



Universitas Gadjah Mada

Fakultas Teknik

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

# INFERENSI STATISTIS: RENTANG KEYAKINAN

Statistika dan Probabilitas

# Rentang Keyakinan

2

- Estimasi Parameter
  - Distribusi probabilitas memiliki sejumlah parameter.
  - Nilai parameter-parameter tsb umumnya tidak diketahui.
  - Nilai parameter tersebut diperkirakan (di-estimasi-kan) berdasarkan nilai yang diperoleh dari pengolahan data.
  - Estimasi
    - Estimasi tunggal (*point estimates*)
    - Rentang keyakinan (*confidence intervals*)

# Rentang Keyakinan

3

- Estimasi tunggal
  - Contoh
    - Nilai rerata sampel sebagai estimasi nilai rerata populasi
$$\bar{X} \rightarrow \mu$$
    - Nilai simpangan baku sampel sebagai estimasi nilai simpangan baku populasi
$$S_X \rightarrow \sigma_X$$

# Rentang Keyakinan

4

## □ Estimasi parameter $\theta$

$$\hat{\theta}_{\text{estimasi}} \rightarrow \theta_{\text{parameter}}$$

Dicari suatu rentang  $[L, U]$  yang memiliki probabilitas  $(1 - \alpha)$  bahwa rentang tsb mengandung  $\theta$ .

$$\text{prob}(L < \theta < U) = 1 - \alpha \rightarrow \text{Pers (1)}$$

$L$  = batas bawah rentang keyakinan

$U$  = batas atas rentang keyakinan

$(1 - \alpha)$  = tingkat keyakinan (*confidence level, confidence coefficient*)

$L$  dan  $U$  = variabel random

# Rentang Keyakinan

5

- Contoh
  - Data pengukuran temperatur udara di Yogyakarta pada periode 1991 s.d. 2014 menunjukkan bahwa temperatur udara rerata di Yogyakarta adalah 30°C
    - Kita dapat memperkirakan bahwa temperatur udara rerata di Yogyakarta adalah 30°C.
    - Kita menyadari bahwa perkiraan tsb dapat salah; bahkan dari sisi pengertian probabilitas, kita tahu bahwa temperatur udara sama dengan 30°C adalah hampir tidak mungkin terjadi:

$$\text{prob}(\mu_T = 30^\circ\text{C}) = 0$$

# Batas Bawah dan Batas Atas

6

- Metode Ostle: *method of pivotal quantities*
  - Dicari variabel random  $V$  yang merupakan fungsi parameter  $\theta$  ( $\theta = \text{unknown}$ ), tetapi distribusi  $V$  ini tidak bergantung pada parameter yang tidak diketahui.
  - Ditentukan  $v_1$  dan  $v_2$  sedemikian hingga:

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha \quad \rightarrow \text{Pers (2)}$$

# Batas Bawah dan Batas Atas

7

- ❑ Metode Ostle: *method of pivotal quantities*

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

- ❑ Persamaan di atas diubah kedalam bentuk  
 $\text{prob}(L < \theta < U) = 1 - \alpha$
- ❑  $L$  dan  $U$  adalah variabel random dan fungsi  $V$ , tetapi bukan fungsi  $\theta$

# Rentang Keyakinan $\mu$ suatu distribusi normal

8

- Mencari interval  $[L, U]$  yang mengandung  $\mu$ ,  
 $\text{prob}(L < \mu < U) = 1 - \alpha$
- Misal variabel random  $V$ :

$$V = \frac{\bar{X} - \alpha}{s_{\bar{X}}}$$

- $V$  berdistribusi t dengan  $(n - 1)$  degrees of freedom
- $n$  adalah jumlah sampel yang dipakai untuk menghitung nilai rerata sampel

$$V = \frac{\bar{X} - \alpha}{s_{\bar{X}}} \quad \rightarrow \text{berdistribusi t?}$$

9

□ **Bukti**

Distribusi t:  $X = Y \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}}$        $\nu$  degree of freedom

