



Universitas Gadjah Mada  
Fakultas Teknik  
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

# PROBABILITAS

Statistika dan Probabilitas

# Peluang (Probabilitas)

2

- ❑ Peluang/Probabilitas/Risiko
  - ❑ Peluang
  - ❑ Risiko
  - ❑ Probabilitas

# Probabilitas

3

- ❑ Probabilitas – Peluang – Kemungkinan
- ❑ Mengapa probabilitas ?
  - ❑ Orang tidak dapat memastikan nilai suatu proses (misal erupsi gunung berapi) berdasarkan data erupsi selama waktu yang lalu sampai saat ini.
  - ❑ Sifat stokastik ataupun ketidak-pastian merupakan sifat yang melekat pada proses (yang melibatkan) alam.

# Keterlambatan kedatangan bus

4

Keterlambatan (menit)	Frekuensi	Frekuensi relatif	Persentase
1	2	0.07	7%
2	3	0.10	10%
3	8	0.27	27%
4	4	0.13	13%
5	5	0.17	17%
6	3	0.10	10%
7	2	0.07	7%
8	0	0.00	0%
9	1	0.03	3%
10	2	0.07	7%
Jumlah =	30	1	100%

Dapatkah Sdr memperkirakan berapa menit keterlambatan kedatangan bus pada jadwal berikutnya?

# Probabilitas

5

## □ Definisi 1

- Andaikata suatu peristiwa random dapat terjadi dalam  $n$  cara yang masing-masing memiliki kemungkinan yang sama, dan apabila sejumlah  $n_a$  cara memberikan hasil  $A$ , maka probabilitas terjadinya peristiwa dengan hasil  $A$  adalah  $n_a/n$

$$\text{prob}(A) = \frac{n_a}{n}$$

- Dalam definisi di atas,  $n$  adalah himpunan semua yang mungkin terjadi.
- Definisi di atas berasumsi bahwa  $n$  diketahui, padahal himpunan semua cara yang mungkin pada kenyataannya tidak selalu diketahui atau tidak terjadi atau tidak diamati atau tidak dihitung.

# Probabilitas

6

## □ Definisi 2

- Andaikata suatu peristiwa random terjadi berkali-kali dalam jumlah yang sangat besar,  $n$  kali, dan sejumlah  $n_a$  kali memiliki hasil A, maka probabilitas peristiwa dengan hasil A adalah

$$\text{prob}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_a}{n}$$

- Definisi di atas berbeda dengan definisi #1 dalam hal-hal berikut:
  - Probabilitas suatu kejadian “diperkirakan” (*can be estimated*) berdasarkan observasi sejumlah  $n$  kali.
  - $n$  di sini tidak/bukan merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin; dalam hal ini, tidak diperlukan untuk mengetahui atau melakukan observasi terhadap semua kemungkinan
  - Setiap cara yang mungkin terjadi (dalam  $n$  tersebut) tidak harus memiliki kemungkinan yang sama untuk terjadi.

# Probabilitas

7

## □ Definisi 2: butuh berapa $n$ ?

### □ Contoh

- Dalam 2 set pengamatan (sampel) yang tidak saling berkait/bergantung, perkiraan probabilitas kejadian A dapat ditetapkan berdasarkan masing-masing sampel tersebut.
- Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama satu dengan yang lain.
- Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama dengan perkiraan probabilitas A yang ditetapkan dengan pengamatan sejumlah tak-berhingga kali.
- Problem: berapa jumlah pengamatan,  $n$ , yang diperlukan untuk mendapatkan estimasi probabilitas A yang dapat diterima?

# Probabilitas

8

- ❑ Kisaran (*range*) probabilitas
  - ❑ Dari kedua definisi, kisaran probabilitas adalah 0 s.d. 1.
  - ❑  $\text{prob}(A) = 0$  “hampir” tidak mungkin terjadi  
(*nearly impossible*)
  - ❑  $\text{prob}(A) = 1$  “hampir” pasti terjadi  
(*almost certain*)



# Probabilitas

9

- ❑ Misal suatu eksperimen (proses) menghasilkan sejumlah output yang berupa variabel random
  - ❑ Himpunan semua hasil yang mungkin didapat disebut *sample space*.
  - ❑ Setiap elemen di dalam *sample space* disebut *sample points* (elemen)
  - ❑ Setiap elemen di dalam *sample space* memiliki faktor/bobot/*weight* (positif) sedemikian hingga jumlah *weight* seluruh elemen bernilai 1.
  - ❑ Nilai bobot berbanding lurus dengan kemungkinan eksperimen akan memberikan hasil elemen tersebut.
  - ❑ Bobot tidak lain adalah probabilitas.

