UJIAN AKHIR SEMESTER
METODE NUMERIK

SEMESTER GENAP 2024-2025 | SENIN, 16 JUNI 2025 | 120 MENIT

Boleh membuka buku, **tidak boleh** menggunakan komputer.

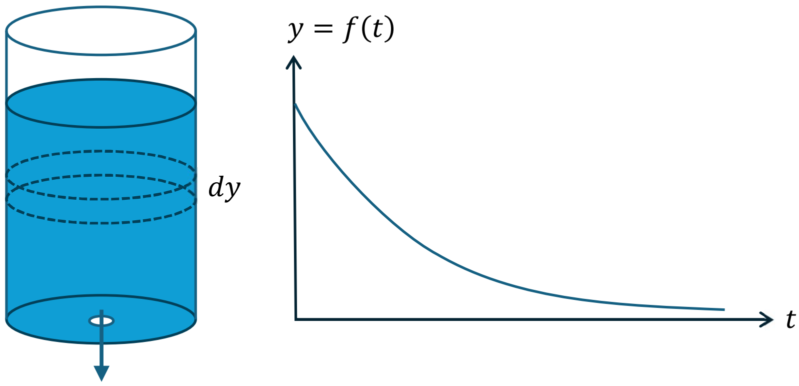
Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Soal 1 Persamaan Diferensial Biasa (Bobot 1/3 | CP: a2, a3, a4, f5)

Air dalam tangki akan mengalir keluar ketika katup buang di dasar tangki dibuka. Air mengalir cepat ketika tangki penuh air. Aliran melambat seiring dengan penurunan muka air di tangki dan aliran berhenti ketika tangki telah kosong. Kecepatan penurunan muka air di tangki dinyatakan dalam persamaan matematik

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

Dalam persamaan di atas, y adalah kedalaman air di tangki dalam satuan meter, t adalah waktu dalam satuan menit, dan k adalah konstanta yang nilainya bergantung pada bentuk lubang katup buang, luas lubang katup buang, dan luas tampang melintang tangki. Apabila $k = 0.6$, tentukan durasi aliran dari tangki penuh ($y = 3$) sampai dengan tangki hampir kosong ($y \approx 0 \wedge y > 0$). Pilih salah satu metode yang telah dibahas saat kuliah. Gunakan langkah waktu $\Delta t = 0.5$ menit. Gambarlah kurva posisi muka air di tangki sebagai fungsi waktu (y *vs* t).



Penyelesaian

Penyelesaian secara numerik persamaan diferensial biasa

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} = -0.6\sqrt{y}$$

yang memenuhi syarat awal

$$t = 0 \Rightarrow y = 3$$

dilakukan dengan memakai metode Euler, Heun, poligon, dan Runge-Kutta orde 2.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

a. Metode Euler.

Posisi muka air dalam tangki dihitung dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1} = y_i + \phi_i \Delta t$$

Dalam persamaan di atas, ϕ_i adalah gradien perubahan muka air di tangki terhadap waktu atau kecepatan perubahan muka air di tangki

$$\phi_i = \left(\frac{dy}{dt}\right)_i = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

Perlu dicatat bahwa kecepatan perubahan muka air di tangki, dalam soal ini, merupakan fungsi y, $f(t, y) = f(y)$. Tabel berikut menyajikan langkah hitung posisi muka air dalam tangki menurut metode Euler.

i	t_i	y_i	ϕ_i	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	2.480
1	0.5	2.480	-0.945	2.008
2	1	2.008	-0.850	1.583
3	1.5	1.583	-0.755	1.205
4	2	1.205	-0.659	0.876
5	2.5	0.876	-0.562	0.595
6	3	0.595	-0.463	0.364
7	3.5	0.364	-0.362	0.183
8	4	0.183	-0.257	0.055
9	**4.5**	**0.055**	-0.140	-0.016
10	5	-0.016	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 4.5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 5.5 cm dari dasar tangki.

b. Metode Heun.

