



UNIVERSITAS GADJAH MADA
DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL DAN LINGKUNGAN
PRODI TEKNIK SIPIL

Solusi Numerik Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial Parsial Metode Beda Hingga

Persamaan Diferensial Parsial - PDE

■ Buku Acuan

- Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Part 7, Chapters 23-24, pp. 707-749
 - Kuliah 1-3 (metode beda hingga)

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

- Suatu fungsi u yang bergantung pada x dan $y \rightarrow u(x,y)$
 - Diferensial u terhadap x di sembarang titik (x,y)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

- Diferensial u terhadap y di sembarang titik (x,y)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

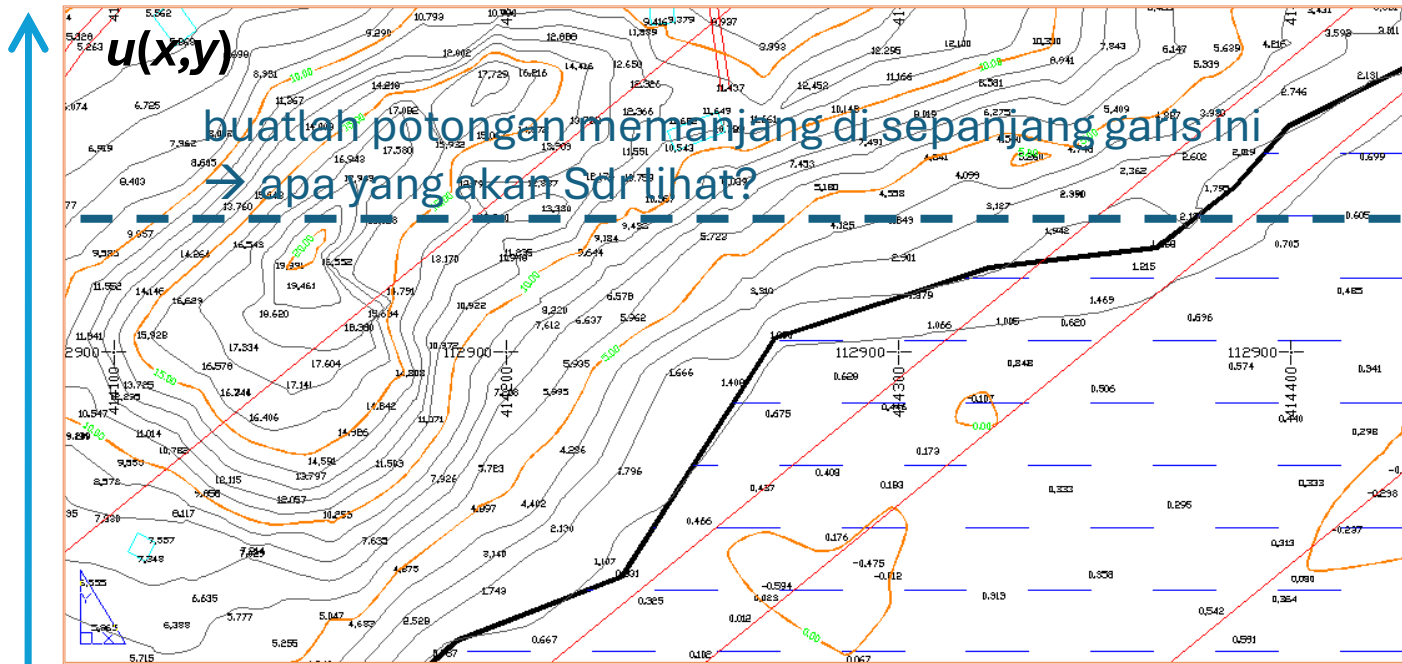
Persamaan Diferensial Parsial – PDE

Contoh arti fisik

u elevasi tanah pada peta situasi.

u ditunjukkan oleh garis-garis (kontur) elevasi tanah.

Y



X

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$(2) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

- Tingkat (*order*) PDE adalah tingkat tertinggi suku derivatif
- PDE merupakan fungsi linear apabila
 - fungsi tsb linear pada u dan derivatif u , dan
 - koefisien persamaan tsb hanya bergantung pada variabel bebas (x atau y) atau konstanta

PDE	Order	Linear
(1)	2	ya
(2)	3	ya
(3)	3	tidak
(4)	2	tidak

Persamaan Diferensial Parsial – PDE

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D = 0$$

A, B, C : fungsi x dan y

D : fungsi $x, y, u, \partial u/\partial x$, dan $\partial u/\partial y$

$B^2 - 4AC$	kategori
< 0	eliptik
$= 0$	parabolik
> 0	hiperbolik

- PDE yang dibahas dalam makul Solusi Numerik Persamaan Diferensial hanya PDE linear bertingkat dua
- PDE linear bertingkat dua dan fungsi dua variabel bebas (x, y) dapat dikelompokkan menjadi
 - persamaan eliptik
 - persamaan parabolik
 - persamaan hiperbolik

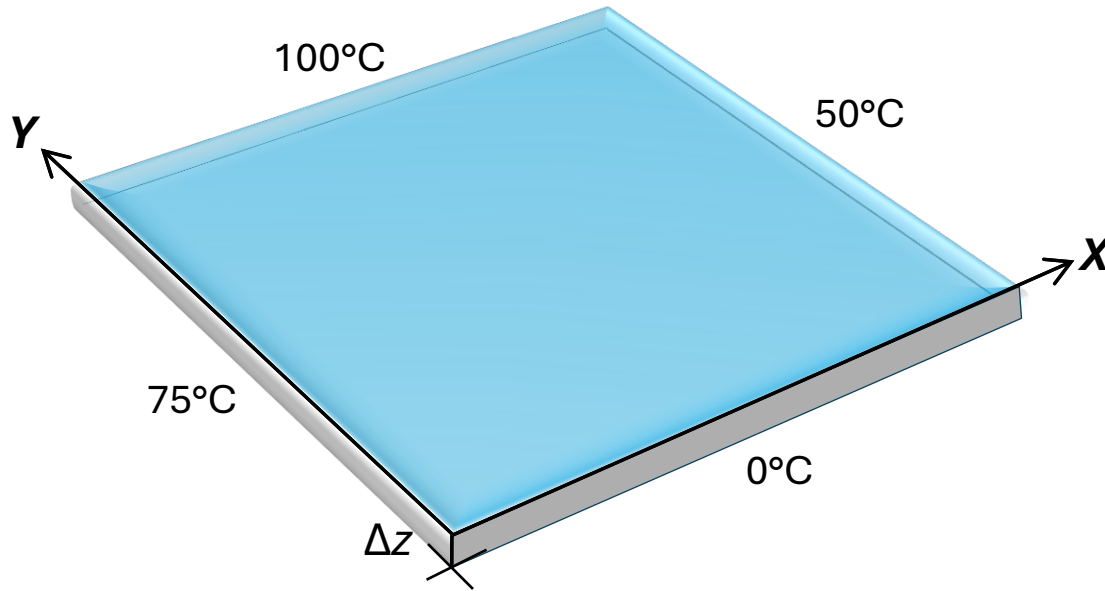
Persamaan Diferensial Parsial – PDE

$B^2 - 4AC$	Kategori	Nama	Persamaan
< 0	Eliptik	Persamaan Laplace (permanen, 2D spasial)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabolik	Persamaan konduksi termal (tak-permanen, 1D spasial)	$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$
> 0	Hiperbolik	Persamaan gelombang (tak-permanen, 1D spasial)	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

PDE Eliptik (Persamaan Laplace)

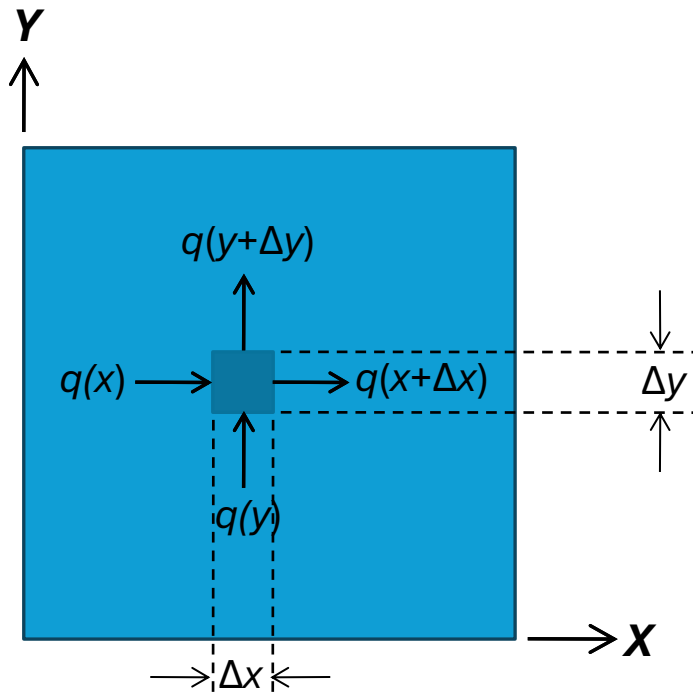
Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

