Universitas Gadjah Mada
Fakultas Teknik
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

PROBABILITAS

Statistika dan Probabilitas

Peluang (Probabilitas)

- Peluang/Probabilitas/Risiko
  - Peluang
  - Risiko
  - Probabilitas

Probabilitas

- Probabilitas – Peluang – Kemungkinan
- Mengapa probabilitas ?
  - Orang tidak dapat memastikan nilai suatu proses (misal erupsi gunung berapi) berdasarkan data erupsi selama waktu yang lalu sampai saat ini.
  - Sifat stokastik ataupun ketidak-pastian merupakan sifat yang melekat pada proses (yang melibatkan) alam.

Keterlambatan kedatangan bus

Keterlambatan (menit)	Frekuensi	Frekuensi relatif	Persentase
1	2	0.07	7%
2	3	0.10	10%
3	8	0.27	27%
4	4	0.13	13%
5	5	0.17	17%
6	3	0.10	10%
7	2	0.07	7%
8	0	0.00	0%
9	1	0.03	3%
10	2	0.07	7%
Jumlah =	30	1	100%

Dapatkah Sdr memperkirakan berapa menit keterlambatan kedatangan bus pada jadwal berikutnya?

Probabilitas

- Definisi 1
  - Andaikata suatu peristiwa random dapat terjadi dalam n cara yang masing-masing memiliki kemungkinan yang sama, dan apabila sejumlah n_a cara memberikan hasil A, maka probabilitas terjadinya peristiwa dengan hasil A adalah n_a/n

$$\mathrm{prob}(A) = \frac{n_a}{n}$$

  - Dalam definisi di atas, n adalah himpunan semua yang mungkin terjadi.
  - Definisi di atas berasumsi bahwa n diketahui, padahal himpunan semua cara yang mungkin pada kenyataannya tidak selalu diketahui atau tidak terjadi atau tidak diamati atau tidak dihitung.

Probabilitas

- Definisi 2
  - Andaikata suatu peristiwa random terjadi berkali-kali dalam jumlah yang sangat besar, *n* kali, dan sejumlah n_a kali memiliki hasil A, maka probabilitas peristiwa dengan hasil A adalah

$$\mathrm{prob}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_a}{n}$$

  - Definisi di atas berbeda dengan definisi #1 dalam hal-hal berikut:
    - Probabilitas suatu kejadian "diperkirakan" (*can be estimated*) berdasarkan observasi sejumlah *n* kali.
    - *n* di sini tidak/bukan merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin; dalam hal ini, tidak diperlukan untuk mengetahui atau melakukan observasi terhadap semua kemungkinan
    - Setiap cara yang mungkin terjadi (dalam *n* tersebut) tidak harus memiliki kemungkinan yang sama untuk terjadi.

Probabilitas

- Definisi 2: butuh berapa *n*?
  - Contoh
    - Dalam 2 set pengamatan (sampel) yang tidak saling berkait/bergantung, perkiraan probabilitas kejadian A dapat ditetapkan berdasarkan masing-masing sampel tersebut.
    - Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama satu dengan yang lain.
    - Kedua nilai probabilitas tidak selalu sama dengan perkiraan probabilitas A yang ditetapkan dengan pengamatan sejumlah tak-berhingga kali.
  - Problem: berapa jumlah pengamatan, *n*, yang diperlukan untuk mendapatkan estimasi probabilitas A yang dapat diterima?

Probabilitas

- Kisaran (*range*) probabilitas
  - Dari kedua definisi, kisaran probabilitas adalah 0 s.d. 1.
  - prob(A) = 0 "hampir" tidak mungkin terjadi
    (*nearly impossible*)
  - prob(A) = 1 "hampir" pasti terjadi
    (*almost certain*)