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s_X^2/n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{s_X^2/\sigma^2}/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{s_X^2/\sigma^2}}$$

$$= \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2}} = Y \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}} \quad \Rightarrow Y = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\nu/\sqrt{n}}, U = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \nu = n - 1$$

## □ Pers (2)

10

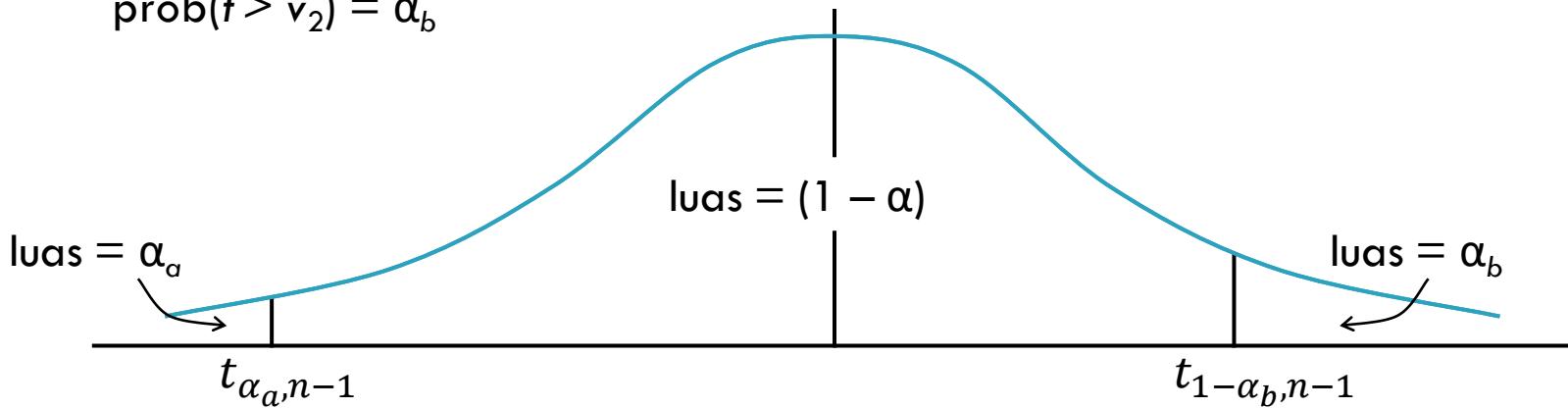
$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\alpha_a + \alpha_b = \alpha$$

$$\text{prob}(t < v_1) = \alpha_a$$

dengan  $(n - 1)$  degrees of freedom

$$\text{prob}(t > v_2) = \alpha_b$$



11

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(t_{\alpha_a, n-1} < \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < t_{1-\alpha_b, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(\underbrace{\bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} \cdot s_{\bar{X}}}_{\text{batas bawah}} < \mu < \underbrace{\bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} \cdot s_{\bar{X}}}_{\text{batas atas}}) = 1 - \alpha$$

