

# UJIAN TENGAH SEMESTER

## METODE NUMERIK

SEMESTER GENAP 2024-2025 | SENIN, 14 APRIL 2025 | 120 MENIT

Boleh membuka buku, boleh menggunakan kalkulator, **tidak boleh** menggunakan komputer/perangkat yang dapat mengakses internet.

### Soal 1 Akar Persamaan (SO a1, a2, a3; bobot 40%)

Sebuah benda padat bermassa  $m$  jatuh bebas di udara dengan kecepatan  $v$ . Gaya-gaya yang bekerja adalah gaya gravitasi (ke bawah) dan gaya gesek (ke atas). Gaya gesek  $F_D$  dinyatakan oleh persamaan

$$F_D = \frac{v^2}{500 + (\ln v)^3} - 0.02v$$

Kecepatan terminal ( $v_t$ ) dicapai ketika magnitud gaya gesek dan gaya gravitasi sama besar. Pada saat itu, kecepatan konstan. Resultan kedua gaya sama dengan nol.

$$F_D - mg = 0$$

Temukan kecepatan terminal menggunakan **dua metode hitungan** akar persamaan. Massa benda  $m = 1$  kg dan percepatan gravitasi  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Gunakan nilai perkiraan awal antara 0 sampai dengan 100 m/s dan nilai toleransi kesalahan  $F \leq 0.0001$ .

### Jawab

Persamaan resultan gaya saat kecepatan terminal telah dicapai adalah

$$\frac{v^2}{500 + (\ln v)^3} - 0.02v - mg = 0 \Rightarrow \frac{v_t^2}{500 + (\ln v_t)^3} - 0.02v_t - 10 = 0$$

Akar persamaan dicari menggunakan metode pendekatan berurutan, *bisection*, dan metode *secant*. Hitungan disajikan dalam bentuk tabel. Kecepatan terminal yang diperoleh dari ketiga metode hitungan adalah  $v_t = 82.64 \text{ m/s}$ .

a. Metode pendekatan berurutan.

Bentuk persamaan resultan gaya diubah menjadi

$$v_t = \sqrt{\{500 + (\ln v_t)^3\}(0.02v_t + 10)}$$

| iterasi, $i$ | $v_{ti}$ | $v_{t,i+1}$ | $\Delta t$ |
|--------------|----------|-------------|------------|
| 0            | 100      | 84.6875     | 15.3125    |
| 1            | 84.6875  | 82.8836     | 1.8039     |
| 2            | 82.8836  | 82.6664     | 0.2172     |
| 3            | 82.6664  | 82.6402     | 0.0262     |
| 4            | 82.6402  | 82.6370     | 0.0032     |
| 5            | 82.6370  | 82.6366     | 0.0004     |
| 6            | 82.6366  | 82.6366     | 0.0000     |

b. Metode *bisection*.

Bentuk persamaan resultan gaya yang dipakai untuk hitungan adalah

$$f(v_t) = \frac{v_t^2}{500 + (\ln v_t)^3} - 0.02v_t - 10 \Leftrightarrow f(v_t) = 0$$

| iterasi, $i$ | $v_{ti}$ | $f(v_{ti})$ | $v_{t,i+1}$ |
|--------------|----------|-------------|-------------|
| 0            | 50       | -6.5347     |             |
| 1            | 100      | 4.7318      | 75          |
| 2            | 75       | -1.8098     | 87.5        |
| 3            | 87.5     | 1.2396      | 81.25       |
| 4            | 81.25    | -0.3411     | 84.375      |
| 5            | 84.375   | 0.4354      | 82.8125     |
| 6            | 82.8125  | 0.0437      | 82.0313     |
| 7            | 82.0313  | -0.1496     | 82.4219     |
| 8            | 82.4219  | -0.0532     | 82.6172     |
| 9            | 82.6172  | -0.0048     | 82.7148     |
| 10           | 82.7148  | 0.0194      | 82.6660     |
| 11           | 82.6660  | 0.0073      | 82.6416     |
| 12           | 82.6416  | 0.0012      | 82.6294     |
| 13           | 82.6294  | -0.0018     | 82.6355     |
| 14           | 82.6355  | -0.0003     | 82.6385     |
| 15           | 82.6385  | 0.0005      | 82.6370     |
| 16           | 82.6370  | 0.0001      | 82.6363     |
| 17           | 82.6363  | -0.0001     | 82.6366     |
| 18           | 82.6366  | 0.0000      | 82.6365     |

c. Metode *secant*.