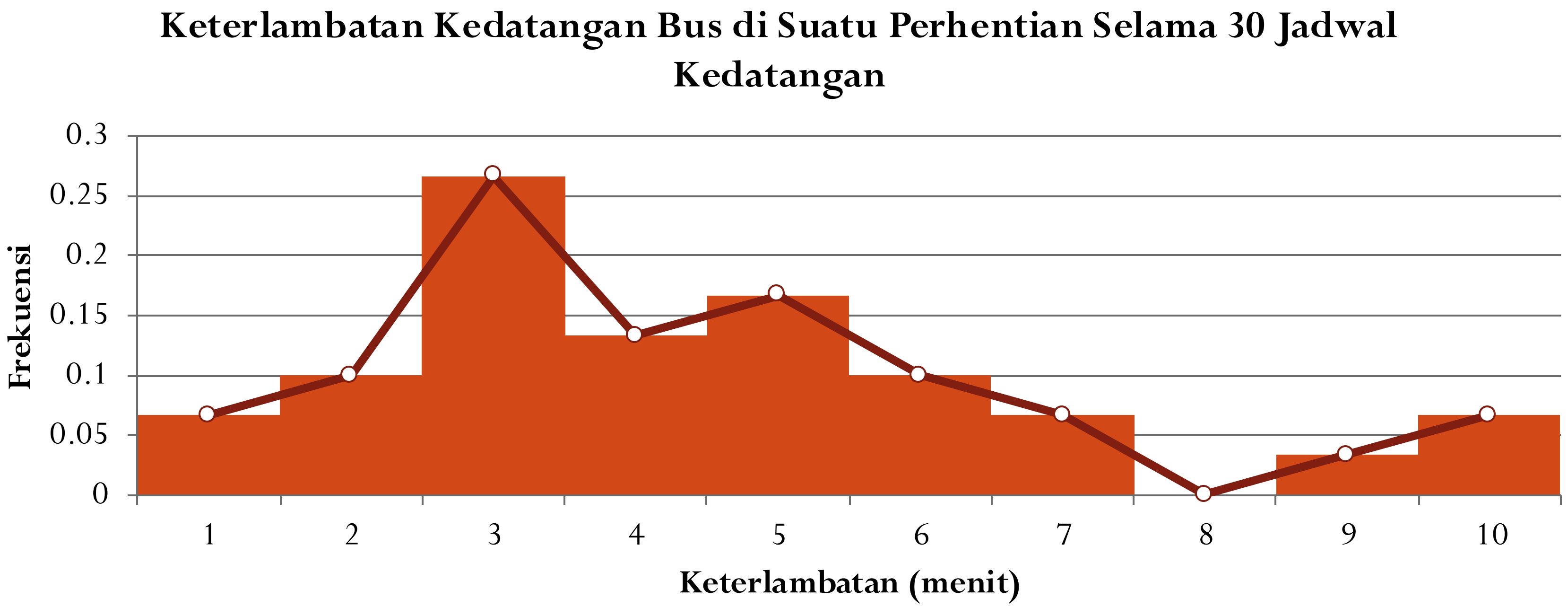
Probabilitas

- Misal suatu eksperimen (proses) menghasilkan sejumlah output yang berupa variabel random
  - Himpunan semua hasil yang mungkin didapat disebut *sample space*.
  - Setiap elemen di dalam *sample space* disebut *sample points* (elemen)
  - Setiap elemen di dalam *sample space* memiliki faktor/bobot/*weight* (positif) sedemikian hingga jumlah *weight* seluruh elemen bernilai 1.
  - Nilai bobot berbanding lurus dengan kemungkinan experimen akan memberikan hasil elemen tersebut.
  - Bobot tidak lain adalah probabilitas.

Probabilitas – Tabel Frekuensi

Nomor	Keterlambatan (menit)	Frekuensi	Frekuensi Relatif
1	10	2	0.07
2	9	1	0.03
3	8	0	0.00
4	7	2	0.07
5	6	3	0.10
6	5	5	0.17
7	4	4	0.13
8	3	8	0.27
9	2	3	0.10
10	1	2	0.07
	Jumlah =	30	1.00

Probabilitas - Histogram



Probabilitas

Sample Space

Sample Elements

Sample Space & Sample Elements

- Contoh #1:
  - Suatu DAS memiliki 3 stasiun: Sta-1, Sta-2, Sta-3.
  - Experimen: meneliti setiap stasiun perlu/tidak untuk dilakukan penggantian alat
  - Output: (*y*,*n*,*y*)
    Sta-1 perlu penggantian alat (*y* = yes)
    Sta-2 tak perlu penggantian alat (*n* = no)
    Sta-3 perlu penggantian alat (*y* = yes)

Sample Space & Sample Elements

- Sample space: Alternatif 1
  - $S_1 = \{(y,y,y),(y,y,n),(y,n,y),(n,y,y),$
    $(y,n,n),(n,y,n),(n,n,y),(n,n,n)\}$
  - S_1 adalah discrete sample space: jumlah elemen di dalam S1 dapat dihitung.
  - Apabila experimen dilakukan satu kali saja, maka salah satu elemen S1 pasti terjadi.