Persamaan Laplace



- Sebuah pelat logam persegi tipis berukuran $4 \times 4 \text{ m}^2$
 - kedua permukaan dilapisi isolator termal
 - sisi-sisi pelat diberi panas, temperatur konstan
 - transfer termal hanya dimungkinkan ke arah x dan y
- Ingin diketahui temperatur pelat pada waktu transfer termal permanen telah tercapai (*steady-state condition*)

Persamaan Laplace



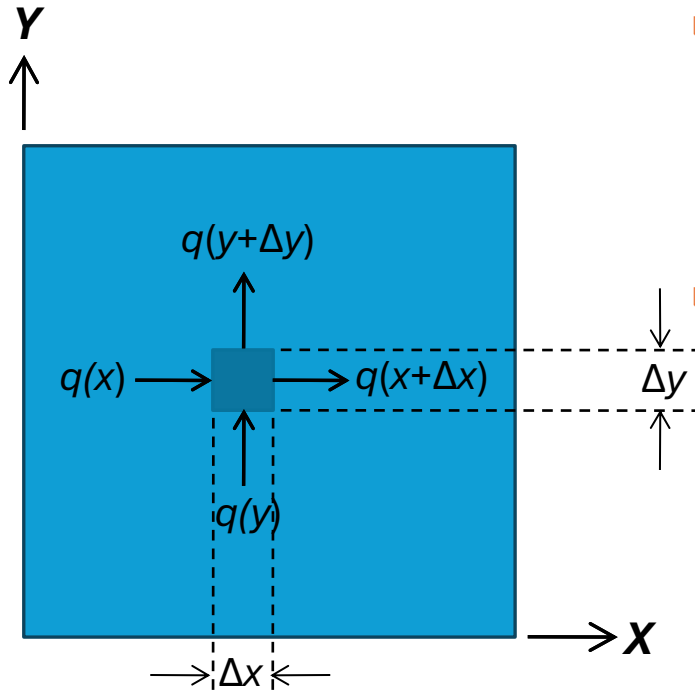
- Ketika *steady-state condition* telah tercapai, maka aliran ke dalam sebuah elemen (lihat gambar di samping) selama periode Δt haruslah sama dengan aliran yang keluar dari elemen itu.

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t =$$

$$q(x + \Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y + \Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t$$

$q(x)$ dan $q(y)$ berturut-turut adalah fluks termal arah x dan arah y , dalam satuan $\text{kal/cm}^2/\text{s}$.

Persamaan Laplace



- Jika semua suku dalam persamaan tsb dibagi dengan $\Delta x \Delta y$, maka

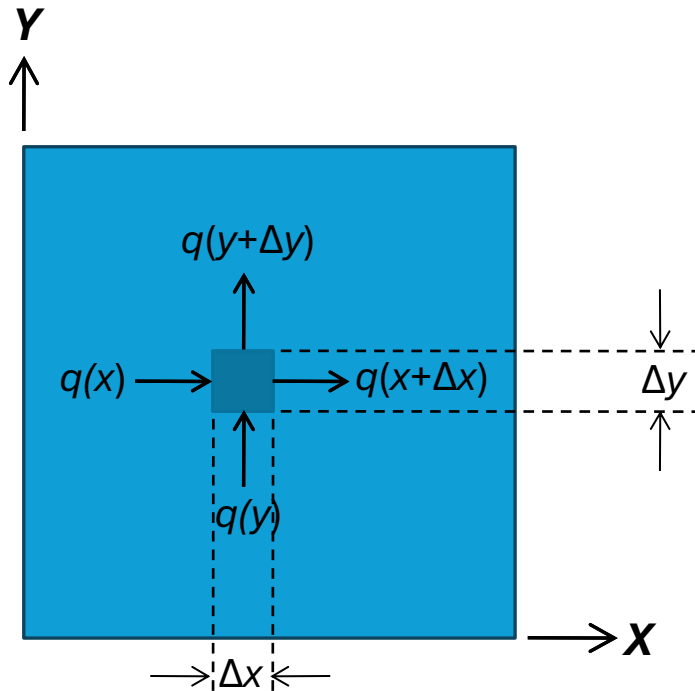
$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x = q(x + \Delta x)\Delta y + q(y + \Delta y)\Delta x$$

- Pengelompokan suku dan perkalian dengan $\Delta x/\Delta x$ atau $\Delta y/\Delta y$ menghasilkan

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \dots$$

$$\frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} \Delta y \Delta x = 0$$

Persamaan Laplace



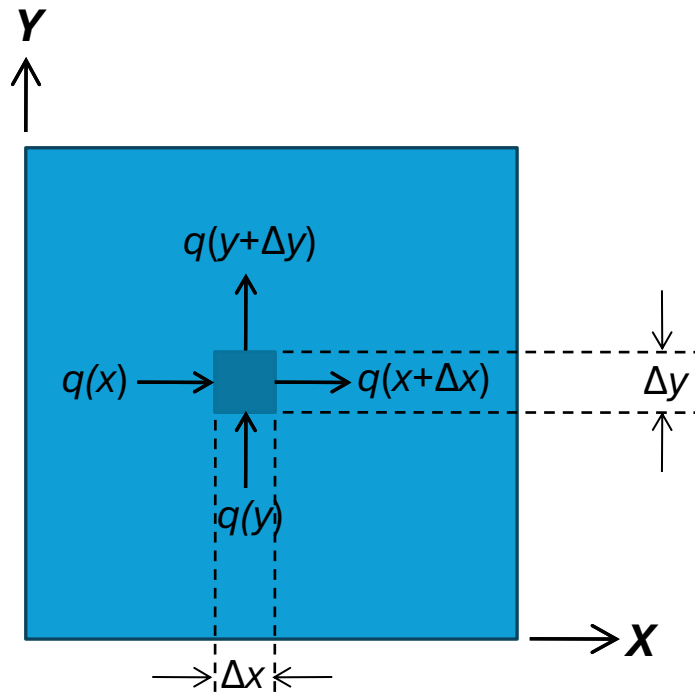
- Pembagian dengan $\Delta x \Delta y$ menghasilkan

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} = 0$$

- Mengambil nilai limit persamaan di atas dan memperhatikan definisi diferensial parsial, maka diperoleh

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (\text{persamaan konservasi energi})$$

Persamaan Laplace

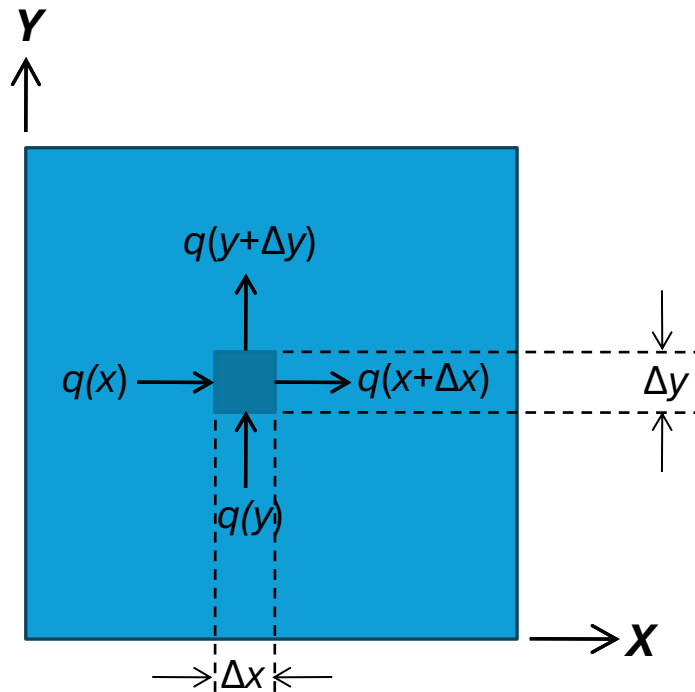


$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

- Penyelesaian PDE tsb membutuhkan **syarat batas** (*boundary conditions*) fluks termal q . Padahal, syarat batas yang diketahui adalah temperatur T
- Oleh karena itu, PDE di atas diubah menjadi PDE dalam T dengan menerapkan Hukum Fourier untuk konduksi termal

$$\left. \begin{aligned} q_i &= -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} \\ q_i &= -k' \frac{\partial T}{\partial i} \end{aligned} \right\} \text{(Fourier's law of heat conduction)}$$

Persamaan Laplace



$$q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} = -k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

q_i fluks termal arah i (kal/cm²/s)

k koefisien difusi termal (cm²/s)

ρ rapat massa medium (g/cm³)