Bentuk persamaan resultan gaya yang dipakai untuk hitungan adalah

$$v_{t,i+1} = v_{ti} - \frac{f(v_{ti})}{f'(v_{ti})} \left\{ \begin{array}{l} f(v_{ti}) = \frac{v_{ti}^2}{500 + (\ln v_{ti})^3} - 0.02v_{ti} - 10 \\ f'(v_{ti}) = \frac{f(v_{t,i+1}) - f(v_{ti})}{v_{t,i+1} - v_{ti}} \end{array} \right.$$

| iterasi, $i$ | $v_{ti}$ | $f(v_{ti})$ | $f'(v_{ti})$ | $v_{t,i+1}$ | $\Delta t$ |
|--------------|----------|-------------|--------------|-------------|------------|
| 0            | 10       | -           |              |             |            |
|              |          | 10.0048     |              |             |            |
| 1            | 100      | 4.7318      | 0.1637       | 71.1017     | 28.8983    |
| 2            | 71.1017  | -2.6685     | 0.2561       | 81.5223     | 10.4205    |
| 3            | 81.5223  | -0.2745     | 0.2297       | 82.7172     | 1.1950     |
| 4            | 82.7172  | 0.0200      | 0.2465       | 82.6361     | 0.0812     |
| 5            | 82.6361  | -0.0001     | 0.2481       | 82.6366     | 0.0005     |
| 6            | 82.6366  | 0.0000      | 0.2480       | 82.6366     | 0.0000     |

**Soal 2 Sistem Persamaan Linear (SO a1, a2, a3; bobot 60%)**

Hasil uji tujuh sampel beton menunjukkan nilai kuat tekan,  $f'_c$  (Mpa), merupakan fungsi faktor air semen,  $w/c$ , dan kadar semen,  $C$  ( $\text{kg/m}^3$ ). Tabel di bawah ini menampilkan hasil uji itu.

| Nomor sampel | $w/c$ | $C$ ( $\text{kg/m}^3$ ) | $f'_c$ (MPa) |
|--------------|-------|-------------------------|--------------|
| 1            | 0.45  | 360                     | 39.5         |
| 2            | 0.48  | 380                     | 40.2         |
| 3            | 0.50  | 400                     | 41.0         |
| 4            | 0.52  | 390                     | 39.0         |
| 5            | 0.54  | 370                     | 36.8         |
| 6            | 0.56  | 350                     | 34.5         |
| 7            | 0.58  | 340                     | 32.5         |

Susun model regresi linear ganda untuk memodelkan hubungan antara kuat tekan beton dan kedua variabel dalam bentuk

$$f'_c = \beta_0 + \beta_1(w/c) + \beta_2 C$$

Lakukan hitungan untuk menemukan informasi dan simpulan berikut.

- Sistem persamaan linear yang diperoleh dengan metode kuadrat terkecil.
- Nilai  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , dan  $\beta_2$  dengan menggunakan salah satu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.
- Persamaan regresi yang diperoleh.

**Jawab**

Model regresi linear ganda disusun melalui hitungan yang dituangkan dalam bentuk tabel.