- Sample space: Alternatif 2
  - $S_2 = \{0,1,2,3\}$
  - S_2 adalah discrete sample space.
  - Hanya ingin diketahui jumlah stasiun yang perlu dikalibrasi.
  - Tidak diperlukan untuk mengetahui stasiun mana yang perlu dikalibrasi.
  - Informasi yang diperoleh lebih sedikit daripada S_1 .

Sample Space & Sample Elements

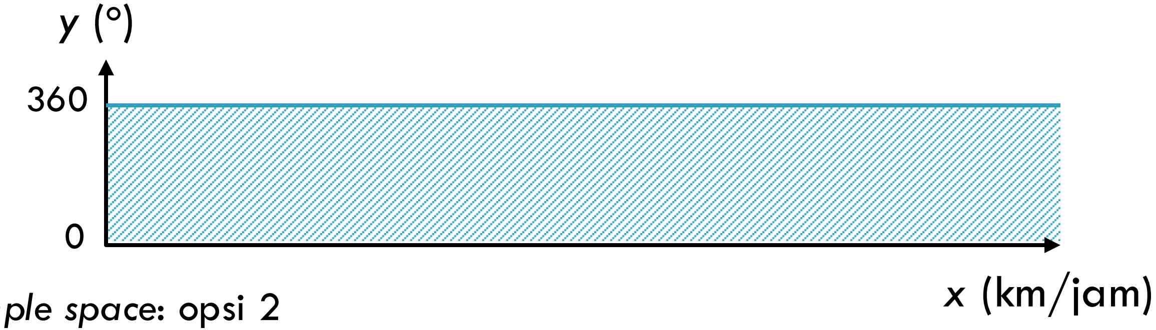
- Contoh #2:
  - Pengukuran angin: kecepatan (km/jam) dan arah (°).
  - Output: (x,y)

x = kecepatan (km/jam)
y = arah (°)

Sample Space & Sample Elements

- *Sample space*: opsi 1

$$\Omega_1 = \{(x, y): x \geq 0, 0 \leq y \leq 360\}$$ *continuous sample space*



- *Sample space*: opsi 2

$$\Omega_2 = \{+, -\}$$ *dicrete sample space*

- $+$ = kecepatan > 60 (km/jam)
- $-$ = kecepatan < 60 (km/jam)

Events

- *Event* adalah suatu himpunan bagian (*subset*) dari *sample space*
- Suatu *event* terjadi jika dan hanya jika hasil dari experimen adalah anggota *event* tersebut
- Contoh: Penggantian alat di Sta-1, Sta-2, Sta-3
  - *Event* A: paling sedikit 2 stasiun perlu penggantian alat
    $A=\{(y,y,y),(y,y,n),(y,n,y),(n,y,y)\}$
  - *Event* B: tak ada stasiun yang perlu penggantian alat
    $B=\{(n,n,n)\}$
  - *Event* C: 2 stasiun perlu penggantian alat
    $C=\{(y,y,n),(y,n,y),(n,y,y)\}$

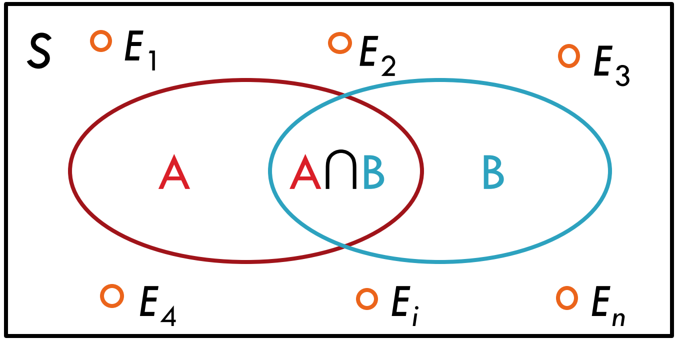
Diagram Venn

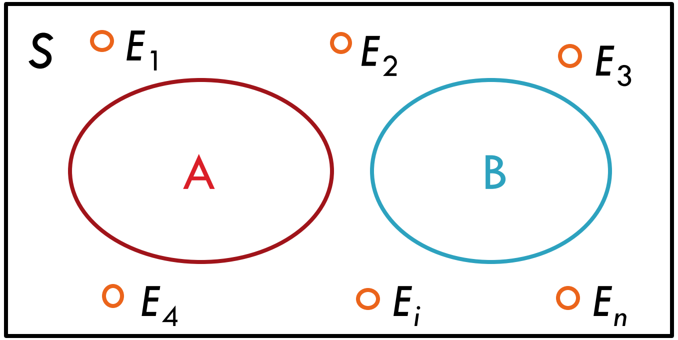
- Notasi:
  S = sample space
  E_i = elemen dalam S
  A,B = events dalam S
  prob(E_i) = probabilitas elemen E_i