# Probabilitas – Tabel Frekuensi

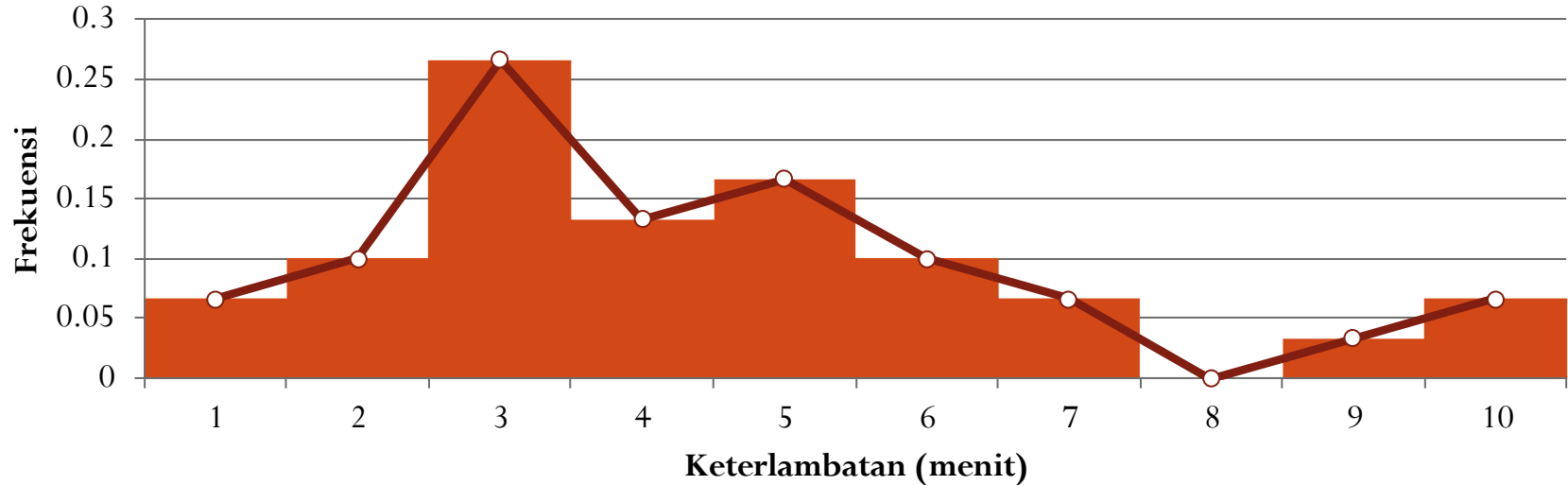
10

Nomor	Keterlambatan (menit)	Frekuensi	Frekuensi Relatif
1	10	2	0.07
2	9	1	0.03
3	8	0	0.00
4	7	2	0.07
5	6	3	0.10
6	5	5	0.17
7	4	4	0.13
8	3	8	0.27
9	2	3	0.10
10	1	2	0.07
Jumlah =		30	1.00

# Probabilitas - Histogram

11

**Keterlambatan Kedatangan Bus di Suatu Perhentian Selama 30 Jadwal Kedatangan**



12

# Probabilitas

*Sample Space*

*Sample Elements*

# Sample Space & Sample Elements

13

## □ Contoh #1:

- Suatu DAS memiliki 3 stasiun: Sta-1, Sta-2, Sta-3.
- Experimen: meneliti setiap stasiun perlu/tidak untuk dilakukan penggantian alat
- Output:  $(y, n, y)$ 
  - Sta-1 perlu penggantian alat ( $y = \text{yes}$ )
  - Sta-2 tak perlu penggantian alat ( $n = \text{no}$ )
  - Sta-3 perlu penggantian alat ( $y = \text{yes}$ )

# Sample Space & Sample Elements

14

## □ Sample space: Alternatif 1

$$\blacksquare S_1 = \{(y,y,y), (y,y,n), (y,n,y), (n,y,y), \\ (y,n,n), (n,y,n), (n,n,y), (n,n,n)\}$$

- $S_1$  adalah discrete sample space: jumlah elemen di dalam  $S_1$  dapat dihitung.
- Apabila eksperimen dilakukan satu kali saja, maka salah satu elemen  $S_1$  pasti terjadi.