| Sampel   | $w/c$ | $C$  | $f'_c$ | $(w/c)^2$ | $(w/c)C$ | $C^2$  | $(w/c)f'_c$ | $Cf'_c$ |
|----------|-------|------|--------|-----------|----------|--------|-------------|---------|
| 1        | 0.45  | 360  | 39.5   | 0.2025    | 162      | 129600 | 17.775      | 14220   |
| 2        | 0.48  | 380  | 40.2   | 0.2304    | 182.4    | 144400 | 19.296      | 15276   |
| 3        | 0.5   | 400  | 41     | 0.25      | 200      | 160000 | 20.5        | 16400   |
| 4        | 0.52  | 390  | 39     | 0.2704    | 202.8    | 152100 | 20.28       | 15210   |
| 5        | 0.54  | 370  | 36.8   | 0.2916    | 199.8    | 136900 | 19.872      | 13616   |
| 6        | 0.56  | 350  | 34.5   | 0.3136    | 196      | 122500 | 19.32       | 12075   |
| 7        | 0.58  | 340  | 32.5   | 0.3364    | 197.2    | 115600 | 18.85       | 11050   |
| $\Sigma$ | 3.63  | 2590 | 263.5  | 1.8949    | 1340.2   | 961100 | 135.893     | 97847   |

- Sistem persamaan linear.

Ada tiga persamaan linear yang diperoleh dari model regresi linear ganda, yaitu

$$n\beta_0 + \beta_1 \sum w/c + \beta_2 \sum C = \sum f'_c$$

$$\beta_0 \sum w/c + \beta_1 \sum (w/c)^2 + \beta_2 \sum (w/c)C = \sum (w/c)f'_c$$

$$\beta_0 \sum C + \beta_1 \sum (w/c)C + \beta_2 \sum C^2 = \sum Cf'_c$$

Koefisien-koefisien dalam persamaan di atas diperoleh dari tabel yang telah disusun.

$$7\beta_0 + 3.63\beta_1 + 2590\beta_2 = 263.5$$

$$3.63\beta_0 + 1.8949\beta_1 + 1340.2\beta_2 = 135.893$$

$$2590\beta_0 + \beta_1 1340.2 + 961100\beta_2 = 97847$$

b. Metode untuk menyelesaikan persamaan butir a.

Penyelesaian tiga persamaan di atas dilakukan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, Jacobi, Gauss-Seidel, atau SOR. Metode yang dipakai di sini adalah metode eliminasi Gauss. Tabel berikut menyajikan hitungan eliminasi Gauss.

|     | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |   | RHS     |
|-----|-----------|-----------|-----------|---|---------|
| (1) | 7         | 3.63      | 2590      | = | 263.5   |
| (2) | 3.63      | 1.8949    | 1340.2    | = | 135.893 |
| (3) | 2590      | 1340.2    | 961100    | = | 97847   |

Langkah ke-1: menghilangkan  $\beta_0$  dari pers. (2) dan (3), pers. (1) sbg pivot

|      | $\beta_0$ | $\beta_1$  | $\beta_2$ |   | RHS     |
|------|-----------|------------|-----------|---|---------|
| (1)  | 7         | 3.63       | 2590      | = | 263.5   |
| (2') | 0         | 0.01248571 | -2.9      | = | -0.7506 |
| (3)  | 0         | -2.9       | 2800      | = | 352     |

Langkah ke-2: menghilangkan  $\beta_1$  dari pers. (3), pers. (2') sbg pivot

|      | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$  |   | RHS      |
|------|-----------|-----------|------------|---|----------|
| (1)  | 7         | 3.63      | 2590       | = | 263.5    |
| (2') | 0         | 0.0125    | -2.9       | = | -0.7506  |
| (3') | 0         | 0         | 2126.43021 | = | 177.6682 |

Langkah ke-3: substitusi ke belakang

|      |           |   |          |
|------|-----------|---|----------|
| (3') | $\beta_2$ | = | 0.0836   |
| (2') | $\beta_1$ | = | -40.7081 |
| (1)  | $\beta_0$ | = | 27.8386  |

Dengan demikian, koefisien-koefisien dalam persamaan linear adalah

$$\beta_0 = 27.8386, \beta_1 = -40.7081 \text{ MPa}, \text{ dan } \beta_2 = 0.0836 \text{ MPa}/(\text{kg}/\text{m}^3).$$

Perhatikan koefisien  $\beta_0$  yang tak bersatuan dan koefisien  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  yang bersatuan.

c. Persamaan regresi linear ganda.

$$(f'_c)_{reg} = 27.8386 - 40.7081(w/c) + 0.0836C$$

-o0o-