$$0 \leq \text{prob}(E_1) \leq 1$$

$$S = \bigcup_i E_i$$

$$\text{prob}(S) = \sum \text{prob}(E_i) = 1$$





Probabilitas suatu *Event*

- Event A

$$A = \bigcup_{i=m}^{n} E_i$$

$$0 \leq \text{prob}(A) = \sum_{i=m}^{n} \text{prob}(E_i) \leq 1$$

- *Event* A dan B

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob} - \text{prob}(A \cap B)$$

- Apabila A dan B tak bergantung satu dengan yang lainnya (*independent*), maka

$$\text{prob}(A \cup B) = \text{prob}(A) + \text{prob}$$

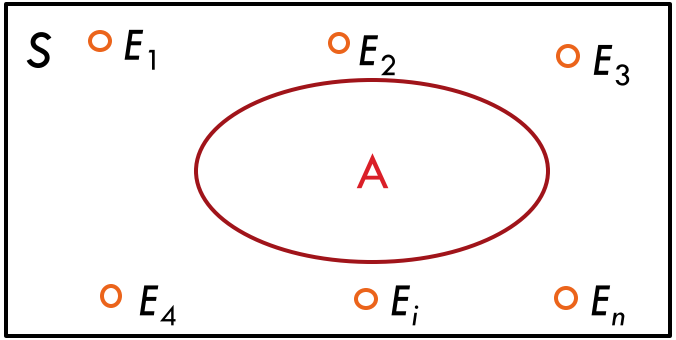
Probabilitas suatu *Event*

- *Event* A^c (= komplemen *event* A)

$$\text{prob}(A \cap A^c) = 0$$

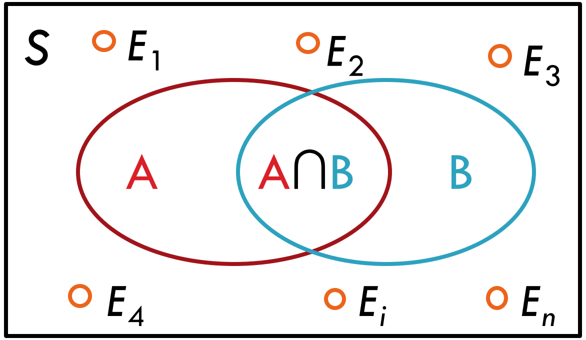
$$\text{prob}(A \cap A^c) = \text{prob}(A) + \text{prob}(A^c) = 1$$

$$\text{prob}(A) = 1 - \text{prob}(A^c)$$



Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

- Probabilitas suatu *event* (*event* B) bergantung pada terjadinya *event* lain (*event* A). Type equation here.



prob(B | A) = prob(B) dengan syarat *event* A terjadi

- *sample space* berubah dari *S* menjadi A,
- *event* diwakili oleh A∩B

$$\text{prob}(B|A) = \frac{\text{prob}(A \cap B)}{\text{prob}(A)}, \qquad \text{prob}(A) \neq 0$$