Posisi muka air dalam tangki dihitung dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1}^{prediktor} = y_i + \phi_i \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{2}\left(\phi_i + \phi_{i+1}^{prediktor}\right)\Delta t$$

Gradien ϕ dalam persamaan di atas dihitung dengan persamaan

$$\phi_i = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

$$\phi_{i+1}^{prediktor} = f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^{prediktor}\right) = -0.6\sqrt{y_{i+1}^{prediktor}}$$

Tabel berikut menyajikan langkah hitung posisi muka air dalam tangki menurut metode Heun.

i	t_i	y_i	ϕ_i	t_{i+1}	y_{i+1}^{pred}	ϕ_{i+1}^{pred}	ϕ_{rerata}	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	0.500	2.480	-0.945	-0.992	2.504
1	0.5	2.504	-0.949	1.000	2.029	-0.855	-0.902	2.053

i	t_i	y_i	ϕ_i	t_{i+1}	y_{i+1}^{pred}	ϕ_{i+1}^{pred}	ϕ_{rerata}	y_{i+1}
2	1	2.053	-0.860	1.500	1.623	-0.764	-0.812	1.647
3	1.5	1.647	-0.770	2.000	1.262	-0.674	-0.722	1.286
4	2	1.286	-0.680	2.500	0.946	-0.583	-0.632	0.970
5	2.5	0.970	-0.591	3.000	0.674	-0.493	-0.542	0.699
6	3	0.699	-0.502	3.500	0.448	-0.402	-0.452	0.473
7	3.5	0.473	-0.413	4.000	0.267	-0.310	-0.361	0.293
8	4	0.293	-0.325	4.500	0.130	-0.217	-0.271	0.157
9	4.5	0.157	-0.238	5.000	0.038	-0.117	-0.178	0.068
10	**5**	**0.068**	-0.157	5.500	-0.010	#NUM!	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 6.8 cm dari dasar tangki.

c. Metode poligon.

Posisi muka air dalam tangki dihitungan dengan persamaan beda hingga berikut

$$y_{i+1/2} = y_i + \phi_i \,\Delta t/2$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi_{i+1/2}\Delta t$$

Gradien ϕ dalam persamaan di atas dihitung memakai persamaan berikut

$$\phi_i = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

$$\phi_{i+1/2} = f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) = -0.6\sqrt{y_{i+1/2}}$$

Tabel berikut menyajikan langkah hitung posisi muka air dalam tangki menurut metode poligon.

i	t_i	y_i	ϕ_i	$t_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$\phi_{i+1/2}$	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	0.250	2.740	-0.993	2.503
1	0.5	2.503	-0.949	0.750	2.266	-0.903	2.052
2	1	2.052	-0.859	1.250	1.837	-0.813	1.645
3	1.5	1.645	-0.770	1.750	1.453	-0.723	1.284
4	2	1.284	-0.680	2.250	1.114	-0.633	0.967
5	2.5	0.967	-0.590	2.750	0.820	-0.543	0.695
6	3	0.695	-0.500	3.250	0.570	-0.453	0.469
7	3.5	0.469	-0.411	3.750	0.366	-0.363	0.287
8	4	0.287	-0.322	4.250	0.207	-0.273	0.151
9	4.5	0.151	-0.233	4.750	0.093	-0.183	0.060
10	5	0.060	-0.146	5.250	0.023	-0.091	0.014
11	**5.5**	**0.014**	-0.071	5.750	-0.004	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 5.5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 1.4 cm dari dasar tangki.

d. Metode Runge-Kutta orde 2.

Posisi muka air dalam tangki dihitung dengan persamaan beda hingga berikut

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

$$y_{i+1} = y_i + \phi_i \Delta t$$

Gradien ϕ dihitung secara bertahap dengan persamaan-persamaan berikut

$$\phi_i = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

$$k_1 = f(t_i, y_i) = -0.6\sqrt{y_i}$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 \Delta t, y_i + q_{11} k_1 \Delta t) = -0.6\sqrt{y_i + q_{11} k_1 \Delta t}$$