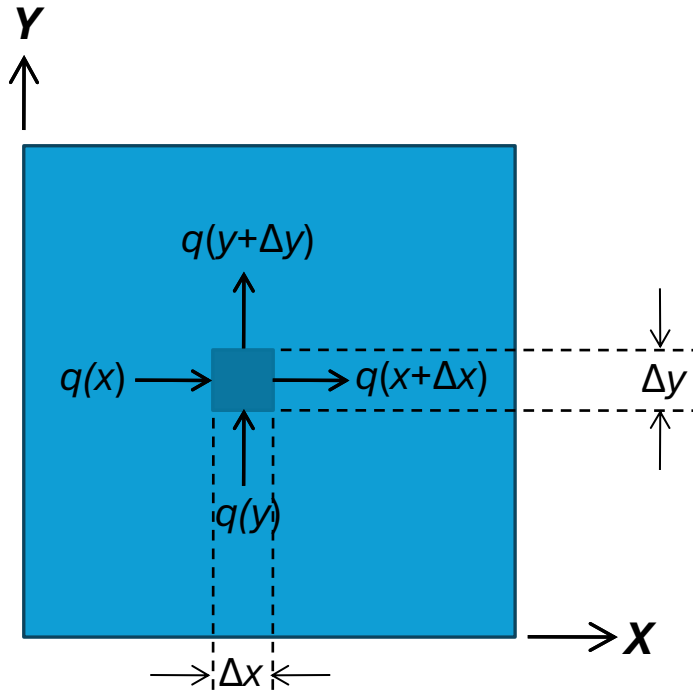
C kapasitas termal medium (kal/g/°C)

T temperatur (°C)

k' konduktivitas termal (kal/s/cm/°C)

- Persamaan di atas menunjukkan bahwa fluks termal arah tegak lurus sumbu i sebanding dengan gradien (*slope*) temperatur arah i

Persamaan Laplace



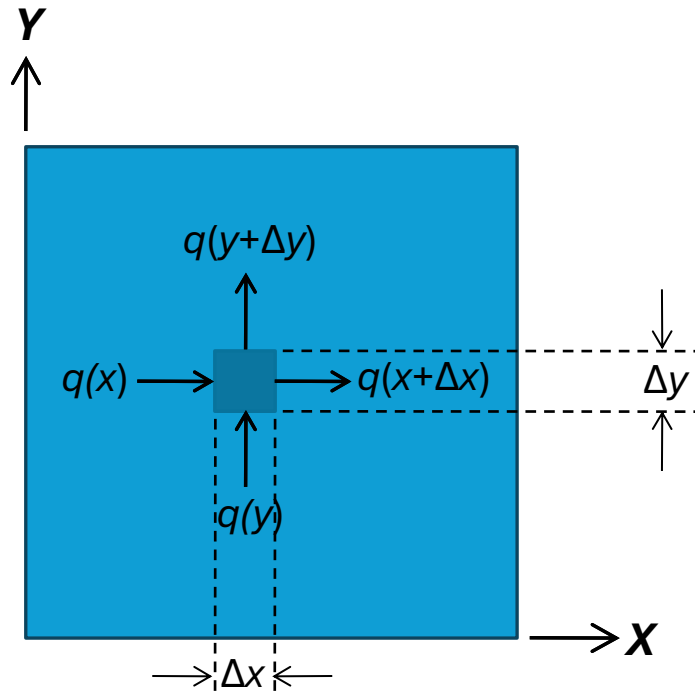
- Dengan memakai *Fick's Law*, maka persamaan konservasi energi dapat dituliskan sbb.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Persamaan Laplace})$$

- Jika ada *source* atau *sink*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (\text{Persamaan Poisson})$$

Persamaan Laplace



- Persamaan tsb sama dengan persamaan aliran melalui medium porus (Hukum Darcy)

$$q_i = -K \frac{\partial H}{\partial i}$$

q_i : debit aliran arah i ($\text{m}^3/\text{m}/\text{s}$)

K : konduktivitas hidraulik (m^2/s)

H : tinggi energi hidraulik (m)

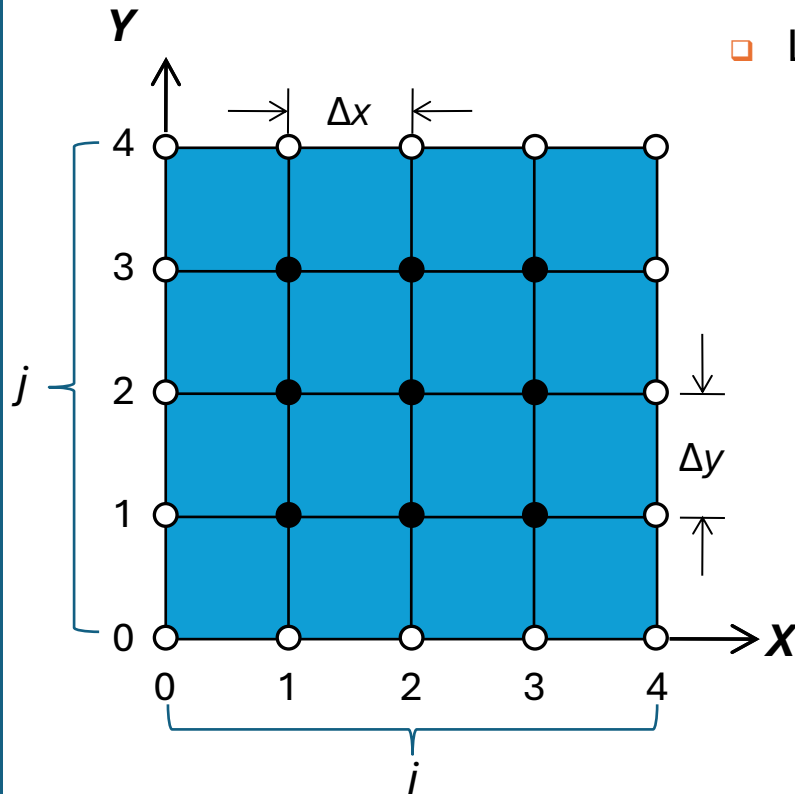
i : panjang lintasan, panjang aliran (m)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Penyelesaian persamaan Laplace, dan berbagai PDE di bidang enjiniring, hampir tidak pernah dilakukan secara analitis, kecuali untuk kasus-kasus yang sederhana
- Penyelesaian hampir selalu dilakukan secara numeris
- Teknik penyelesaian PDE secara numeris
 - Metode beda hingga (*finite difference approximation*, FDA)
 - Metode volume hingga (*finite volume method*, FVM)
 - Metode elemen hingga (*finite element method*, FEM)

Finite Difference Approach – FDA



Langkah pertama dalam FDA

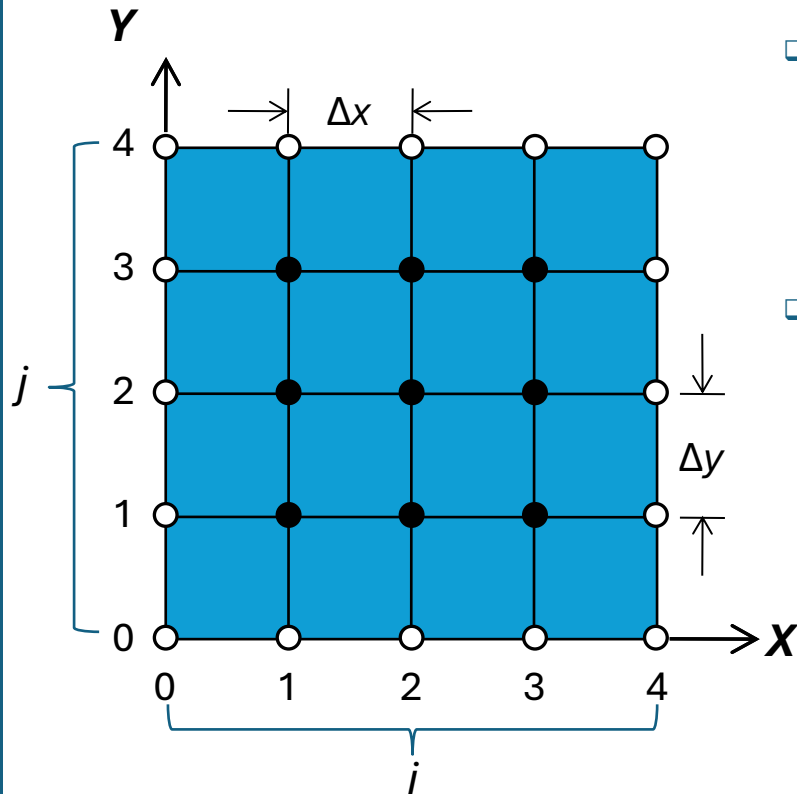
- ▣ Domain fisik pelat persegi dibagi menjadi sejumlah pias atau grid titik-titik diskret
- ▣ PDE Laplace diubah menjadi persamaan beda hingga di setiap titik hitung (i,j)
- ▣ Di titik hitung interior (simbol bulat hitam)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- diferensi tengah (*central difference*)
- error = $O[(\Delta x)^2]$ &
- error = $O[(\Delta y)^2]$