## □ Sample space: Alternatif 2

$$\blacksquare S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$$

- $S_2$  adalah discrete sample space.
- Hanya ingin diketahui jumlah stasiun yang perlu dikalibrasi.
- Tidak diperlukan untuk mengetahui stasiun mana yang perlu dikalibrasi.
- Informasi yang diperoleh lebih sedikit daripada  $S_1$ .

# Sample Space & Sample Elements

15

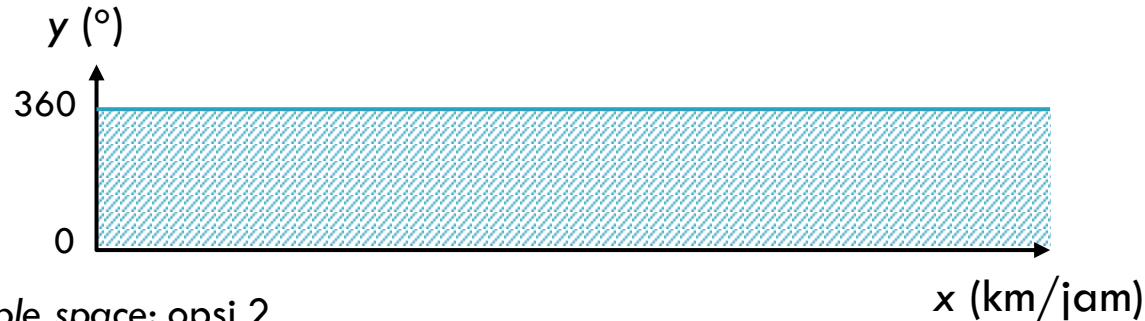
- ❑ Contoh #2:
  - ❑ Pengukuran angin: kecepatan (km/jam) dan arah ( $^{\circ}$ ).
  - ❑ Output:  $(x,y)$ 
    - $x =$  kecepatan (km/jam)
    - $y =$  arah ( $^{\circ}$ )

# Sample Space & Sample Elements

16

- *Sample space: opsi 1*

$$\Omega_1 = \{(x, y): x \geq 0, 0 \leq y \leq 360\} \text{ continuous sample space}$$



- *Sample space: opsi 2*

$$\Omega_2 = \{+, -\} \text{ discrete sample space}$$

- $+$  = kecepatan  $> 60$  (km/jam)
- $-$  = kecepatan  $< 60$  (km/jam)



# Events

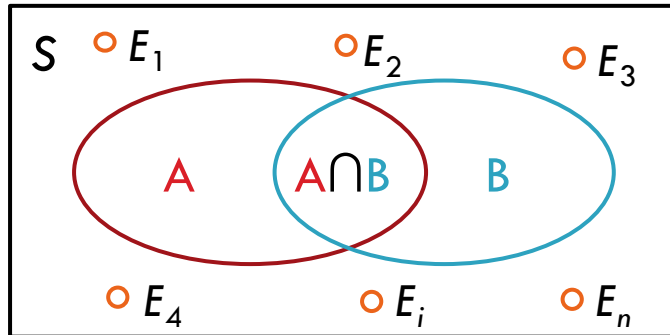
17

- ❑ **Event** adalah suatu himpunan bagian (*subset*) dari *sample space*
- ❑ Suatu *event* terjadi jika dan hanya jika hasil dari eksperimen adalah anggota *event* tersebut
- ❑ Contoh: Penggantian alat di Sta-1, Sta-2, Sta-3
  - ❑ *Event A*: paling sedikit 2 stasiun perlu penggantian alat  
 $A = \{(y,y,y), (y,y,n), (y,n,y), (n,y,y)\}$
  - ❑ *Event B*: tak ada stasiun yang perlu penggantian alat  
 $B = \{(n,n,n)\}$
  - ❑ *Event C*: 2 stasiun perlu penggantian alat  
 $C = \{(y,y,n), (y,n,y), (n,y,y)\}$

