**0.022**	-0.089	5.875	-0.011	#NUM!	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 5.5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 2.2 cm dari dasar tangki.

e. Kurva posisi muka air dalam tangki.

Gambar berikut menampilkan posisi muka air dalam tangki seiring waktu.



Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Soal B

Struktur Jembatan Sendi Rol (disederhanakan) dibebani dengan beban merata W sebesar 10 kN per meter. Panjang bentang 6 meter. Material yang digunakan mempunyai $E = 1476 \times 10^7$ MPa, $I = 0.0016$ m⁴. Diketahui sebagai kondisi batas, lendutan di $x = 0$ yaitu $y(0) = 0$ m dan di $x = 6$ yaitu $y(6) = 0$ m. *Slope* lendutan (dy/dx) di titik tengah bentang $z(3) = 0$.

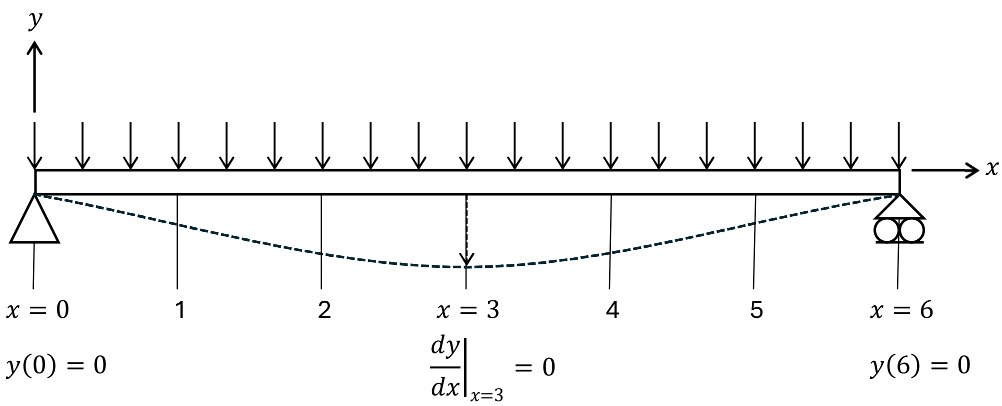
Lendutan sepanjang bentang mengikuti persamaan diferensial biasa orde 2 sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W(Lx - x^2)}{2EI}$$

Hitunglah lendutan di tengah-tengah bentang. Gunakan Metode Heun, $\Delta x = 1$ m.

Penyelesaian

Gambar berikut mengilustrasikan soal lendutan *girder* jembatan yang ditopang oleh sendi dan rol.



Persamaan lendutan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W(Lx - x^2)}{2EI}$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Syarat batas (*boundary conditions*) yang ditetapkan adalah

$$y(0)=0,\;\; y(6)=0,\;\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}=0$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde 2 dilakukan melalui pemecahan persamaan diferensial orde 2 menjadi dua persamaan diferensial biasa orde 1.

Didefinisikan 2 variabel y_1 dan y_2, yaitu

$$y_1=y$$

$$y_2=\frac{dy}{dx}$$

Persamaan lendutan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx}=f(x)=\frac{W(Lx-x^2)}{2EI}$$

Mengikuti metode Heun, integrasi numerik kedua persamaan di atas dilakukan dalam dua langkah.

Prediktor

$$y_{1,i+1}^{prediktor}=y_{1i}+\phi_{1i}\Delta x=y_{1i}+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_i\Delta x=y_{1i}+y_{2i}\Delta x$$

$$y_{2,i+1}^{prediktor}=y_{2i}+\phi_{2i}\Delta x=y_{2i}+\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_i\Delta x=y_{2i}+f(x_i)\Delta x$$

Korektor

$$y_{1,i+1}=y_{1i}+\tfrac{1}{2}\left\{y_{2i}+y_{2,i+1}^{prediktor}\right\}\Delta x$$

$$y_{2,i+1}=y_{2i}+\tfrac{1}{2}\{f(x_i)+f(x_{i+1})\}\Delta x$$

Perlu diperhatikan bahwa gradien dy_2/dx merupakan fungsi x saja. Dalam kasus lain, gradien ini dapat saja merupakan fungsi x, y_1, y_2. Dalam kasus ini, maka persamaan $y_{2,i+1}$ di langkah korektor menjadi

$$y_{2,i+1}=y_{2i}+\tfrac{1}{2}\left\{f(x_i,y_{1i},y_{2i})+f\left(x_{i+1},y_{1,i+1}^{prediktor},y_{2,i+1}^{prediktor}\right)\right\}\Delta x$$