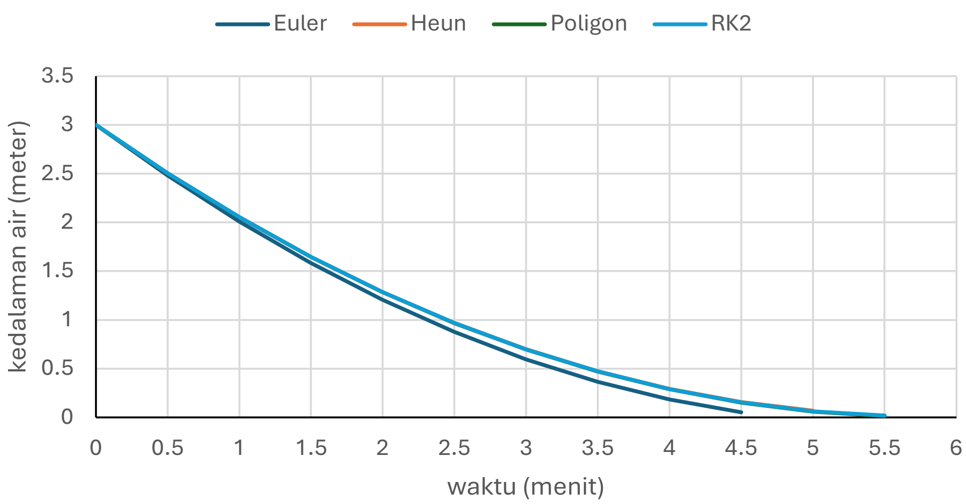
$$a_1 = 1 - a_2,\ \ a_2 = 2/3,\ \ p_1 = 1/2a_2,\ \ q_{11} = 1/2a_2$$

i	t_i	y_i	k_1	$t_i + p_1\Delta t$	$y_i + q_{11}k_1\Delta t$	k_2	ϕ_i	y_{i+1}
0	0	3	-1.039	0.375	2.610	-0.969	-0.993	2.504
1	0.5	2.504	-0.949	0.875	2.148	-0.879	-0.903	2.052
2	1	2.052	-0.860	1.375	1.730	-0.789	-0.813	1.646
3	1.5	1.646	-0.770	1.875	1.357	-0.699	-0.723	1.285
4	2	1.285	-0.680	2.375	1.030	-0.609	-0.633	0.968
5	2.5	0.968	-0.590	2.875	0.747	-0.519	-0.543	0.697
6	3	0.697	-0.501	3.375	0.509	-0.428	-0.452	0.471
7	3.5	0.471	-0.412	3.875	0.317	-0.338	-0.362	0.290
8	4	0.290	-0.323	4.375	0.169	-0.246	-0.272	0.154
9	4.5	0.154	-0.235	4.875	0.066	-0.154	-0.181	0.063
10	5	0.063	-0.151	5.375	0.007	-0.049	-0.083	0.022
11	**5.5**	**0.022**	-0.089	5.875	-0.011	#NUM!	#NUM!	#NUM!

Hitungan menunjukkan bahwa tangki telah kosong dalam waktu 5.5 menit. Saat itu, posisi muka air adalah 2.2 cm dari dasar tangki.

e. Kurva posisi muka air dalam tangki.

Gambar berikut menampilkan posisi muka air dalam tangki seiring waktu.



Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Soal 2 Integrasi Numerik (Bobot 1/3 | CP: a2, a3, a4, f5)

Sebuah balok horizontal yang memiliki panjang 11 meter menopang beban arah vertikal. Gaya geser dinyatakan dalam persamaan matematik