Finite Difference Approach – FDA



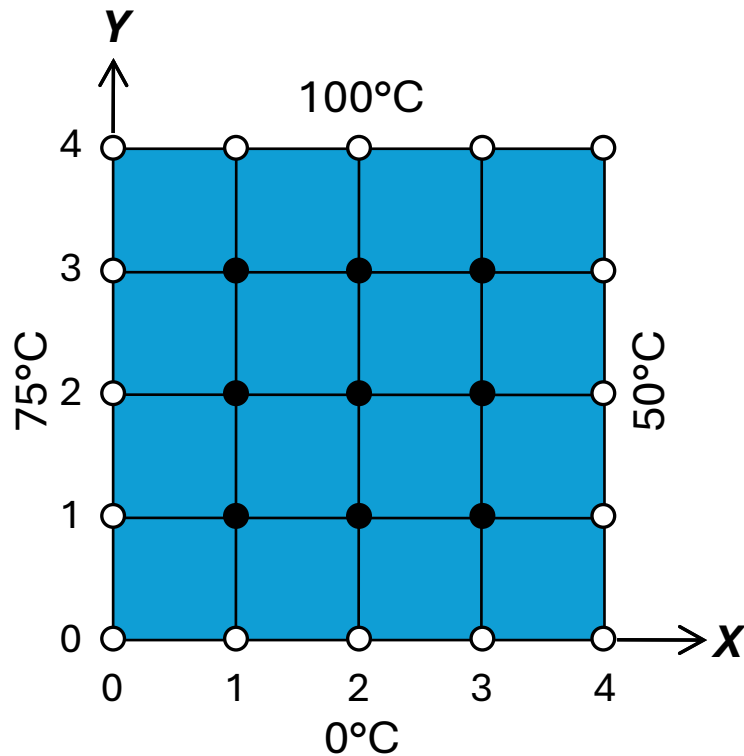
- Persamaan Laplace dalam bentuk beda hingga

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

- Jika ukuran grid seragam, $\Delta x = \Delta y (= 1 \text{ m})$, maka

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Finite Difference Approach – FDA

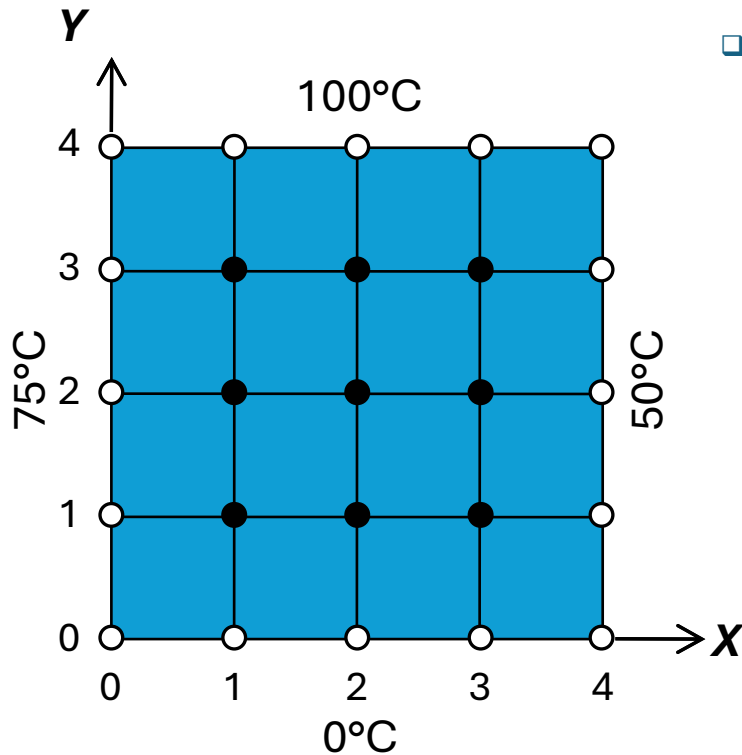


- Di titik-titik yang berada di batas domain (simbol bulat putih), berlaku syarat batas (*boundary conditions*) → temperatur diketahui/ditetapkan.
- BC semacam itu dikenal dengan nama **Dirichlet boundary condition** (syarat batas Dirichlet)
- Di titik (1,1)

$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$$

$$-4T_{1,1} + T_{1,2} + T_{2,1} = -75 - 0$$
- Di 8 titik interior yang lain pun dapat dituliskan persamaan beda hingga diskret semacam itu

Finite Difference Approach – FDA



- Dari 9 titik interior diperoleh sistem persamaan aljabar linear yang terdiri dari 9 persamaan dengan 9 *unknowns*

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- 9 persamaan yang memiliki 9 *unknowns*


	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)		
(1)	$-4T_{1,1}$	$+T_{2,1}$	$+0$	$+T_{1,2}$	0	0	0	0	0	$=$	-75
(2)	$T_{1,1}$	$-4T_{2,1}$	$+T_{3,1}$	$+0$	$+T_{2,2}$	0	0	0	0	$=$	0
(3)	$+0$	$+T_{2,1}$	$-4T_{3,1}$	$+0$	$+0$	$+T_{3,2}$	0	0	0	$=$	-50
(4)	$T_{1,1}$	$+0$	$+0$	$-4T_{1,2}$	$+T_{2,2}$	$+0$	$+T_{1,3}$	0	0	$=$	-75
(5)	0	$+T_{2,1}$	$+0$	$+T_{1,2}$	$-4T_{2,2}$	$+T_{3,2}$	$+0$	$+T_{2,3}$	0	$=$	0
(6)	0	0	$+T_{3,1}$	$+0$	$+0$	$-4T_{3,2}$	$+0$	$+T_{2,3}$	$+T_{3,3}$	$=$	-50
(7)	0	0	0	$+T_{1,2}$	$+0$	$+0$	$-4T_{1,3}$	$+T_{2,3}$	$+0$	$=$	-175
(8)	0	0	0	0	$+T_{2,2}$	$+0$	$+T_{1,3}$	$-4T_{2,3}$	$+T_{3,3}$	$=$	-100
(9)	0	0	0	0	0	$+T_{3,2}$	$+0$	$+T_{2,3}$	$-4T_{3,3}$	$=$	-150

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

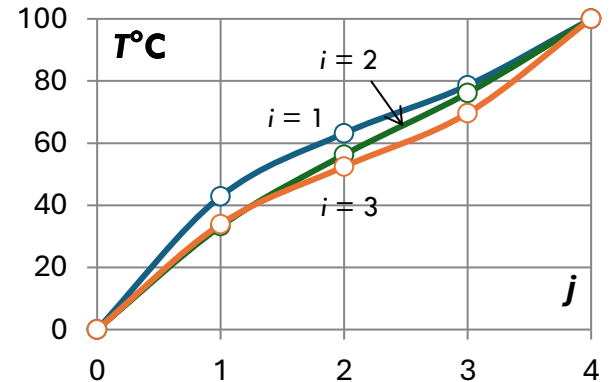
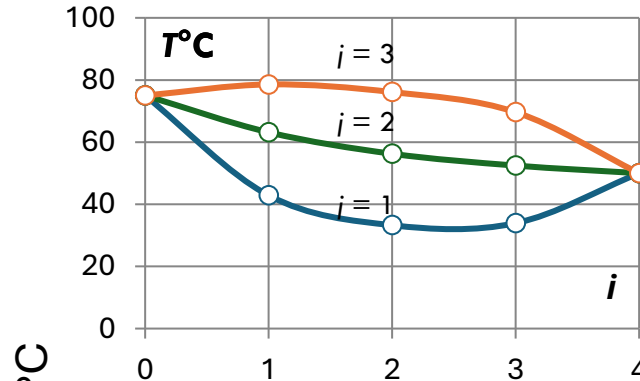
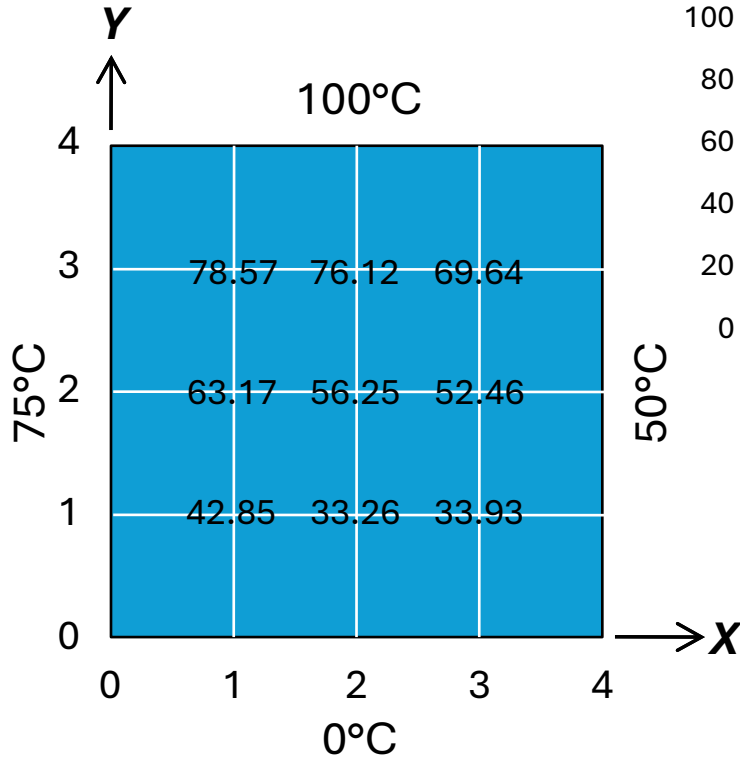
- 9 persamaan yang memiliki 9 *unknowns*