Dalam soal ini, syarat batas y dan dy/dx ditetapkan di posisi yang berbeda. Syarat batas lendutan ditetapkan di pangkal atau di ujung bentang jembatan, dan syarat batas gradien lendutan ditetapkan di tengah bentang jembatan. Di sisi lain, metode penyelesaian numerik persamaan diferensial menghendaki syarat batas kedua persamaan diketahui di tempat yang sama. Untuk menyiasati situasi ini, maka lendutan di tengah bentang, yang telah diketahui nilai gradiennya, diperkirakan terlebih dulu sebelum melakukan hitungan penyelesaian numerik. Lendutan di tengah bentang dapat diperkirakan sebagai lendutan maksimum atau dapat pula diperkirakan sembarang nilai. Lendutan maksimum diperoleh dari persamaan

$$y_{maks} = \frac{5WL^4}{384EI} = \frac{5 \times 10 \times 10^3 \times 6^4}{384 \times 1476 \times 10^7 \times 0.0016} = 7.15 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

Sebagai syarat batas, lendutan di tengah bentang dapat pula ditetapkan sembarang nilai. Misalnya, $y(3) = 0.1$ m. Nilai lendutan ini akan dikoreksi setelah hitungan integrasi numerik selesai. Pada akhir hitungan integrasi, jika nilai lendutan di titik tumpuan tidak sama dengan nol, maka selisih nilai lendutan di titik ini akan dikoreksi menjadi sama dengan nol. Angka koreksi ini diterapkan ke semua nilai lendutan hasil hitungan integrasi numerik.

Tabel berikut menyajikan langkah hitung integrasi numerik persamaan diferensial biasa orde 2 di atas. Karena syarat batas yang lengkap berada di tengah bentang, $y(3) = 0.1$ m dan $dy/dx\ (3) = 0$, maka hitungan dilakukan dari tengah bentang, $x = 3$ m, ke ujung bentang, $x = 6$ m, dengan selang jarak $\Delta x = 1$ m. Hitungan dapat pula dilakukan dari tengah bentang, $x = 3$ m, ke pangkal bentang, $x = 0$ m, dengan selang jarak $\Delta x = -1$ m.

$\Delta x = 1$ m

i	x_i	y_i	$(dy/dx)_i$	y_{1i}	y_{2i}	$y_{1,i+1}^{pred}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	3	0.1	0	0.1	0	0.1
1	4	0.1010	0.0018	0.1010	0.0018	0.1028
2	5	0.1036	0.0032	0.1036	0.0032	0.1068
3	6	0.1073	0.0037	0.1073	0.0037	0.1110

$f(x_i)$	$y_{2,i+1}^{pred}$	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$y_{1,i+1}$	$y_{2,i+1}$	y_i (dikoreksi)[*)]
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
0.0019	0.0019	4	0.0017	0.1010	0.0018	**-0.0073**
0.0017	0.0035	5	0.0011	0.1036	0.0032	-0.0064
0.0011	0.0042	6	0.0000	0.1073	0.0037	-0.0037
0.0000	0.0037	7	-0.0015	0.1110	0.0030	0

[*)] Koreksi dilakukan terhadap y_i di kolom 3 dengan cara y_i di kolom 3 dikurangi 0.1073 m.

Hasil hitungan menyatakan bahwa lendutan di tengah bentang adalah **0.0073 m = 7.3 mm**. Tentu, hasil penyelesaian numerik persamaan lendutan tidak harus identik dengan hasil penyelesaian eksak persamaan lendutan. Di sini, tampak ada selisih antara keduanya sebesar (7.3 – 7.15) = 0.15 mm.

Soal 2 Integrasi Numerik (Bobot 1/3 | CP: a2, a3, a4, f5)

Sebuah balok horizontal yang memiliki panjang 11 meter menopang beban arah vertikal. Gaya geser dinyatakan dalam persamaan matematik

$$V(x) = 5 + 0.25x^2$$

Dalam persamaan di atas, V adalah gaya geser dalam satuan newton dan x adalah jarak di sepanjang balok yang diukur dari pangkal balok dalam satuan meter. Gaya geser berkaitan dengan momen lentur M, yaitu $V = dM/dx$. Integrasi persamaan ini menghasilkan