$$V(x) = 5 + 0.25x^2$$

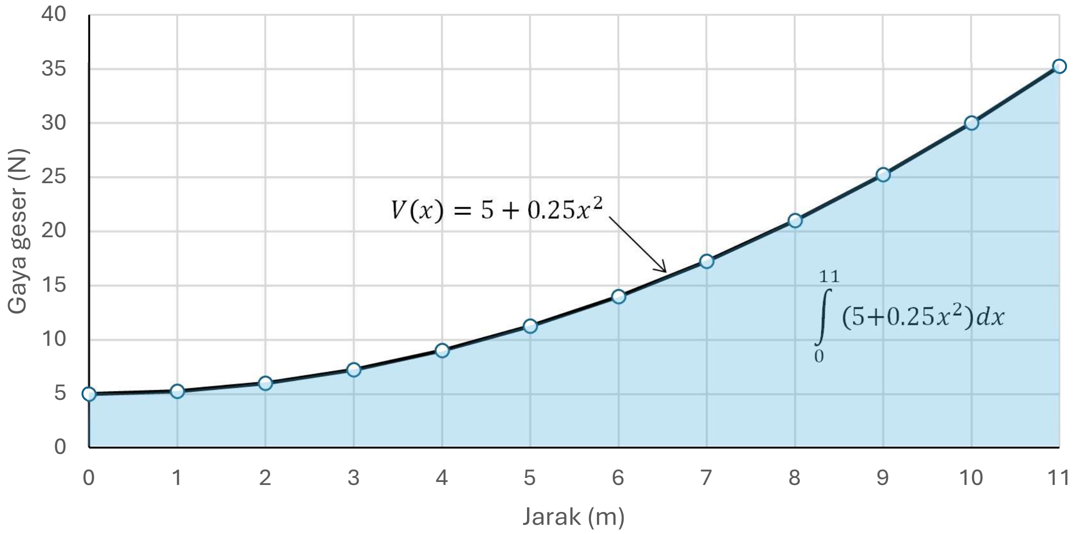
Dalam persamaan di atas, V adalah gaya geser dalam satuan newton dan x adalah jarak di sepanjang balok yang diukur dari pangkal balok dalam satuan meter. Gaya geser berkaitan dengan momen lentur M, yaitu $V = dM/dx$. Integrasi persamaan ini menghasilkan

$$M = M_0 + \int_0^x V\,dx$$

Apabila $M_0 = 0$ dan $x = 11$, hitunglah momen lentur secara numerik menggunakan metode Simpson 1/3 atau Simpson 3/8. Gunakan selang jarak $\Delta x = 1$ meter.

Penyelesaian

Gambar di bawah menampilkan kurva gaya geser sebagai fungsi posisi, $V(x)$, di sepanjang balok. *Marker* menunjukkan posisi titik hitung, yaitu tiap jarak 1 meter.



Momen lentur dapat dihitung memakai metode trapesium, Simpson 1/3, atau Simpson 3/8 multi pias. Metode Simpson 1/3 memerlukan 2 pias berjarak seragam. Untuk 2 pias antara x_a dan x_b yang berjarak $2\Delta x$, momen lentur adalah

$$M_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \int_{x_a}^{x_b} V(x)dx \approx \frac{2\Delta x}{6}\{V(x_a) + 4V(x_a + \Delta x) + V(x_b)\}$$

Simpson 3/8 memerlukan 3 pias berjarak seragam. Untuk 3 pias antara x_a dan x_b yang berjarak $3\Delta x$, momen lentur adalah

$$M_i = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \int_{x_a}^{x_b} V(x)dx \approx \frac{3\Delta x}{8}\{V(x_a) + 3V(x_a + \Delta x) + 3V(x_a + 2\Delta x) + V(x_b)\}$$

Tabel berikut menyajikan hitungan momen lentur di sepanjang balok.