$$\begin{array}{cccccccccc}
 T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} & T_{1,2} & T_{2,2} & T_{3,2} & T_{1,3} & T_{2,3} & T_{3,3} & \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 T_{1,1} \\
 T_{2,1} \\
 T_{3,1} \\
 T_{1,2} \\
 T_{2,2} \\
 T_{3,2} \\
 T_{1,3} \\
 T_{2,3} \\
 T_{3,3}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 -75 \\
 0 \\
 -50 \\
 -75 \\
 0 \\
 -50 \\
 -175 \\
 -100 \\
 -150
 \end{array}
 \end{array}$$

Teknik Penyelesaian Persamaan Laplace

- Sistem persamaan aljabar yang dihasilkan dari penerapan persamaan beda hingga (*finite difference*) di semua titik interior
 - diselesaikan dengan salah satu metode yang telah dibahas dalam kuliah Metode Numerik
 - untuk 9 persamaan, penyelesaian masih dapat dilakukan dengan mudah memakai cara tabulasi *spreadsheet*
 - untuk jumlah persamaan yang banyak, seperti yang biasa ditemui dalam permasalahan *engineering*, perlu bantuan program komputer
 - MatLab (program aplikasi berbayar)
 - SciLab (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
 - **Octave** (mirip MatLab, program aplikasi *open source*, platform Windows, MacOS, Linux)
-  • **Python**
- *Numerical Recipes*
 - Etc. (dapat dicari di internet)

Perkalian Matriks: $\{T\} = [A]^{-1} \{R\}$



Iterasi: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR

- Metode iteratif *Gauss-Seidel iteration method*

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad \text{atau} \quad T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1}}{4}$$

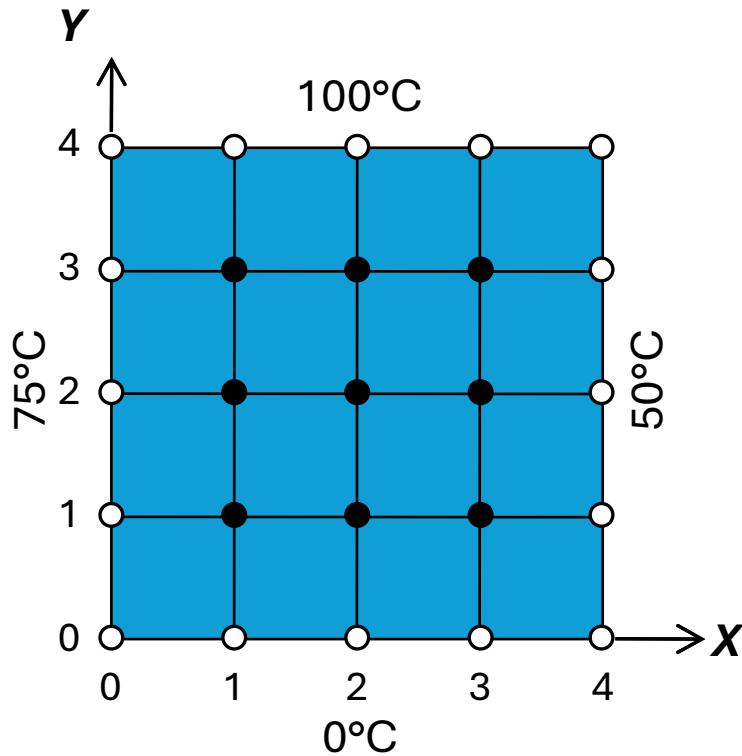
- Dipakai SOR (*Successive Over Relaxation*) method untuk mempercepat konvergensi

$$T_{i,j}^{n+1} = \lambda T_{i,j}^{n+1} + (1 - \lambda) T_{i,j}^n \quad 1 < \lambda < 2$$

- Kriteria konvergensi

$$\max |\varepsilon_{i,j}| = \max \left| \frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^n}{T_{i,j}^{(n+1)}} \right| < 1\%$$

hitungan dilakukan
dengan bantuan
tabulasi *spreadsheet*



$$T_{1,1}^{n+1} = \frac{75 + T_{2,1}^n + 0 + T_{1,2}^n}{4}$$

$$T_{2,1}^{n+1} = \frac{\lambda T_{1,1}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{1,1}^n + T_{3,1}^n + 0 + T_{2,2}^n}{4}$$

$$T_{3,1}^{n+1} = \frac{\lambda T_{2,1}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{2,1}^n + 50 + 0 + T_{3,2}^n}{4}$$

$$T_{1,2}^{n+1} = \frac{75 + T_{2,2}^n + \lambda T_{1,1}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{1,1}^n + T_{1,3}^n}{4}$$

$$T_{2,2}^{n+1} = \frac{\lambda T_{1,2}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{1,2}^n + T_{3,2}^n + \lambda T_{2,1}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{2,1}^n + T_{2,3}^n}{4}$$

$$T_{3,2}^{n+1} = \frac{\lambda T_{2,2}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{2,2}^n + 50 + \lambda T_{3,1}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{3,1}^n + T_{3,3}^n}{4}$$

$$T_{1,3}^{n+1} = \frac{75 + T_{2,3}^n + \lambda T_{1,2}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{1,2}^n + 100}{4}$$

$$T_{2,3}^{n+1} = \frac{\lambda T_{1,3}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{1,3}^n + T_{3,3}^n + \lambda T_{2,2}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{2,2}^n + 100}{4}$$

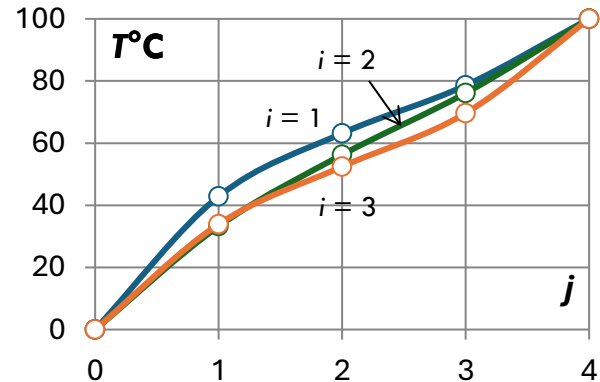
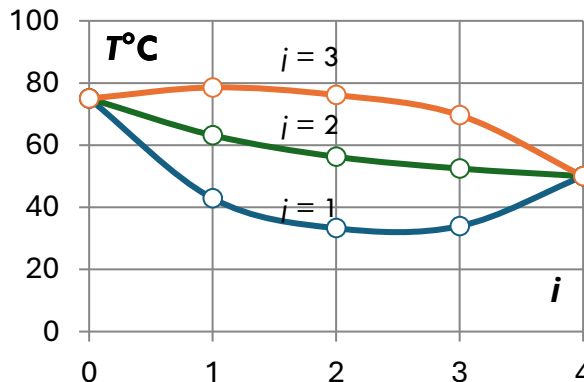
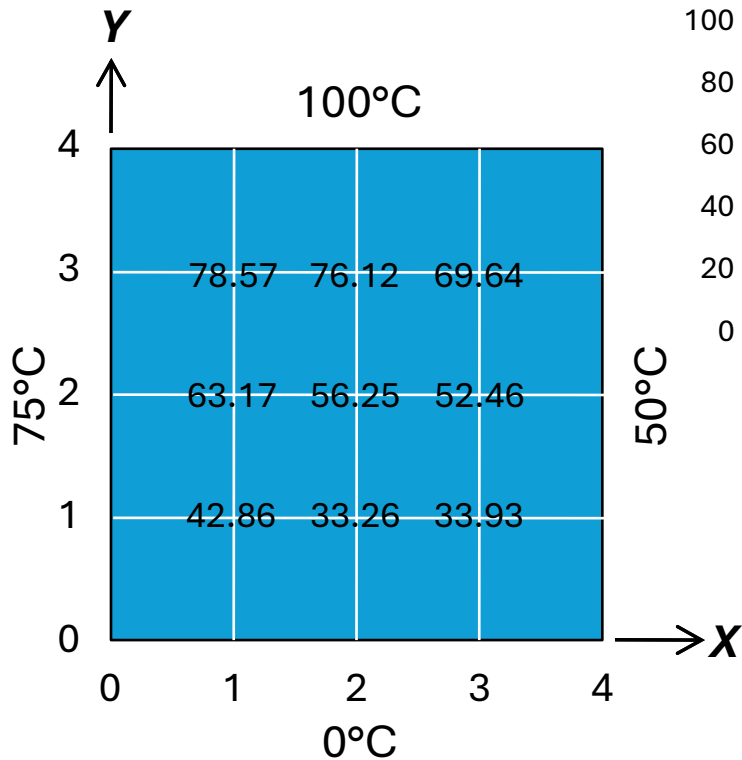
$$T_{3,3}^{n+1} = \frac{\lambda T_{2,3}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{2,3}^n + 50 + \lambda T_{3,2}^{n+1} + (1 - \lambda)T_{3,2}^n + 100}{4}$$