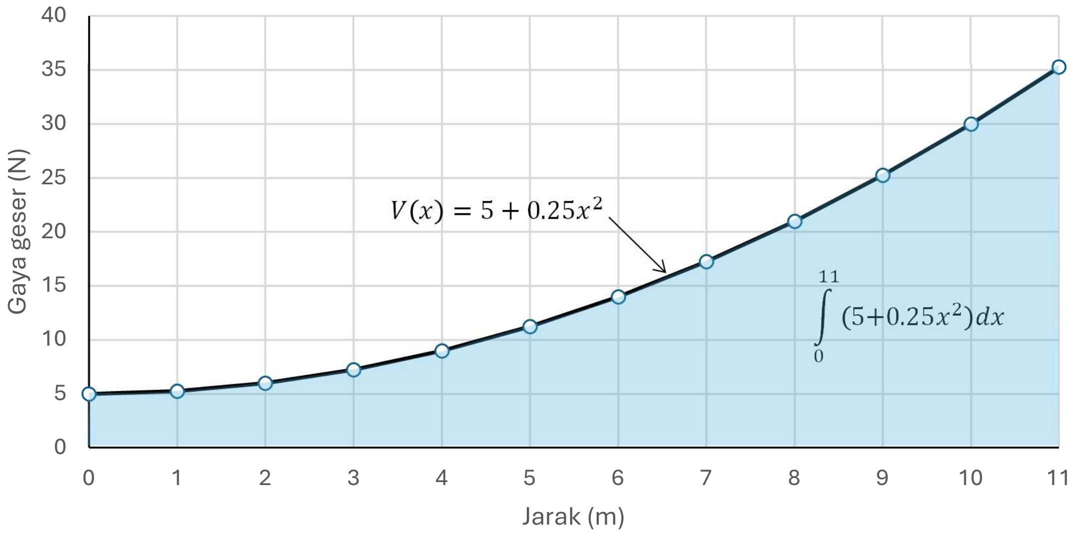
$$M = M_0 + \int_0^x V\,dx$$

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Apabila $M_0 = 0$ dan $x = 11$, hitunglah momen lentur secara numerik menggunakan metode Simpson 1/3 atau Simpson 3/8. Gunakan selang jarak $\Delta x = 1$ meter.

Penyelesaian

Gambar di bawah menampilkan kurva gaya geser sebagai fungsi posisi, $V(x)$, di sepanjang balok. *Marker* menunjukkan posisi titik hitung, yaitu tiap jarak 1 meter.



Momen lentur dapat dihitung memakai metode trapesium, Simpson 1/3, atau Simpson 3/8 multi pias. Metode Simpson 1/3 memerlukan 2 pias berjarak seragam. Untuk 2 pias antara x_a dan x_b yang berjarak $2\Delta x$, momen lentur adalah

$$M_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \int_{x_a}^{x_b} V(x)dx \approx \frac{2\Delta x}{6}\{V(x_a) + 4V(x_a + \Delta x) + V(x_b)\}$$

Simpson 3/8 memerlukan 3 pias berjarak seragam. Untuk 3 pias antara x_a dan x_b yang berjarak $3\Delta x$, momen lentur adalah

$$M_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \int_{x_a}^{x_b} V(x)dx \approx \frac{3\Delta x}{8}\{V(x_a) + 3V(x_a + \Delta x) + 3V(x_a + 2\Delta x) + V(x_b)\}$$

Tabel berikut menyajikan hitungan momen lentur di sepanjang balok.

x	$V(x)$	M	Metode	M	Metode
0	5				
1	5.25				
2	6			10.667	Simpson 1/3
3	7.25	17.25	Simpson 3/8		
4	9			14.667	Simpson 1/3
5	11.25				
6	14	30.75	Simpson 3/8	22.667	Simpson 1/3
7	17.25				
8	21			34.667	Simpson 1/3
9	25.25	57.75	Simpson 3/8		
10	30				
11	35.25	60.167	Simpson 1/3	103.969	Simpson 3/8
	***M* =**	**165.917**		**186.635**	

Momen lentur di batang adalah 165.917 Nm atau 186.635 Nm.

Soal 3 Interpolasi (Bobot 1/3 | CP: a2, a3, a4, f5)

Pengukuran elevasi lantai jembatan melintang sungai di tiga titik menunjukkan data (Stasiun, Elevasi): (0, 108.5), (40, 109), dan (60, 108). Stasiun dan Elevasi bersatuan meter. Perkirakanlah elevasi lantai jembatan di Stasiun 20 menggunakan metode interpolasi.

Penyelesaian

Tabel berikut menyajikan tiga titik data dan satu titik yang harus ditemukan melalui interpolasi.

Sta. (m)	0	20	40	60
Elevasi (m)	108.5	...	109	108

Karena ada tiga titik data, maka dipilih interpolasi polinomial orde 2 untuk mendapatkan elevasi di Sta. 20 m. Ada dua metode interpolasi metode Newton atau metode Lagrange.

a. Metode interpolasi Newton.