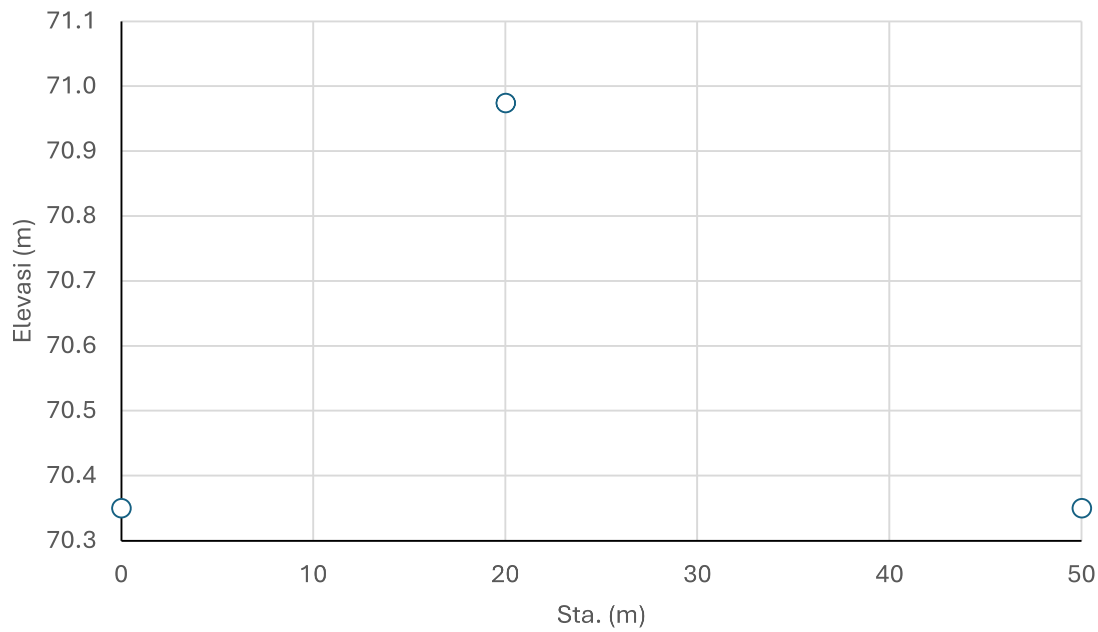
x	$V(x)$	M	Metode	M	Metode
0	5				
1	5.25				
2	6			10.667	Simpson 1/3
3	7.25	17.25	Simpson 3/8		
4	9			14.667	Simpson 1/3
5	11.25				
6	14	30.75	Simpson 3/8	22.667	Simpson 1/3
7	17.25				
8	21			34.667	Simpson 1/3
9	25.25	57.75	Simpson 3/8		
10	30				
11	35.25	60.167	Simpson 1/3	103.969	Simpson 3/8
	M =	**165.917**		**186.635**	

Momen lentur di batang adalah 165.917 Nm atau 186.635 Nm.

Soal 3 Interpolasi (Bobot 1/3 | CP: a2, a3, a4, f5)

Tabel berikut menampilkan hasil pengukuran elevasi lantai jembatan melintang sebuah saluran irigasi. Tampak bahwa titik-titik data ukur tidak berada di jarak (*station*, Sta.) yang beraturan. Perkirakanlah elevasi lantai jembatan di titik-titik berselang jarak 10 meter. Gunakan interpolasi polinomial orde 2 (kurva parabolik). Gambarlah profil lantai jembatan.

Sta. (m)	0	10	20	30	40	50
Elevasi (m)	70.35	...	70.974	...	...	70.35



Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id

Penyelesaian

Kurva interpolasi parabolik dapat diperoleh dengan cara interpolasi metode Newton atau metode Lagrange.

a. Metode interpolasi Newton.

Persamaan polinomial orde 2 dituliskan dalam bentuk

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Dalam persamaan di atas, $f_2(x)$ adalah elevasi dalam satuan meter dan x adalah *station* dalam satuan meter. Nilai-nilai b_0, b_1, dan b_2 diperoleh dari persamaan-persamaan berikut.

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{f(x_2) - f(x_0)}$$

Hitungan disajikan dalam bentuk tabel.

i	Sta., x (m)	Elev., $f(x)$ (m)	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$	b_i
0	0	**70.35**			70.35
1	20	70.974	**0.0312**		0.0312
2	50	70.35	-0.0208	**-0.0010**	-0.0010

Nilai-nilai interpolasi $f_2(x)$ di Sta. 10, 30, dan 40 dapat diperoleh setelah b_0, b_1, dan b_2 diketahui. Misalnya,

$$f_2(10) = 70.35 + 0.0312 \times (10 - 0) - 0.0010 \times (10 - 0) \times (10 - 20) = 70.766$$

Tabel berikut menyajikan nilai-nilai elevasi lantai jembatan di tiap selang jarak 10 meter yang diperoleh dari data dan interpolasi polinomial orde 2 metode Newton.

Sta. (m)	0	10	20	30	40	50
Elevasi (m)	70.35	**70.766**	70.974	**70.974**	**70.766**	70.35

b. Metode interpolasi Lagrange.