batas bawah

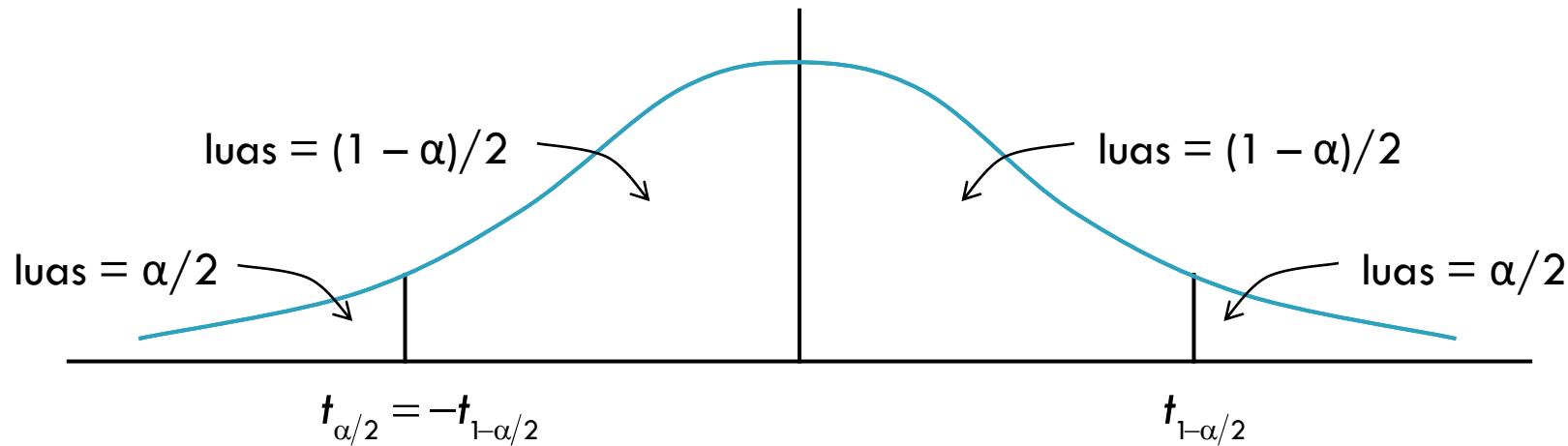
batas atas

Jadi, batas rentang keyakinan:

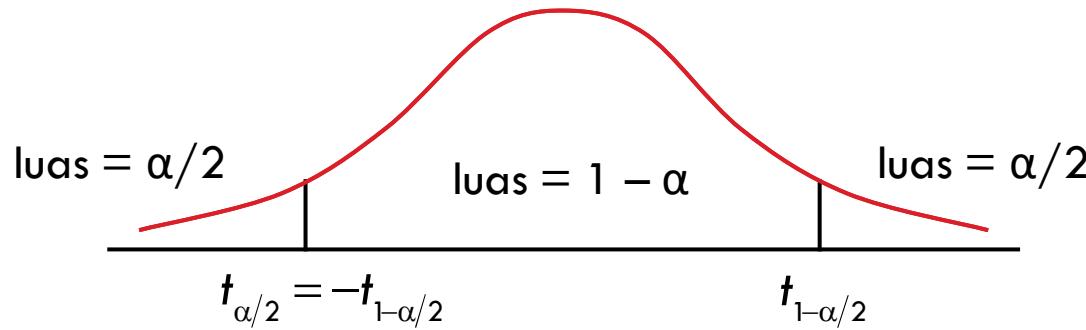
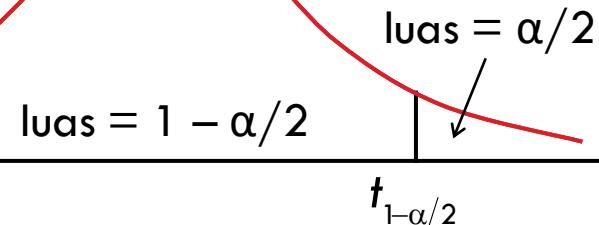
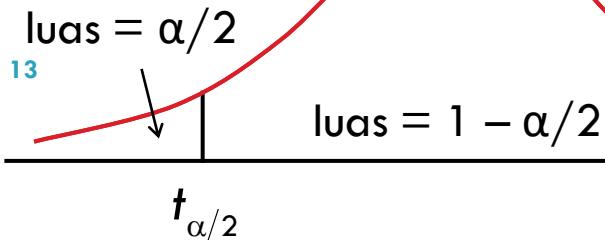
$$\left. \begin{array}{l} \ell = \bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} \cdot s_{\bar{X}} \\ u = \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} \cdot s_{\bar{X}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} s_{\bar{X}} = s_X / \sqrt{n} \\ t_{\alpha_a, n-1} \\ t_{1-\alpha_b, n-1} \end{array} \right\} \text{Tabel distribusi t}$$