Iterasi SOR: $\lambda = 1.5$

iterasi, n	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$	ΔT_{\max}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	---
1	18.7500	7.0313	15.1367	25.7813	12.3047	22.7905	53.4180	45.0317	62.9333	62.9333
2	26.9531	14.6240	22.8027	42.9443	34.4421	46.2700	67.8894	62.5908	69.8450	23.4795
3	33.1421	23.3704	31.0034	53.3920	48.8050	52.7338	74.0517	70.3550	70.0507	14.3629
4	37.9406	30.0371	34.0261	59.5491	54.7717	53.3358	76.9957	74.3309	69.9889	6.6667
5	41.1466	32.8868	34.4119	62.3792	56.4432	52.9681	78.2813	75.9212	69.8752	3.2060
6	42.5665	33.5329	34.2060	63.2502	56.6077	52.6671	78.6517	76.2888	69.7473	1.4200
7	42.9458	33.4873	34.0329	63.3487	56.4546	52.5179	78.6717	76.2592	69.6719	0.3793
8	42.9590	33.3633	33.9548	63.2730	56.3284	52.4632	78.6236	76.1815	69.6446	0.1262
9	42.9091	33.2918	33.9298	63.2090	56.2695	52.4505	78.5896	76.1364	69.6395	0.0715
10	42.8752	33.2644	33.9253	63.1793	56.2505	52.4509	78.5752	76.1192	69.6404	0.0339

Iterasi konvergen: $n > 16$

Iterasi SOR: $\lambda = 1.5$



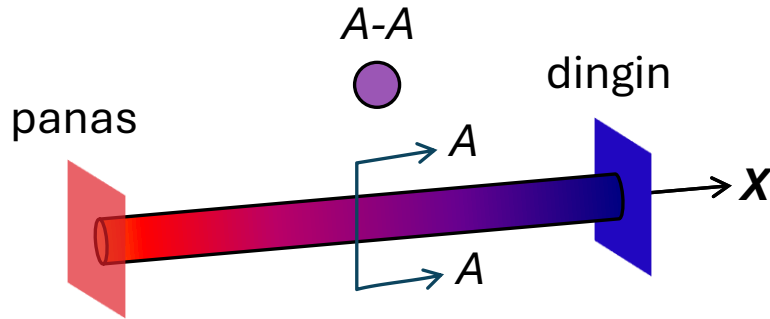
Penyelesaian PDE Parabolik

FDA Skema Eksplisit

FDA Skema Implisit

FDA Skema Crank-Nicolson

PDE Parabolik



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator termal, kecuali di pangkal dan di ujung batang yang diberi termal dengan temperatur yang berbeda, yaitu panas dan dingin.

- Heat balance di dalam batang

$$q(x)A\Delta t - q(x + \Delta x)A\Delta t = \Delta x A \rho C \Delta T$$

input
output
storage

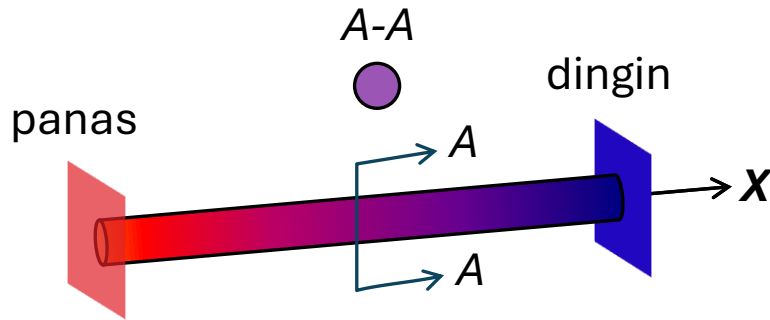
- persamaan tsb dibagi vol = $\Delta x A \Delta t$

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

- limit persamaan tersebut untuk $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

PDE Parabolik



Batang logam pipih-panjang dibungkus isolator termal, kecuali di pangkal dan di ujung batang yang diberi termal dengan temperatur yang berbeda, yaitu panas dan dingin.

- Hukum Fourier untuk konduksi termal

$$q = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial x}$$

- Persamaan *heat balance* menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{persamaan konduksi termal}$$

- Persamaan di atas merupakan persamaan difusi
 - konduksi termal
 - transpor polutan
 - transpor sedimen suspensi

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- Temperatur batang merupakan fungsi waktu dan ruang
 - terhadap waktu, T berupa suku derivatif pertama
 - terhadap ruang, T berupa suku derivatif kedua
- Langkah hitungan metode FDA
 - T pada waktu $t+\Delta t$ dihitung berdasarkan T pada waktu t
 - T pada waktu t sudah diketahui dari nilai/syarat awal (***initial condition***) atau dari hasil hitungan langkah sebelumnya
 - saat menghitung T di suatu titik pada suku derivatif ruang, T yang mana yang dipakai?
 - jika T pada waktu t → dinamai skema eksplisit
 - jika T pada waktu $t+\Delta t$ → dinamai skema implisit

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \text{di titik } i$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i$$

k konstan di sepanjang batang dan pada seluruh waktu

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Skema Eksplisit

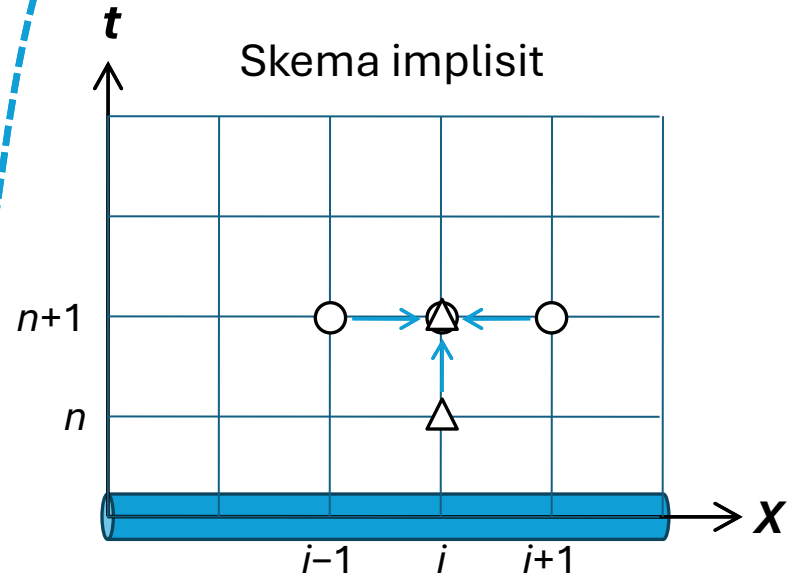
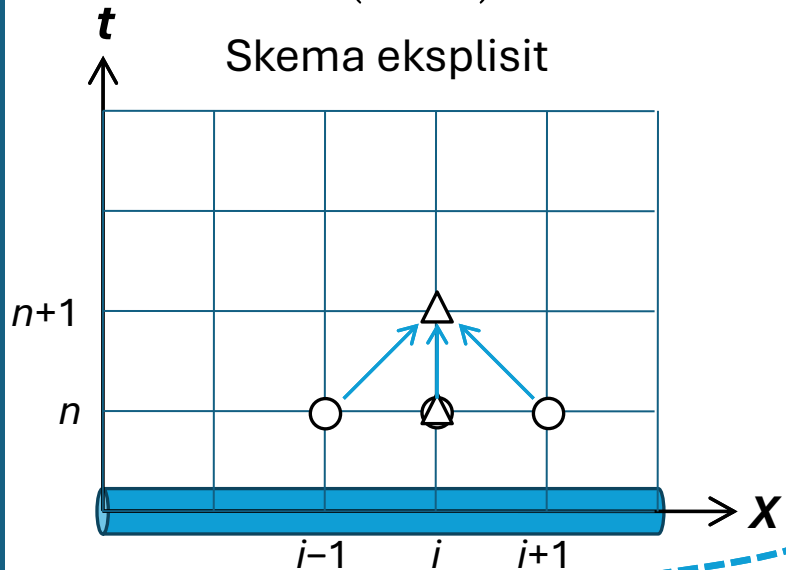
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Skema Implisit

