https://istiarto.staff.ugm.ac.id | email: istiarto@ugm.ac.id

UJIAN TENGAH SEMESTER
STATISTIKA DAN PROBABABILITAS

Semester Genap 2024-2025 | Kamis, 17 April 2025 | 100 menit

Buku Tertutup

Soal 1 (Bobot 30%, CP a1, a2, a3)

Hasil uji laboratorium terhadap sejumlah sampel beton, yang diambil dari sebuah proyek pembangunan dam pengendali sedimen, menunjukkan bahwa pdf kuat tekan beton dapat dinyatakan dalam persamaan

$$p_X(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{untuk } 0 < x < 27 \\ 0 & \text{untuk nilai } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dalam persamaan pdf di atas, x adalah nilai kuat tekan beton dalam satuan MPa (megapascal).

a. Temukan nilai konstanta a dalam persamaan pdf.
b. Tunjukkan kurva pdf kuat tekan beton.
c. Berapa probabilitas kuat tekan beton lebih besar daripada 15 MPa, prob$(X > 15)$?

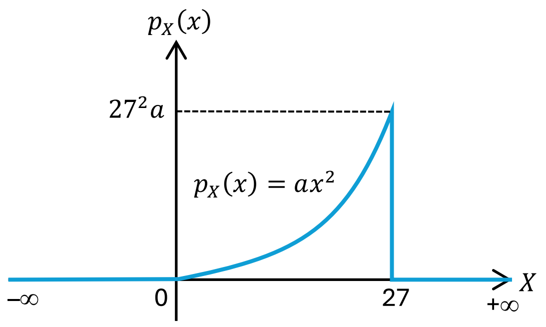
Jawab

a. Konstanta a dapat ditemukan dari luas di bawah kurva pdf, yang harus sama dengan satu.

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{27} ax^2dx + \int_{27}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$C_2|_{-\infty}^{0} + \frac{a}{3}x^3\Big|_0^{27} + C_2|_{27}^{+\infty} = 0 + \frac{a}{3}(27^3 - 0^3) + 0 = 1 \Longrightarrow a = \frac{3}{27^3}$$

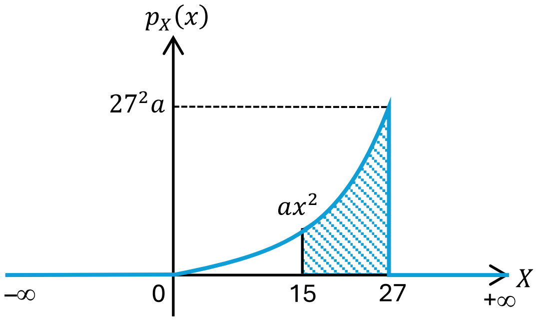
b. Kurva pdf.



c. Probabilitas kuat tekan beton lebih besar daripada 15 MPa, prob$(X > 15 \text{ MPa})$.

$$\text{prob}(X > 15 \text{ MPa}) = 1 - \text{prob}(X < 15 \text{ MPa})$$

$$\text{prob}(X > 15 \text{ MPa}) = 1 - \int_0^{15} \frac{3}{27^3}x^2dx = 1 - \frac{1}{27^3}15^3 = 0.8285$$



Soal 2 (Bobot 30%, CP a1, a2, a3)

Sebuah variabel random kontinu memiliki pdf

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{9} & \text{untuk } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{untuk nilai } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

a. Temukan fungsi distribusi kumulatif, cdf, variabel itu.
b. Tunjukkan kurva pdf dan cdf variabel itu.
c. Temukan nilai m jika prob$(X < m) =$ prob$(X > m)$.

Jawab

a. Fungsi distribusi kumulatif, cdf.

Untuk $x < 0$.

$$P_X(x) = \int 0dx = C$$

$$P_X(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow P_X(x) = 0$$

Untuk $0 < x < 3$.

$$P_X(x) = \int \frac{2x}{9}dx = \frac{x^2}{9} + C$$

$$P_X(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow P_X(x) = \frac{1}{9}x^2$$

Untuk $x > 3$.

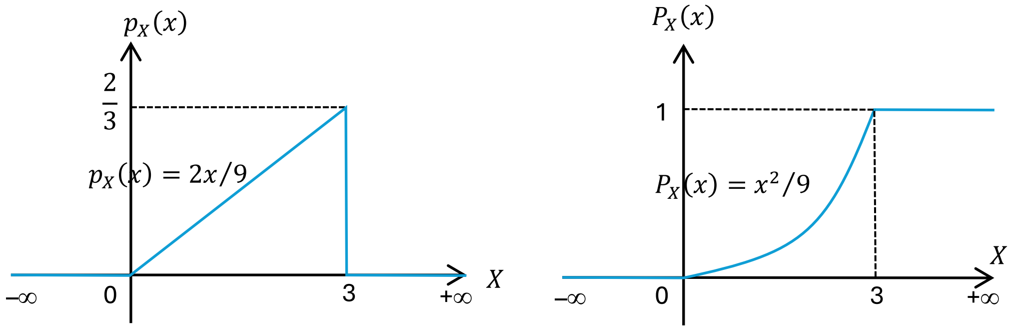
$$P_X(x) = \int 0dx = C$$

$$P_X(3) = 1 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow P_X(x) = 1$$

	pdf	cdf
$x < 0$	0	0
$0 < x < 3$	$\frac{2x}{9}$	$\frac{1}{9}x^2$
$x > 3$	0	1

https://istiarto.staff.ugm.ac.id | email: istiarto@ugm.ac.id

b. Kurva pdf dan cdf.



c. Nilai m jika $\text{prob}(X < m) = \text{prob}(X > m)$.

$$\text{prob}(X < m) = \text{prob}(X > m)$$

$$\text{prob}(X < m) = 1 - \text{prob}(X < m)$$

$$\text{prob}(X < m) = \frac{1}{2}$$

$$P_X(x = m) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{9}m^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Soal 3 (Bobot 20%, CP a1, a2, a3)

Dalam seleksi penerimaan pegawai baru di sebuah instansi yang mengelola infrastruktur keairan, peserta seleksi disodori 20 pertanyaan pilihan ganda. Ada 5 pilihan jawaban dan hanya satu jawaban yang benar di tiap pertanyaan. Seorang peserta menjawab tiap pertanyaan secara acak. Perkirakanlah probabilitas peserta itu

a. menjawab 6 pertanyaan secara benar;
b. menjawab paling sedikit 6 pertanyaan secara benar.