12

- ❑ Jika dikehendaki probabilitas rentang keyakinan adalah simetris, maka  $v_1$  dan  $v_2$  dipilih sedemikian hingga  $\text{prob}(t < v_1) = \text{prob}(t > v_2)$ .
- ❑ Karena simetris, maka  $\alpha_a = \alpha_b = \alpha/2$
- ❑ Yang dicari adalah  $(1 - \alpha) = 100(1 - \alpha)\%$  rentang keyakinan
- ❑ maka:  $\text{prob}(t < v_1) = \alpha/2 = \text{prob}(t > v_2)$



# Distribusi t



- Dengan demikian, batas bawah dan batas atas rentang keyakinan mean populasi untuk probabilitas rentang keyakinan simetris adalah:

$$\ell = \bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot s_{\bar{X}}$$

$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot s_{\bar{X}}$$



$$\ell = \bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$



$$\text{prob}\left(\bar{X} + t_{\alpha_a, n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\alpha_b, n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



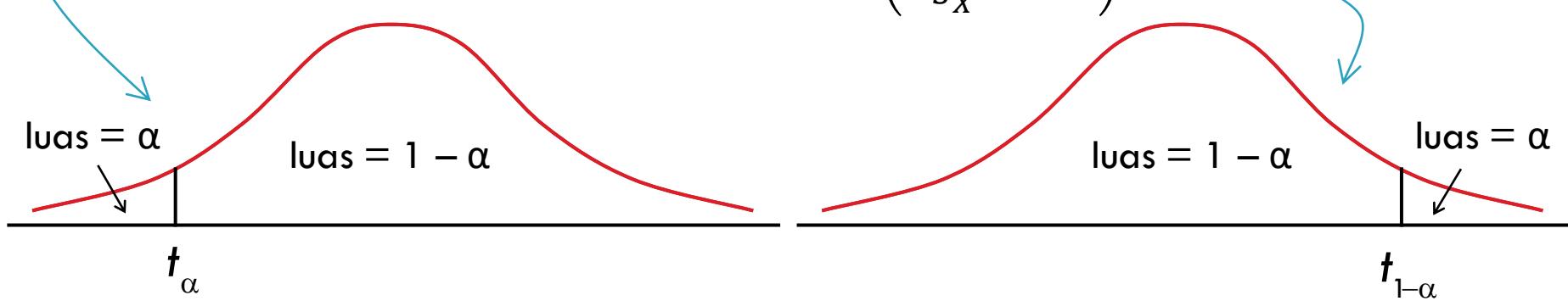
$$\text{prob}\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

■ Kadang dikehendaki probabilitas rentang keyakinan satu sisi

- batas bawah       $\rightarrow$        $\text{prob}(t < v_1) = \alpha$
- batas atas       $\rightarrow$        $\text{prob}(t > v_2) = \alpha$

$$\text{prob}(V > v_1) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} > v_1\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}(V < v_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{prob}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} < v_2\right) = 1 - \alpha$$



# Distribusi t

17

- Notasi
  - $t_{\alpha,n}$  adalah nilai  $t$  sedemikian hingga probabilitas variabel random  $t$  yang memiliki  $n$  degrees of freedom adalah lebih kecil daripada  $\alpha$
  - Misalnya:
    - $t_{0.95,50}$  adalah nilai  $t$  sedemikian hingga  $\text{prob}(t < t_{0.95,50}) = 0.95$  untuk  $t$  yang memiliki 50 degrees of freedom
- Tabel distribusi t
  - Tabel untuk membaca nilai  $t$  sebagai fungsi nilai probabilitas dan nilai degrees of freedom
    - Tabel ada di buku-buku statistika, ada di <https://istiarto.staff.ugm.ac.id>, dapat pula dibuat sendiri dengan memakai MSExcel

# Distribusi t

18

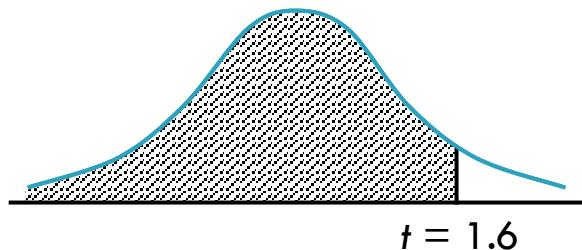
- Dapat dihitung dengan perintah/fungsi MSExcel