Persamaan polinomial orde 2 dituliskan dalam bentuk

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Dalam persamaan di atas, $f_2(x)$ adalah elevasi dalam satuan meter dan x adalah *station* dalam satuan meter. Nilai-nilai b_0, b_1, dan b_2 diperoleh dari persamaan-persamaan berikut.

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{f(x_2) - f(x_0)}$$

Hitungan disajikan dalam bentuk tabel.

i	Sta., x (m)	Elev., $f(x)$ (m)	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$	b_i
0	0	**108.5**			108.5
1	40	109	**0.0125**		0.0125
2	60	108	-0.05	**-0.0010**	-0.0010

Nilai-nilai interpolasi $f_2(x)$ di Sta. 20 dapat diperoleh setelah b_0, b_1, dan b_2 diketahui.

$$f_2(20) = 108.5 + 0.0125 \times (20 - 0) - 0.0010 \times (20 - 0) \times (20 - 40) = 109.167$$

Tabel berikut menyajikan elevasi lantai jembatan di tiap selang jarak 20 meter yang diperoleh dari data dan interpolasi polinomial orde 2 metode Newton.

Sta. (m)	0	20	40	60
Elevasi (m)	108.5	**109.167**	109	108

b. Metode interpolasi Lagrange.

Persamaan polinomial orde 2 menurut metode Lagrange adalah

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Nilai interpolasi $f_2(x)$ di Sta. 20 diperoleh dari tiga titik data.

$$f_2(20) = \left(\frac{20-40}{0-40}\right)\left(\frac{20-60}{0-60}\right)(108.5) + \left(\frac{20-0}{40-0}\right)\left(\frac{20-60}{40-60}\right)(109)$$

$$+ \left(\frac{20-0}{60-0}\right)\left(\frac{20-40}{60-40}\right)(108) = \mathbf{109.167}$$

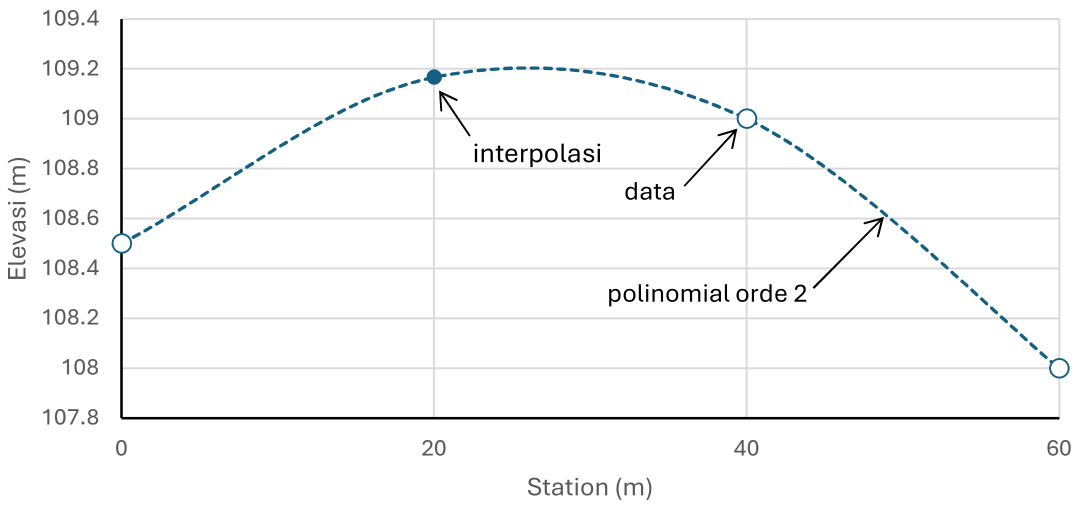
Tabel berikut menyajikan nilai-nilai elevasi lantai jembatan di tiap selang jarak 20 meter yang diperoleh dari data dan interpolasi polinomial orde 2 metode Lagrange.

Sta. (m)	0	20	40	60
Elevasi (m)	108.5	**109.167**	109	108

Tampak bahwa metode Newton dan Lagrange menghasilkan nilai elevasi lantai jembatan yang sama.

c. Profil lantai jembatan.

Gambar berikut menampilkan profil lantai jembatan yang diperoleh dari titik data dan titik interpolasi polinomial orde 2.



109.4
109.2
109
108.8
108.6
108.4
108.2
108
107.8
Elevasi (m)
0
20
40
60
Station (m)
interpolasi
data
polinomial orde 2

-o0o-