Persamaan polinomial orde 2 menurut metode Lagrange adalah

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Nilai-nilai interpolasi $f_2(x)$ di Sta. 10, 30, dan 40 diperoleh dari tiga titik data.

$$f_2(10) = \left(\frac{10-20}{0-20}\right)\left(\frac{10-50}{0-50}\right)(70.35) + \left(\frac{10-0}{20-0}\right)\left(\frac{10-50}{20-50}\right)(70.974)$$
$$+ \left(\frac{10-0}{50-0}\right)\left(\frac{10-20}{50-20}\right)(70.35) = \mathbf{70.766}$$

$$f_2(30) = \left(\frac{30-20}{0-20}\right)\left(\frac{30-50}{0-50}\right)(70.35) + \left(\frac{30-0}{20-0}\right)\left(\frac{30-50}{20-50}\right)(70.974)$$
$$+ \left(\frac{30-0}{50-0}\right)\left(\frac{30-20}{50-20}\right)(70.35) = \mathbf{70.974}$$

$$f_2(40) = \left(\frac{40-20}{0-20}\right)\left(\frac{40-50}{0-50}\right)(70.35) + \left(\frac{40-0}{20-0}\right)\left(\frac{40-50}{20-50}\right)(70.974)$$
$$+ \left(\frac{40-0}{50-0}\right)\left(\frac{40-20}{50-20}\right)(70.35) = \mathbf{70.766}$$

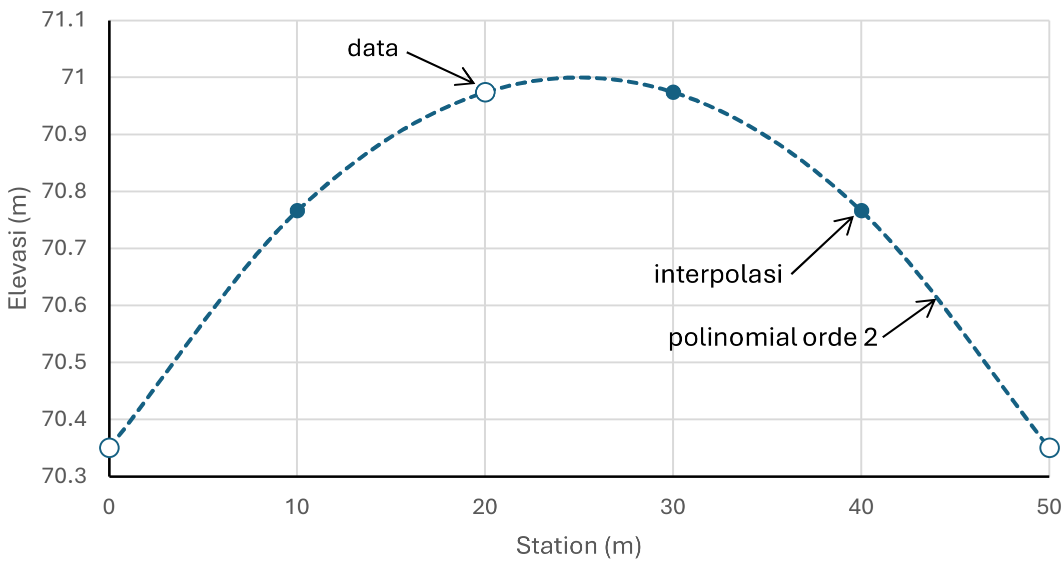
Tabel berikut menyajikan nilai-nilai elevasi lantai jembatan di tiap selang jarak 10 meter yang diperoleh dari data dan interpolasi polinomial orde 2 metode Lagrange.

Sta. (m)	0	10	20	30	40	50
Elevasi (m)	70.35	**70.766**	70.974	**70.974**	**70.766**	70.35

Tampak bahwa metode Newton dan Lagrange menghasilkan nilai-nilai elevasi lantai jembatan yang sama.

c. Profil lantai jembatan.

Gambar berikut menampilkan profil lantai jembatan yang diperoleh dari titik data dan titik interpolasi polinomial orde 2.



-o0o-

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id • email: istiarto@ugm.ac.id