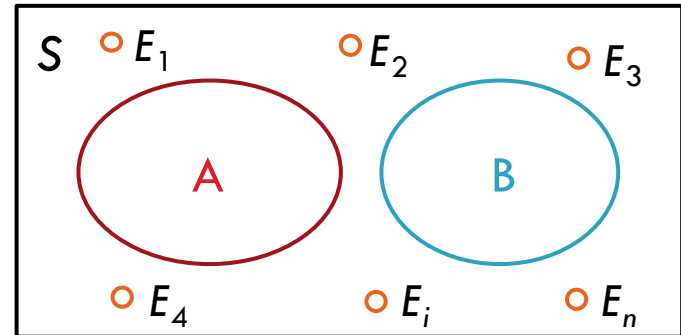
# Diagram Venn

18

- Notasi:  
 $S$  = sample space  
 $E_i$  = elemen dalam  $S$   
 $A, B$  = events dalam  $S$   
 $\text{prob}(E_i)$  = probabilitas elemen  $E_i$



$$0 \leq \text{prob}(E_1) \leq 1$$
$$S = \bigcup_i E_i$$
$$\text{prob}(S) = \sum \text{prob}(E_i) = 1$$



# Probabilitas suatu *Event*

19

- Event A

$$A = \bigcup_{i=m}^n E_i$$

$$0 \leq \text{prob}(A) = \sum_{i=m}^n \text{prob}(E_i) \leq 1$$

- Event A dan B

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}(B) - \text{prob}(A \cap B)$$

- Apabila A dan B tak bergantung satu dengan yang lainnya (*independent*), maka

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}(B)$$

# Probabilitas suatu

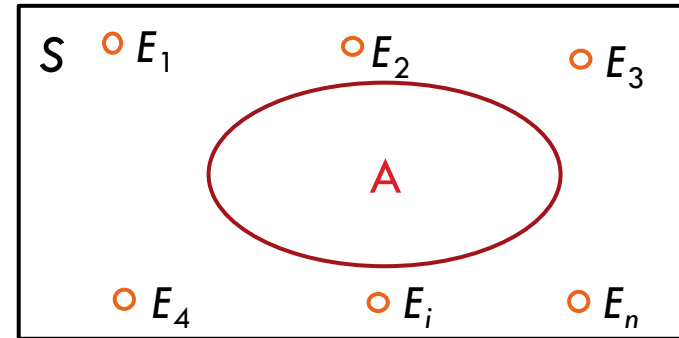
20

- *Event*  $A^c$  (= komplemen event  $A$ )

$$\text{prob}(A \cap A^c) = 0$$

$$\text{prob}(A \cup A^c) = \text{prob}(A) + \text{prob}(A^c) = 1$$

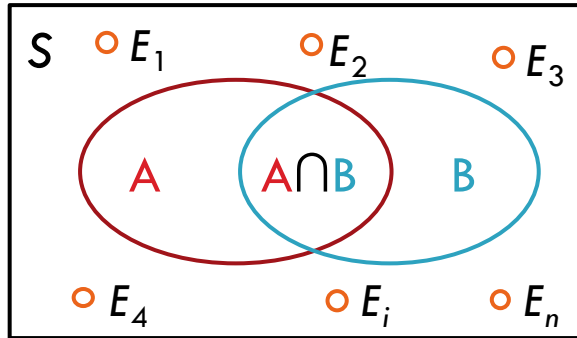
$$\text{prob}(A) = 1 - \text{prob}(A^c)$$



# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

21

- Probabilitas suatu event (event B) bergantung pada terjadinya event lain (event A). Type equation here.



$\text{prob}(B | A) = \text{prob}(B)$  dengan syarat event  $A$  terjadi

- » *sample space* berubah dari  $S$  menjadi  $A$ ,
- » event diwakili oleh  $A \cap B$

$$\text{prob}(B|A) = \frac{\text{prob}(A \cap B)}{\text{prob}(A)}, \quad \text{prob}(A) \neq 0$$

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A)$$

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

22

- Apabila event B tak bergantung pada event A (keduanya merupakan *independent events*), maka
  - $\text{prob}(B | A) = \text{prob}(B)$ , dan
  - $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B)$

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

23

## □ Contoh

- Data pengamatan hari hujan di suatu wilayah menunjukkan probabilitas hari hujan sbb.