Jawab

Distribusi binomial: sukses, S, adalah jika jawaban peserta benar.

a. Probabilitas menjawab 6 pertanyaan secara benar ($x = 6$) dari 20 pertanyaan ($n = 20$).

$$\text{prob}(S) = p = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$f_X(6; 20{,}0.2) = \binom{20}{6} 0.2^6 (1-0.2)^{20-6} = 0.109$$

b. Probabilitas menjawab paling sedikit 6 pertanyaan secara benar ($x = 6, 7, \dots, 20$) dari 20 pertanyaan ($n = 20$).

Soal ini lebih mudah diselesaikan dengan membaca soal itu sebagai probabilitas paling sedikit 6 jawaban benar adalah sama dengan satu dikurangi probabilitas paling banyak 5 jawaban benar. Jadi, probabilitas peserta menjawab paling sedikit 6 soal secara benar

https://istiarto.staff.ugm.ac.id | email: istiarto@ugm.ac.id

(sukses paling sedikit 6 kali) adalah satu dikurangi probabilitas peserta menjawab paling banyak 5 soal secara benar.

$$1 - F_X(x; n, p) = 1 - \sum_{i=0}^{x} f_X(i; n, p) = 1 - \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$1 - F_X(5; 20{,}0.2) = 1 - \sum_{i=0}^{5} f_X(i; 20{,}0.2) = 1 - \sum_{i=0}^{5} \binom{20}{i} 0.2^i (1-0.2)^{20-i}$$

$$1 - F_X(5; 20{,}0.2) = 1 - 0.804 = 0.196$$

i	$f_X(i; 20{,}0.2)$
0	0.012
1	0.058
2	0.137
3	0.205
4	0.218
5	0.175
$F_X(5; 20{,}0.2) =$	0.804

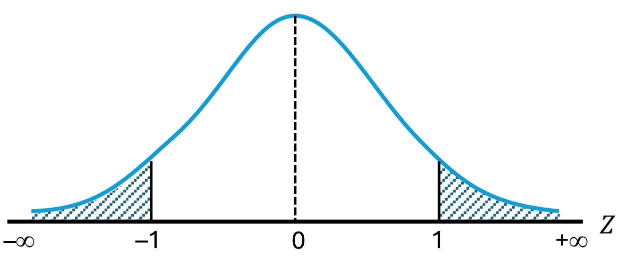
Soal 4 (Bobot 20%, CP a1, a2, a3)

Dari data hujan harian di suatu stasiun, dipilih hujan harian maksimum tiap tahun yang menghasilkan 27 hujan harian maksimum tahunan sebagai sampel. Telaah terhadap sampel menunjukkan bahwa sampel berdistribusi normal dan memiliki nilai rerata 90 mm/hari dan simpangan baku 10 mm/hari.

a. Perkirakanlah probabilitas hujan maksimum tahunan lebih besar daripada 100 mm/hari.
b. Berapa curah hujan tahunan h jika $\text{prob}(H > h) = 0.05$?

Jawab

a. Probabilitas hujan lebih besar daripada 100 mm/hari, $\text{prob}(H > 100 \text{ mm/hari})$.



$$h = 100 \text{ mm/hari} \Longrightarrow z = \frac{h - \bar{H}}{s_H}$$

$$= \frac{100 - 90}{10} = 1$$

$$\text{prob}(H > 100 \text{ mm/hari}) = \text{prob}(Z > 1)$$

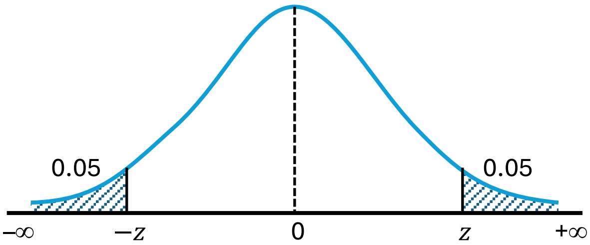
$$\text{prob}(Z > 1) = \text{prob}(Z < -1)$$

Dari tabel distribusi normal baku diperoleh $\text{prob}(Z < -1) = 0.1587$ Dengan demikian,

$$\text{prob}(H > 100) = 0.1587$$

https://istiarto.staff.ugm.ac.id | email: istiarto@ugm.ac.id

b. Curah hujan h jika $\text{prob}(H > h) = 0.05$.



Dari tabel distribusi normal baku dapat dibaca bahwa $z = -1.64$ jika $\text{prob}(Z < z) = 0.05$. Dengan demikian, untuk $\text{prob}(Z > z) = 0.05$ diperoleh $z = 1.64$ dan

$$h = \overline{H} + z\,s_H = 90 + 1.64\,(10)$$
$$= 106.4\ \text{mm/hari}$$

-o0o-

https://istiarto.staff.ugm.ac.id | email: istiarto@ugm.ac.id