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A)$$

Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

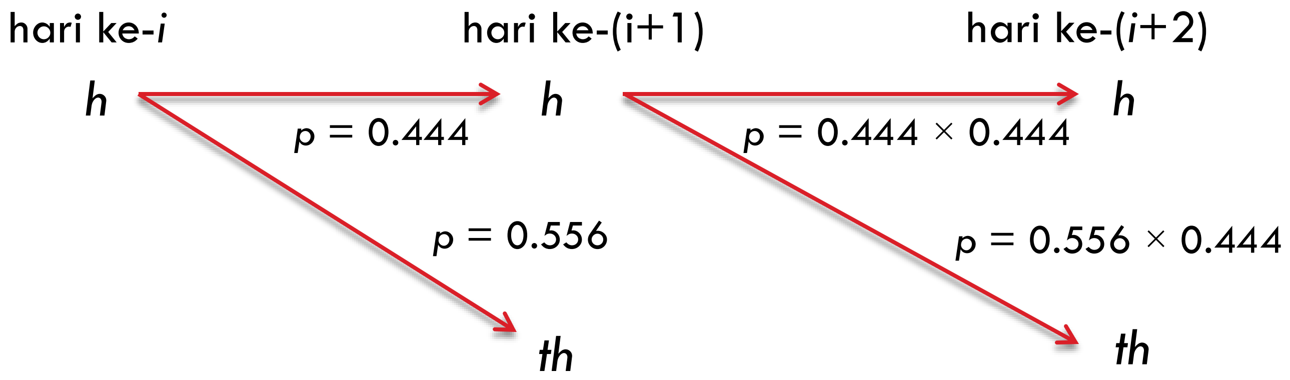
- Apabila *event* B tak bergantung pada *event* A (keduanya merupakan *independent events*), maka
  - $\text{prob}(B|A) = \text{prob}(B)$, dan
  - $\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B)$

Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

- Contoh
  - Data pengamatan hari hujan di suatu wilayah menunjukkan probabilitas hari hujan sbb.
    hari hujan setelah hari hujan = 0.444
    hari tak hujan setelah hari hujan = 0.556
    hari tak hujan setelah hari tak hujan = 0.724
    hari hujan setelah hari tak hujan = 0.276
  - Apabila dijumpai bahwa suatu hari terjadi hujan, berapakah probabilitas bahwa 2 hari berikutnya juga hujan?

Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

- Cara penyelesaian yang lain
  - Probabilitas hujan pada suatu hari adalah p = 0.444
  - Suatu hari (hari ke-0) terjadi hujan
  - Probabilitas hujan saat itu adalah p = 0.444

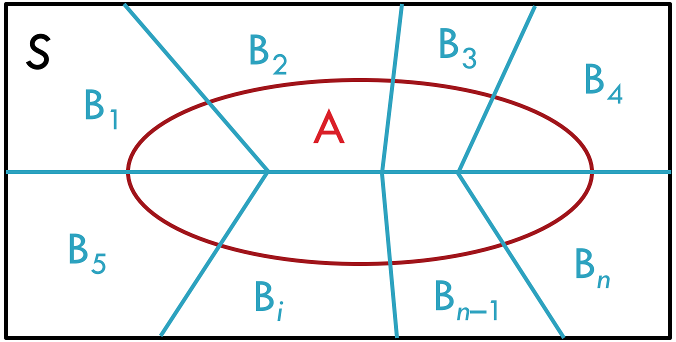


Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Apabila $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah serangkaian *events* yang tidak saling berkaitan (*mutually exclusive events*) dan masing-masing memiliki probabilitas tidak sama dengan nol, $\text{prob}(B_i) \neq 0, \forall i$, maka
  - $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$
  - $B_i \cap B_j = 0, \forall i,j \ (i \neq j)$
  - $\text{prob}(B_i) > 0, \forall i$

Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Probabilitas suatu *event* A dapat dituliskan sbb.



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

$$\mathrm{prob}(A) = \mathrm{prob}[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)]$$

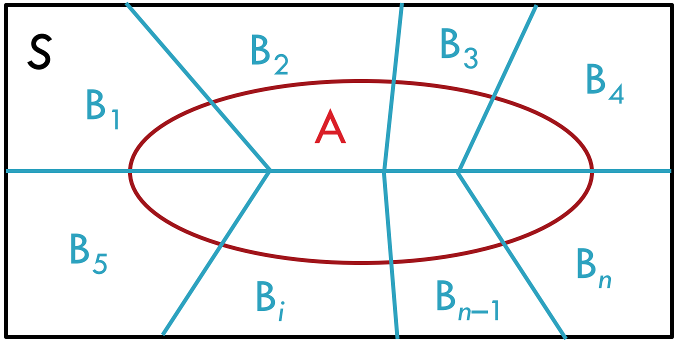
$$\mathrm{prob}(A) = \mathrm{prob}(A \cap B_1) + \mathrm{prob}(A \cap B_2) + \cdots + \mathrm{prob}(A \cap B_n)$$

$$\mathrm{prob}(A) = \mathrm{prob}(B_1 \cap A) + \mathrm{prob}(B_2 \cap A) + \cdots + \mathrm{prob}(B_n \cap A)$$

Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Dari probabilitas bersyarat (*conditional probability*)

$$\left.\begin{aligned}\text{prob}(A \cap B_1) &= \text{prob}(A)\text{prob}(B_1|A) \\ \text{prob}(B_1 \cap A) &= \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1)\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{prob}(A \cap B_1) = \text{prob}(B_1 \cap A) \Longrightarrow \\ &\text{prob}(A)\text{prob}(B_1|A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1)\end{aligned}$$



$$\text{prob}(A) = \text{prob}(A \cap B_1) + \text{prob}(A \cap B_2) + \cdots + \text{prob}(A \cap B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \text{prob}(B_1)\text{prob}(A|B_1) + \cdots + \text{prob}(B_n)\text{prob}(A|B_n)$$

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^{n} \text{prob}(B_i)\text{prob}(A|B_i)$$

Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Contoh
  - Data genangan di suatu wilayah permukiman menunjukkan bahwa probabilitas terjadinya genangan adalah 0.80 saat hari hujan dan 0.25 saat tak hujan.
  - Diketahui bahwa probabilitas hari hujan adalah 0.36.
  - Berapakah probabilitas terjadinya genangan di wilayah tersebut?

Probabilitas Total (*Total Probability*)

- Penyelesaian
  - *event* G = terjadi genangan
    event H = hari hujan
    event H^c = hari tak hujan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{prob}(G) &= \mathrm{prob}(H)\mathrm{prob}(G|H) + \mathrm{prob}(H^c)\mathrm{prob}(G|H^c) \\
&= 0.36 \times 0.82 + (1 - 0.36) \times 0.25 \\
&= 0.448
\end{aligned}
$$

Teorema Bayes

- Dari *conditional probability*

$$\text{prob}(A \cap B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) \quad \text{………} \ (1)$$

$$\text{prob}(B \cap A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \text{………} \ (2)$$

  - Karena prob($A \cap B$) = prob($B \cap A$), maka

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B|A) = \text{prob}(B) \cdot \text{prob}(A|B) \quad \text{………} \ (3)$$

  - Untuk *event* A dan *event* B_i, persamaan di atas menjadi

$$\text{prob}(A) \cdot \text{prob}\left(B_j \middle| A\right) = \text{prob}\left(B_j\right) \cdot \text{prob}\left(A \middle| B_j\right) \quad \text{………} \ (4)$$

Teorema Bayes

- Dari *total probability*

$$\text{prob}(A) = \sum_{i=1}^{n} \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i) \qquad \text{.........} \ (5)$$

  - Dengan (5) → (4)

$$\text{prob}(B_j|A) = \frac{\text{prob}(B_j) \cdot \text{prob}(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \text{prob}(B_i) \cdot \text{prob}(A|B_i)} \qquad \text{.........} \ (6)$$

Teorema Bayes

- Pemakaian
  - Untuk mencari probabilitas *event* B_i apabila diketahui *event* A telah terjadi.
  - Untuk mencari (memperkirakan) probabilitas suatu *event* (B_i) dengan mengamati *event* kedua (A).

Teorema Bayes

- Contoh
  - Informasi ramalan cuaca biasa dikirimkan melalui 4 saluran: R_i (i = 1,2,3,4) adalah event dimana informasi tsb dikirimkan melalui saluran i.
  - Probabilitas masing-masing event R_i adalah: 0.1, 0.2, 0.3, dan 0.4.
  - Diketahui juga bahwa probabilitas terjadinya kesalahan pengiriman (event E) melalui masing-masing saluran adalah: 0.10, 0.15, 0.20, dan 0.25.
  - Suatu saat diketahui bahwa suatu kesalahan pengiriman telah terjadi.
  - Berapakah probabilitas bahwa kesalahan tersebut terjadi melalui saluran ke-2?