hari hujan setelah hari hujan = 0.444

hari tak hujan setelah hari hujan = 0.556

hari tak hujan setelah hari tak hujan = 0.724

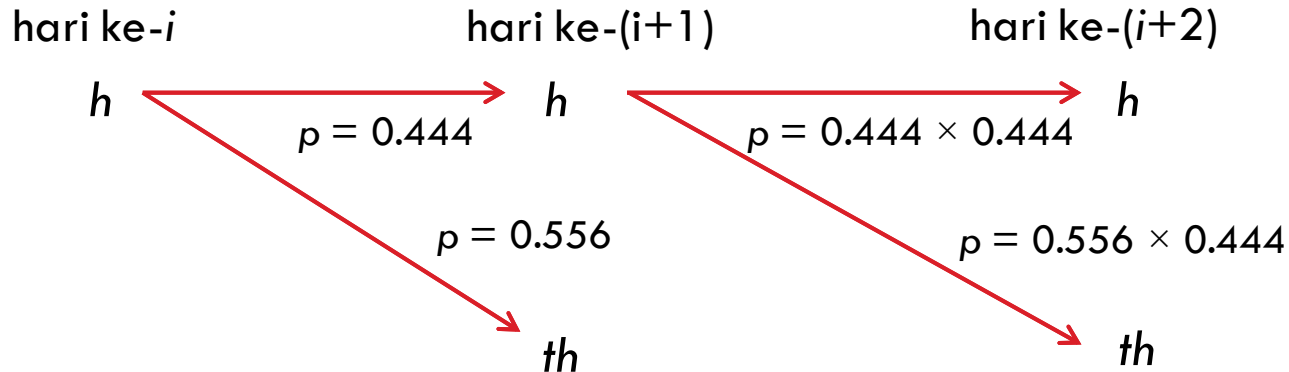
hari hujan setelah hari tak hujan = 0.276

- Apabila dijumpai bahwa suatu hari terjadi hujan, berapakah probabilitas bahwa 2 hari berikutnya juga hujan?

# Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

24

- Cara penyelesaian yang lain
  - Probabilitas hujan pada suatu hari adalah  $p = 0.444$
  - Suatu hari (hari ke-0) terjadi hujan
  - Probabilitas hujan saat itu adalah  $p = 0.444$





# Probabilitas Total (*Total Probability*)

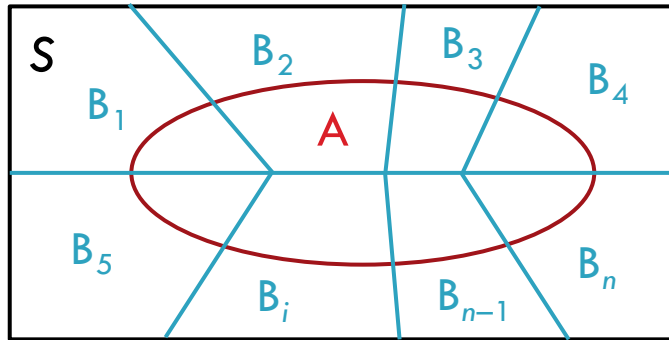
25

- Apabila  $B_1, B_2, \dots, B_n$  adalah serangkaian *events* yang tidak saling berkaitan (*mutually exclusive events*) dan masing-masing memiliki probabilitas tidak sama dengan nol,  $\text{prob}(B_i) \neq 0, \forall i$ , maka
  - $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$
  - $B_i \cap B_j = 0, \forall i, j (i \neq j)$
  - $\text{prob}(B_i) > 0, \forall i$

# Probabilitas Total (*Total Probability*)

26

- Probabilitas suatu event  $A$  dapat dituliskan sbb.



$$\text{prob}(A) = \text{prob}(A) [(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)]$$

$$\text{prob}(A) = \text{prob}(A \cap B_1) + (A \cap B_2) + \dots + (A \cap B_n)$$

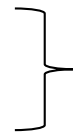
# Probabilitas Total (*Total Probability*)

27

- Dari probabilitas bersyarat (*conditional probability*)