MSExcel 2007

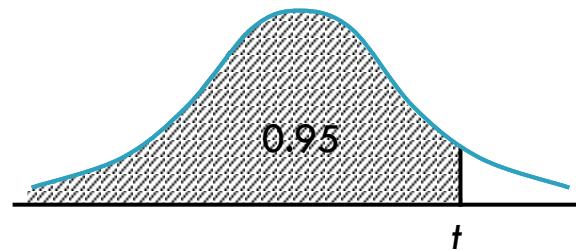
- TDIST( $t, v, \text{tails}$ )
    - menghitung nilai  $\text{prob}(T > t)$
    - untuk menghitung nilai  $\text{prob}(T < t) \rightarrow 1 - \text{TDIST}(t, v, \text{tails})$
    - $t$  = nilai yang diinginkan untuk dicari distribusinya
    - $v$  = *degree of freedom*
    - $\text{tails} = 1$  (*one-tailed distribution*) atau  $2$  (*two-tailed distribution*)
  - TINV( $p, v$ )
    - mencari nilai  $t$  jika nilai  $p = \text{prob}(T > t)$  diketahui
    - *two-tailed distribution*
    - jika ingin mencari nilai  $t$  untuk *one-tailed distribution*,  $p$  diganti dengan  $2p$

## distribusi t, 50 degrees of freedom

19

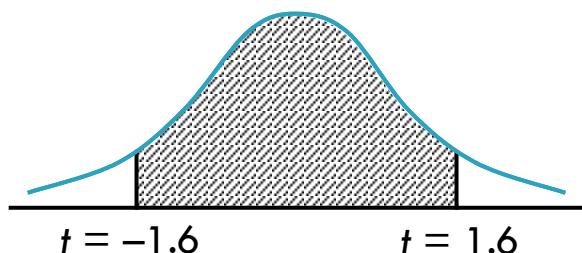


$$\text{prob}(T < 1.6) = 1 - \text{TDIST}(1.6, 50, 1) = 0.942$$

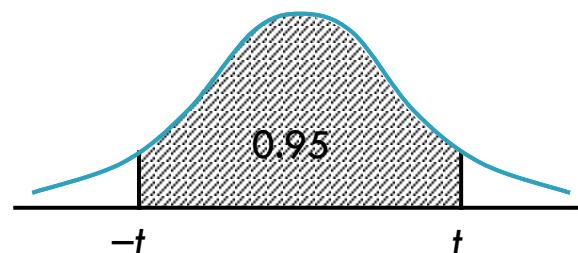


$$\text{prob}(T < t) = 0.95$$

$$t = \text{TINV}(2*(1-0.95), 50) = 1.68$$



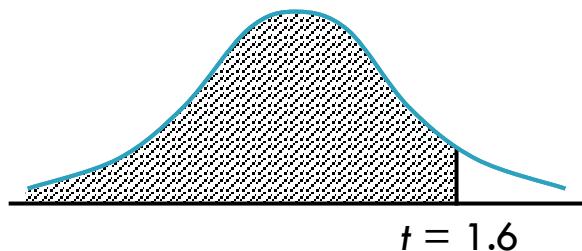
$$\text{prob}(-1.6 < T < 1.6) = 1 - \text{TDIST}(1.6, 50, 2) = 0.884$$