Δx seragam di sepanjang batang

FDA: Skema Eksplisit dan Skema Implisit

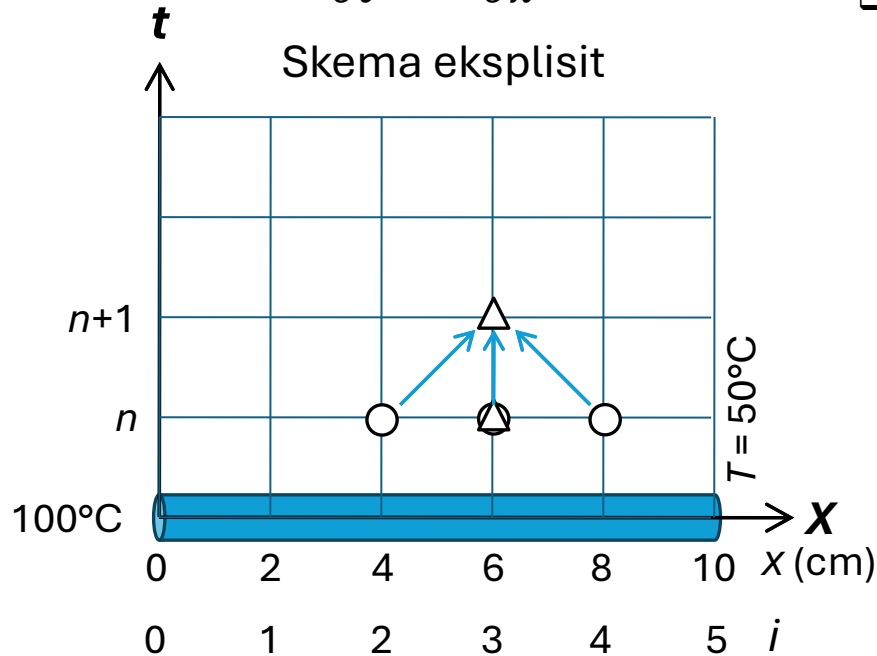
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$



$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA: Skema Eksplisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - panjang batang, $L = 10 \text{ cm}$, $\Delta x = 2 \text{ cm}$
 - *time step*, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$
 - koefisien difusi termal, $k = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$
 - syarat batas: $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=10, t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal: $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

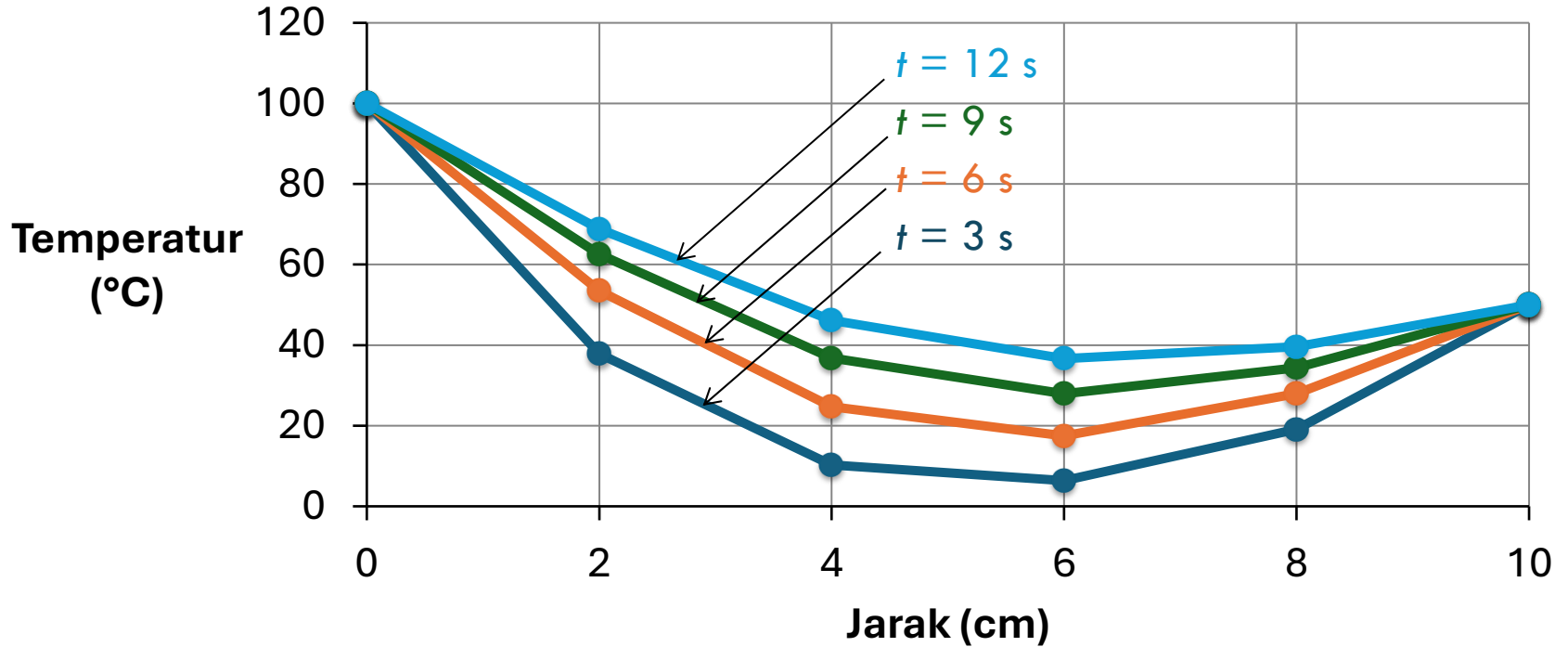
FDA: Skema Eksplisit

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

langkah	waktu (s)	temperatur (°C) di titik hitung					
0	0	100	0	0	0	0	50
1	0.1	100	2.0875	0	0	1.0438	50
2	0.2	100	4.0878	0.0436	0.0218	2.0439	50
3	0.3	100	6.0056	0.1275	0.0645	3.0028	50
4	0.4	100	7.8450	0.2489	0.1271	3.9225	50
5	0.5	100	9.6102	0.4050	0.2089	4.8052	50

Hitungan diteruskan sampai $t = 12$ s

FDA: Skema Eksplisit



FDA: Skema Eksplisit

- Konvergensi dan stabilitas hitungan
 - Konvergensi berarti bahwa jika Δx dan Δt mendekati nol, maka penyelesaian FDA mendekati penyelesaian eksak.
 - Stabilitas berarti bahwa kesalahan hitungan di setiap tahap hitungan tidak mengalami amplifikasi, tetapi mengecil seiring dengan langkah hitungan.
- Skema eksplisit konvergen dan stabil jika

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k}$$



$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{cases} \leq 1/2 \\ \leq 1/4 \\ = 1/6 \end{cases}$$

dapat terjadi oskilasi kesalahan hitungan

tidak terjadi oskilasi kesalahan hitungan

meminimumkan *truncation error*

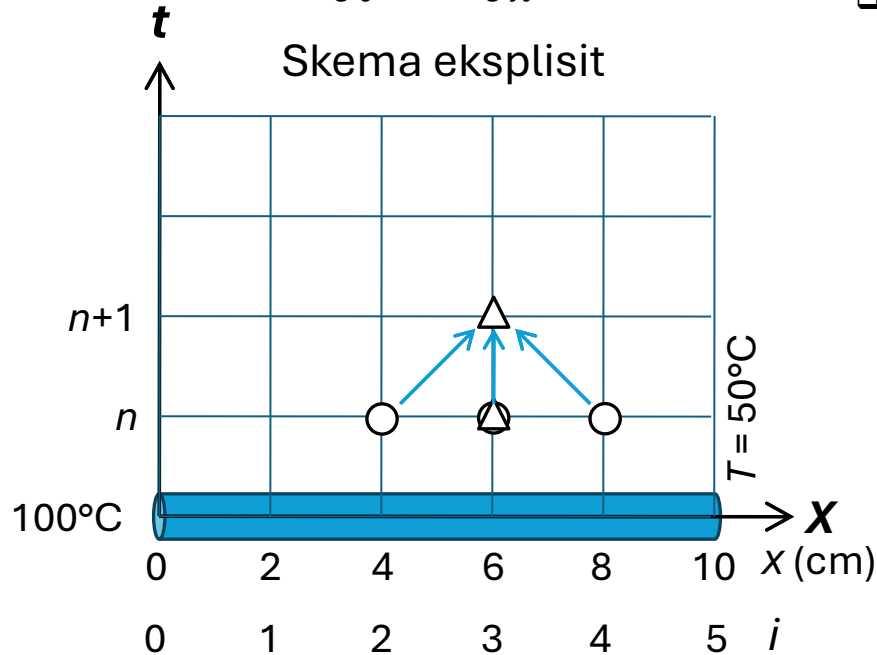
FDA: Skema Eksplisit

- Konvergensi dan stabilitas hitungan
 - untuk mendapatkan akurasi hasil hitungan, dibutuhkan Δx kecil, namun
 - konsekuensi Δx kecil adalah Δt pun harus kecil untuk menjamin konvergensi dan kestabilan hitungan
 - jika Δx dikalikan faktor $\frac{1}{2}$, maka Δt perlu dikalikan faktor $\frac{1}{4}$ untuk mempertahankan konvergensi dan kestabilan hitungan
 - skema eksplisit menjadi mahal, dalam arti beban hitungan bertambah besar