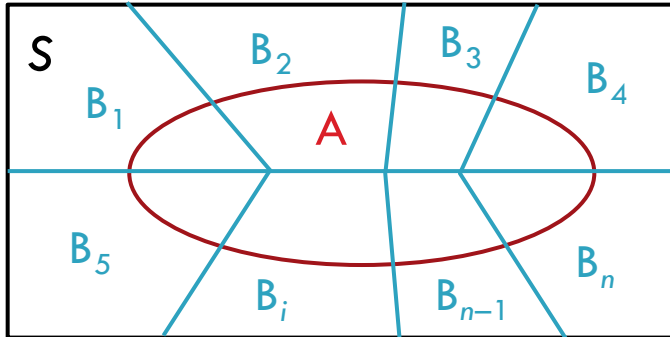
$$\text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(A)\text{prob}(B_1|A)$$

$$\text{prob}(B_1 \cap A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1)$$



$$\text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(B_1 \cap A) \Rightarrow$$

$$\text{prob}(A)\text{prob}(B_1|A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1)$$



$$\text{prob}(A) = \text{prob}(A \cap B_1) + \text{prob}(A \cap B_2) + \dots + \text{prob}(A \cap B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1) + \dots + \text{prob}(B_n)\text{prob}(A|B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i)\text{prob}(A|B_i)$$

# Probabilitas Total (*Total Probability*)

28

## □ Contoh

- Data genangan di suatu wilayah permukiman menunjukkan bahwa probabilitas terjadinya genangan adalah 0.80 saat hari hujan dan 0.25 saat tak hujan.
- Diketahui bahwa probabilitas hari hujan adalah 0.36.
- Berapakah probabilitas terjadinya genangan di wilayah tersebut?

# Probabilitas Total (*Total Probability*)

29

## □ Penyelesaian

- event  $G$  = terjadi genangan  
event  $H$  = hari hujan  
event  $H^c$  = hari tak hujan

$$\begin{aligned}\text{prob}(G) &= \text{prob}(H)\text{prob}(G|H) + \text{prob}(H^c)\text{prob}(G|H^c) \\ &= 0.36 \times 0.82 + (1 - 0.36) \times 0.25 \\ &= 0.448\end{aligned}$$

# Teorema Bayes

30

- Dari *conditional probability*

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) \quad \text{..... (1)}$$

$$\text{prob}(B \cap A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \text{..... (2)}$$

- Karena  $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(B \cap A)$ , maka

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \text{..... (3)}$$

- Untuk event  $A$  dan event  $B_j$ , persamaan di atas menjadi

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B_j|A) = \text{prob}(B_j) \cdot \text{prob}(A|B_j) \quad \text{..... (4)}$$

# Teorema Bayes

31

- Dari *total probability*

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i) \quad \text{..... (5)}$$

- Dengan (5)  $\rightarrow$  (4)

$$\text{prob}(B_j|A) = \frac{\text{prob}(B_j) \cdot \text{prob}(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i)} \quad \text{..... (6)}$$

# Teorema Bayes

32

- ❑ Pemakaian
  - ❑ Untuk mencari probabilitas event  $B_i$  apabila diketahui event  $A$  telah terjadi.
  - ❑ Untuk mencari (memperkirakan) probabilitas suatu event ( $B_i$ ) dengan mengamati event kedua ( $A$ ).



# Teorema Bayes

33

## □ Contoh

- Informasi ramalan cuaca biasa dikirimkan melalui 4 saluran:  
 $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) adalah event dimana informasi tsb dikirimkan melalui saluran  $i$ .
- Probabilitas masing-masing event  $R_i$  adalah: 0.1, 0.2, 0.3, dan 0.4.
- Diketahui juga bahwa probabilitas terjadinya kesalahan pengiriman (event  $E$ ) melalui masing-masing saluran adalah: 0.10, 0.15, 0.20, dan 0.25.
- Suatu saat diketahui bahwa suatu kesalahan pengiriman telah terjadi.
- Berapakah probabilitas bahwa kesalahan tersebut terjadi melalui saluran ke-2?

# Teorema Bayes

34

## □ Penyelesaian

### □ Diketahui

$$\text{prob}(R_1) = 0.1$$

$$\text{prob}(R_2) = 0.2$$

$$\text{prob}(R_3) = 0.3$$

$$\text{prob}(R_4) = 0.4$$

$$\text{prob}(E | R_1) = 0.10$$

$$\text{prob}(E | R_2) = 0.15$$

$$\text{prob}(E | R_3) = 0.20$$

$$\text{prob}(E | R_4) = 0.25$$

- Probabilitas bahwa pengiriman dilakukan melalui saluran ke-2 dengan melihat kenyataan bahwa telah terjadi kesalahan

$$\text{prob}(R_2|E) = \frac{\text{prob}(R_2) \cdot \text{prob}(E|R_2)}{\sum_{i=1}^n \text{prob}(R_i) \cdot \text{prob}(E|R_i)}$$

$$\text{prob}(R_2|E) = \frac{0.2 \times 0.15}{0.1 \times 0.10 + 0.2 \times 0.15 + 0.3 \times 0.20 + 0.4 \times 0.25} = 0.15$$