$$\text{prob}(-t < T < t) = 0.95$$

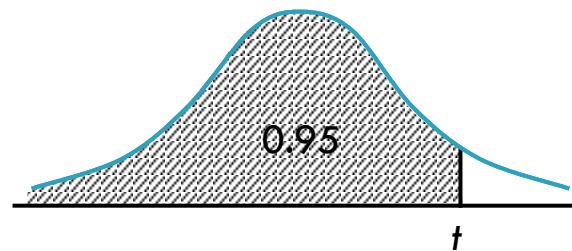
$$t = \text{TINV}(1-0.95, 50) = 2$$

## distribusi t, 50 degrees of freedom



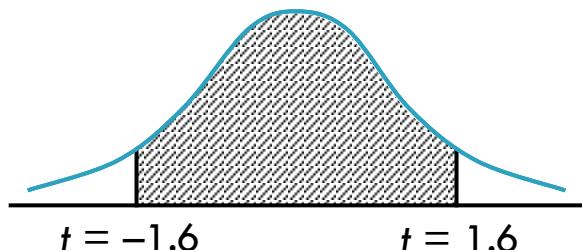
$$\text{prob}(T < 1.6) = \text{T.DIST}(1.6, 50, \text{TRUE}) = 0.942$$

$$\text{prob}(T < 1.6) = 1 - \text{T.DIST.RT}(1.6, 50) = 0.942$$

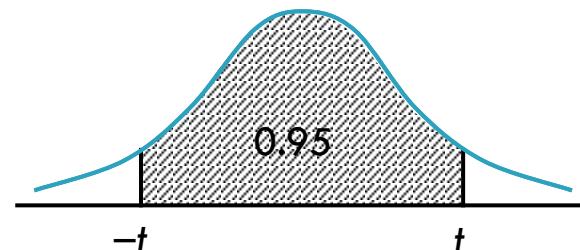


$$\text{prob}(T < t) = 0.95$$

$$t = \text{T.INV}(0.95, 50) = 1.68$$



$$\text{prob}(-1.6 < T < 1.6) = 1 - \text{T.DIST.2T}(1.6, 50) = 0.884$$



$$\text{prob}(-t < T < t) = 0.95$$

$$t = \text{T.INV.2T}(1 - 0.95, 50) = 2$$

# Rentang Keyakinan $\mu$ suatu distribusi normal, $\sigma^2$ diketahui

21

- Apabila varian populasi diketahui, maka variabel random  $V$  didefinisikan sbb.

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}, \quad \sigma_{\bar{X}} = \sigma_x / \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad V \text{ berdistribusi normal}$$

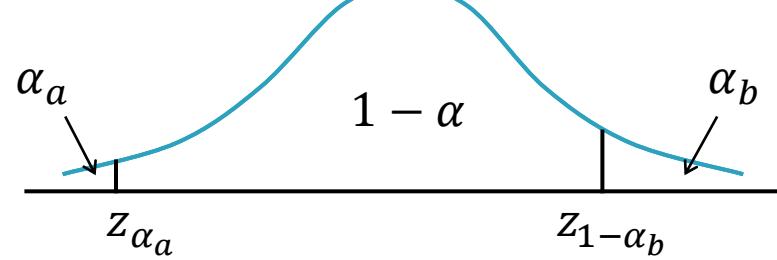
# Rentang Keyakinan $\mu$ suatu distribusi normal, $\sigma^2$ diketahui

22

## □ Rentang keyakinan

$$\ell = \bar{X} + z_{\alpha_a} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

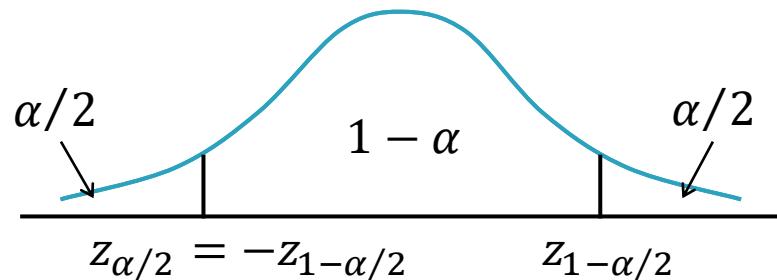
$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha_b} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



## □ Rentang keyakinan simetris

$$\ell = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$u = \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