Teorema Bayes

- Penyelesaian
  - Diketahui

$\text{prob}(R_1) = 0.1$	$\text{prob}(E\|R_1) = 0.10$
$\text{prob}(R_2) = 0.2$	$\text{prob}(E\|R_2) = 0.15$
$\text{prob}(R_3) = 0.3$	$\text{prob}(E\|R_3) = 0.20$
$\text{prob}(R_4) = 0.4$	$\text{prob}(E\|R_4) = 0.25$

  - Probabilitas bahwa pengiriman dilakukan melalui saluran ke-2 dengan melihat kenyataan bahwa telah terjadi kesalahan

$$\text{prob}(R_2|E) = \frac{\text{prob}(R_2)\cdot\text{prob}(E|R_2)}{\sum_{i=1}^{n}\text{prob}(R_i)\cdot\text{prob}(E|R_i)}$$

$$\text{prob}(R_2|E) = \frac{0.2\times 0.15}{0.1\times 0.10 + 0.2\times 0.15 + 0.3\times 0.20 + 0.4\times 0.25} = \frac{0.03}{0.20} = 0.15$$

Teorema Bayes

i	prob(R_i)	prob($E \mid R_i$)	prob(R_i) prob($E \mid R_i$)	prob($R_i \mid E$)
1	0.1	0.10	0.01	0.05
2	0.2	0.15	0.03	0.15
3	0.3	0.20	0.06	0.30
4	0.4	0.25	0.10	0.50
$\sum$	**1.0**		**0.20**	**1.00**

prob(E)

Probabilitas

Permutasi

Kombinasi

Permutasi dan Kombinasi

- Cara mendapatkan sampel yang terdiri dari r elemen dari suatu *sample space* yang memiliki n elemen ($n \geq r$) $\rightarrow$ dipilih/diambil satu elemen pada setiap pemilihan/pengambilan
  - urutan elemen diperhatikan dan setelah tiap pengambilan, elemen dikembalikan ke dalam *sample space* (*ordered with replacement*)
  - urutan elemen diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*ordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan tidak dilakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered without replacement*)
  - urutan elemen tidak diperhatikan dan dlakukan pengembalian elemen setelah tiap pengambilan (*unordered with replacement*)

Permutasi dan Kombinasi

- Contoh ilustrasi
  - Dilakukan pemilihan 2 stasiun AWLR dari
    4 stasiun yang ada (A, B, C, D) untuk diberi dana.
  - Berapa jumlah pasang stasiun yang mungkin mendapatkan dana?

Permutasi dan Kombinasi #1

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2$, $n = 4$) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun dapat memperoleh dana 2×
- Pasangan 2 stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,A) (B,B) (B,C) (B,D)
    (C,A) (C,B) (C,C) (C,D)
    (D,A) (D,B) (D,C) (D,D)

$$16 \rightarrow n^r = 4^2 = 16$$

Permutasi dan Kombinasi #2

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2$, $n = 4$) dengan
  - urutan diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B berbeda dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1×
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
---	(A,B)	(A,C)	(A,D)
(B,A)	---	(B,C)	(B,D)
(C,A)	(C,B)	---	(C,D)
(D,A)	(D,B)	(D,C)	---

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

permutasi

Permutasi dan Kombinasi #3

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2$, $n = 4$) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - tanpa pengembalian → suatu stasiun hanya dapat memperoleh dana 1×
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,C) (B,D)
    (C,D)

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6$$

kombinasi
koefisien binomial

Permutasi dan Kombinasi #4

- Dipilih 2 stasiun dari 4 stasiun ($r = 2$, $n = 4$) dengan
  - urutan tidak diperhatikan → memberikan dana kepada Stasiun A kemudian B sama dengan memberikan dana kepada Stasiun B kemudian A
  - dengan pengembalian → suatu stasiun dapat memperoleh dana 2×
- Kemungkinan stasiun yang mendapatkan dana
  - (A,A) (A,B) (A,C) (A,D)
    (B,B) (B,C) (B,D)
    (C,C) (C,D)
    (D,D)

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!\,r!} = $$

$$= \frac{(4+2-1)!}{(4-2)!\,2!} = 10$$

Resume

	Dengan pengembalian	Tanpa pengembalian
Urutan diperhatikan	n^r	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Urutan tidak diperhatikan	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!\,r!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

Persamaan Sterling $n! \approx \sqrt{2\pi e}^{-n} n^{n+\frac{11}{2}}$

Perintah (Fungsi) MSExcel

- FACT(*n*)
  - menghitung faktorial, *n* !
  - *n* bilangan positif (bilangan cacah)
- PERMUT(*n*,*r*)
  - menghitung permutasi,
  - *n* dan *r* integer, $n \geq r$

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- COMBIN(*n*,*r*)
  - menghitung kombinasi,
  - *n* dan *r* integer, $n \geq r$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Terima kasih