# Teorema Bayes

35

$i$	$\text{prob}(R_i)$	$\text{prob}(E   R_i)$	$\text{prob}(R_i) \text{prob}(E   R_i)$	$\text{prob}(R_i   E)$
1	0.1	0.10	0.01	0.05
2	0.2	0.15	0.03	0.15
3	0.3	0.20	0.06	0.30
4	0.4	0.25	0.10	0.50
$\Sigma$	<b>1.0</b>		<b>0.20</b>	<b>1.00</b>

$\text{prob}(E)$

# Probabilitas

Permutasi

Kombinasi

# Permutasi dan Kombinasi

37

- ❑ Cara mendapatkan sampel yang terdiri dari  $r$  elemen dari suatu *sample space* yang memiliki  $n$  elemen ( $n \geq r$ )  $\rightarrow$  dipilih/diambil satu elemen pada setiap pemilihan/pengambilan
  - ❑ urutan elemen diperhatikan dan setelah tiap pengambilan, elemen dikembalikan ke dalam *sample space* (*ordered with replacement*)
  - ❑ urutan elemen diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*ordered without replacement*)
  - ❑ urutan elemen tidak diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered without replacement*)
  - ❑ urutan elemen tidak diperhatikan dan dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered with replacement*)

# Permutasi dan Kombinasi

38

- ❑ Contoh ilustrasi
  - ❑ Dilakukan pemilihan 2 stasiun AWLR dari 4 stasiun yang ada (A, B, C, D) untuk diberi dana.
  - ❑ Berapa jumlah pasang stasiun yang mungkin mendapatkan dana?

# Permutasi dan Kombinasi #1

39

- ❑ Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - ❑ urutan diperhatikan  $\rightarrow$  memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - ❑ dengan pengembalian  $\rightarrow$  suatu stasiun dapat memperoleh dana  $2 \times$
- ❑ Pasangan 2 stasiun yang mendapatkan dana

❑ (A,A)	(A,B)	(A,C)	(A,D)
(B,A)	(B,B)	(B,C)	(B,D)
(C,A)	(C,B)	(C,C)	(C,D)
(D,A)	(D,B)	(D,C)	(D,D)

$$16 \rightarrow n^r = 4^2 = 16$$

# Permutasi dan Kombinasi #2

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1 ×
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

---	(A,B)	(A,C)	(A,D)
(B,A)	---	(B,C)	(B,D)
(C,A)	(C,B)	---	(C,D)
(D,A)	(D,B)	(D,C)	---

$${}_{(n)}P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

permutasi



# Permutasi dan Kombinasi #3

41

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana  $1 \times$
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| (A,B) | (A,C) | (A,D) |
|       | (B,C) | (B,D) |
|       |       | (C,D) |

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

kombinasi  
koefisien binomial

# Permutasi dan Kombinasi #4

42

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ( $r = 2, n = 4$ ) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun dapat memperoleh dana  $2 \times$
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana

$$\begin{array}{cccc} \square & (A,A) & (A,B) & (A,C) & (A,D) \\ & & (B,B) & (B,C) & (B,D) \\ & & & (C,C) & (C,D) \\ & & & & (D,D) \end{array} \quad \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!} =$$
$$= \frac{(4+2-1)!}{(4-2)!2!} = 10$$

# Resume

43

	Dengan pengembalian	Tanpa pengembalian
Urutan diperhatikan	$n^r$	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Urutan tidak diperhatikan	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

Persamaan Sterling  $n! \approx \sqrt{2\pi e}^{-n} n^{n+\frac{11}{2}}$

# Perintah (Fungsi) MSExcel

44

## ❑ FACT( $n$ )

- ❑ menghitung faktorial,  $n!$
- ❑  $n$  bilangan positif (bilangan cacah)

## ❑ PERMUT( $n,r$ )

- ❑ menghitung permutasi,
- ❑  $n$  dan  $r$  integer,  $n \geq r$

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

## ❑ COMBIN( $n,r$ )

- ❑ menghitung kombinasi,
- ❑  $n$  dan  $r$  integer,  $n \geq r$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

# Terima kasih