# Rentang Keyakinan $\sigma^2$ suatu distribusi normal

23

- Mencari interval  $[L, U]$  yang mengandung  $\sigma^2$  dengan probabilitas  $\text{prob}(L < \sigma^2 < U) = 1 - \alpha$
- Didefinisikan variabel random  $V$ :

$$V = \frac{(n - 1)s_X^2}{\sigma_X^2} \rightarrow V \text{ berdistribusi chi-kuadrat dengan } (n - 1) \text{ degrees of freedom}$$

$$\text{prob}(v_1 < V < v_2) = 1 - \alpha$$

$$\text{prob}\left(v_1 < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

Pilih:  $v_1 = \chi_{\alpha/2, n-1}^2$

$$v_2 = \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$$

sehingga:  $\text{prob}\left(\chi_{\alpha/2, n-1}^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2\right) = 1 - \alpha$

atau:  $\text{prob}\left(\frac{(n-1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} < \sigma_X^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}\right) = 1 - \alpha$

- Jadi batas bawah dan batas atas rentang yang mengandung  $\sigma_X^2$  dengan tingkat keyakinan  $(1 - \alpha)$  adalah:

- batas bawah:  $\ell = \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2,n-1}^2}$

- batas atas:  $u = \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2,n-1}^2}$



$$\text{prob}\left(\frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{1-\alpha/2,n-1}^2} < \sigma_X^2 < \frac{(n - 1)s_X^2}{\chi_{\alpha/2,n-1}^2}\right) = 1 - \alpha$$

- catatan:  $X$  berdistribusi normal

$\chi^2$  berdistribusi chi-kuadrat

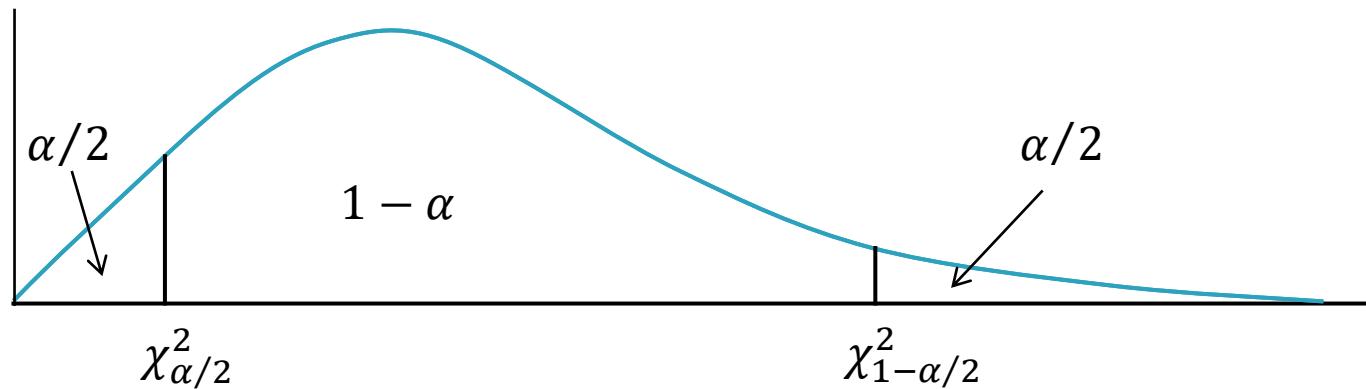
## □ Distribusi chi-kuadrat tidak simetris:

26

$$s_{X^2} - \ell \neq u - s_{X^2}$$

$n \gg \rightarrow (n - 1) \gg \rightarrow$  distribusi mendekati distribusi simetris,

$s_{X^2}$  berada kira-kira di tengah-tengah rentang  $[L, U]$ .



# Rentang Keyakinan Satu Sisi

27

- ❑ One-sided confidence intervals
- ❑ Hanya diinginkan satu sisi rentang keyakinan
  - ❑ Batas bawah saja untuk rentang keyakinan  $\mu$

$$\text{prob}(L < \theta) = 1 - \alpha \Rightarrow \ell = \bar{X} - t_{1-\alpha, n-1}$$

- ❑ Batas atas saja untuk rentang keyakinan  $\mu$

$$\text{prob}(\theta < U) = 1 - \alpha \Rightarrow u = \bar{X} + t_{1-\alpha, n-1}$$

# Terima kasih