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

FDA: Skema Eksplisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

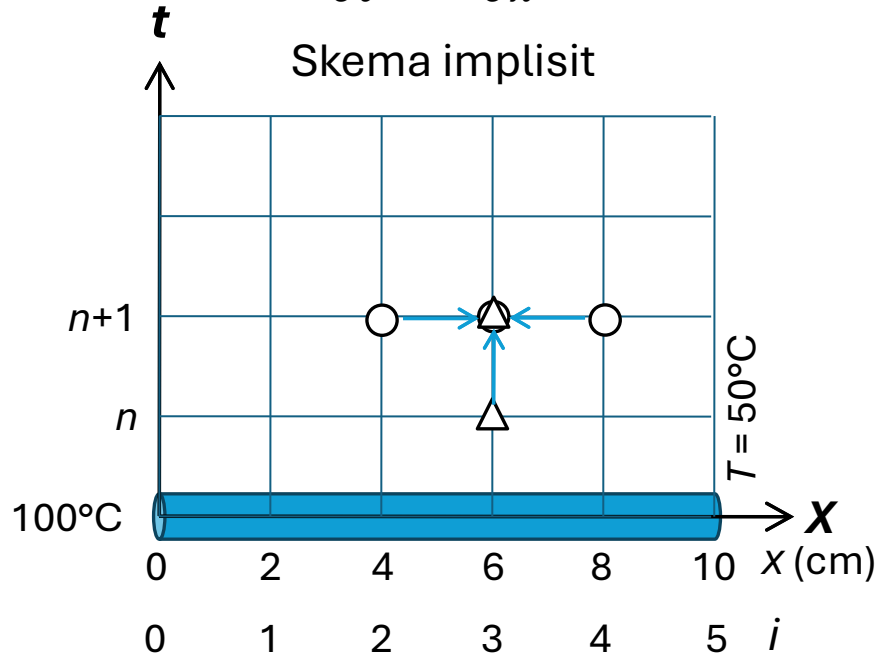


- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - panjang batang, $L = 10$ cm, $\Delta x = 2$ cm
 - *time step*, $\Delta t = 0.1$ s
 - koefisien difusi termal, $k = 0.835$ cm²/s
 - syarat batas $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=10, t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

Hitung dengan skema eksplisit

FDA: Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - panjang batang, $L = 10 \text{ cm}$, $\Delta x = 2 \text{ cm}$
 - *time step*, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$
 - koefisien difusi termal, $k = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$
 - syarat batas $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=10, t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \dots + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

FDA: Skema Implisit

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \quad 1 + 2k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1.04175$$

□ Hitungan pada saat $n+1=1$ atau $t+\Delta t = 0.1$ s

	T_1	T_2	T_3	T_4	
node 1	$+1.04175T_1^1$	$-0.020875T_2^1$			$= T_1^0 + 0.020875T_0$
node 2	$-0.020875T_1^1$	$+1.04175T_2^1$	$-0.020875T_3^1$		$= T_2^0$
node 3		$-0.020875T_2^1$	$+1.04175T_3^1$	$-0.020875T_4^1$	$= T_3^0$
node 4			$-0.020875T_3^1$	$+1.04175T_4^1$	$= T_4^0 + 0.020875T_5$

FDA: Skema Implisit

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\begin{bmatrix} 1.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.041750 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}$$

matriks tridiagonal

- Apabila jumlah persamaan banyak, maka penyelesaian persamaan di atas dilakukan dengan bantuan program komputer
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA), yang dapat diperoleh dari internet

FDA: Skema Implisit

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* Microsoft Excel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.041750 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{Bmatrix}}_{\{\text{RHS}\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1} \{\text{RHS}\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam Microsoft Excel


FDA: Skema Implisit

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan spreadsheet Microsoft Excel adalah sbb.

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{array} \right\} \\ \{T\} \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.960309 & 0.019251 & 0.000386 & 0 \\ 0.019251 & 0.960695 & 0.019259 & 0.000386 \\ 0.000386 & 0.019259 & 0.960695 & 0.019251 \\ 0 & 0.000386 & 0.000386 & 0.960309 \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{array} \right\} \\ \{RHS\} \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 2.004653 \\ 0.040589 \\ 0.020899 \\ 1.002339 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

FDA: Skema Implisit

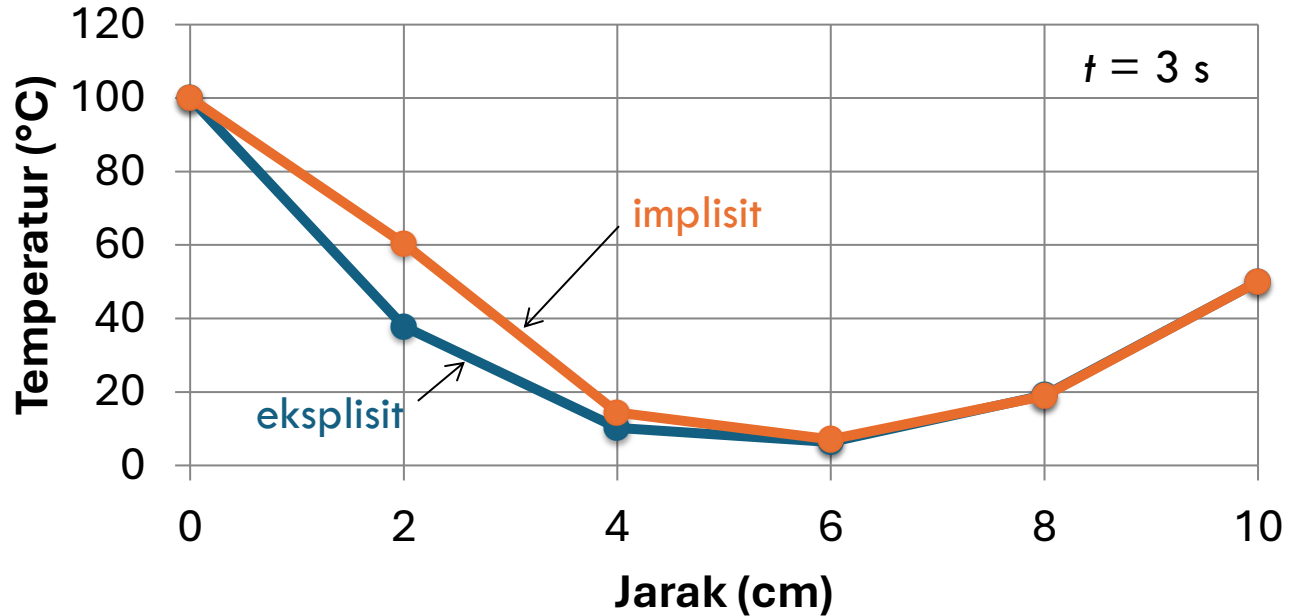
- ▣ Hitungan pada saat $n+1=2$ atau $t+\Delta t = 0.2$ s
 - ▣ Matriks koefisien persamaan [A] tidak berubah
 - ▣ Matriks di sebelah kanan tanda “=” berubah dan merupakan fungsi T pada saat $n=1$

$$\{\text{RHS}\} = \begin{Bmatrix} T_1^1 + 0.020875T_0 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 + 0.020875T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.092153 \\ 0.040589 \\ 0.020899 \\ 2.046089 \end{Bmatrix}$$


$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.960309 & 0.019251 & 0.000386 & 0 \\ 0.019251 & 0.960695 & 0.019259 & 0.000386 \\ 0.000386 & 0.019259 & 0.960695 & 0.019251 \\ 0 & 0.000386 & 0.000386 & 0.960309 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.092153 \\ 0.040589 \\ 0.020899 \\ 2.046089 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.930536 \\ 0.118963 \\ 0.061827 \\ 1.965327 \end{Bmatrix}$$

FDA: Skema Implisit

Konduksi atau perambatan termal hasil hitungan dengan skema implisit tampak lebih cepat daripada hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada $t = 3$ s)



FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

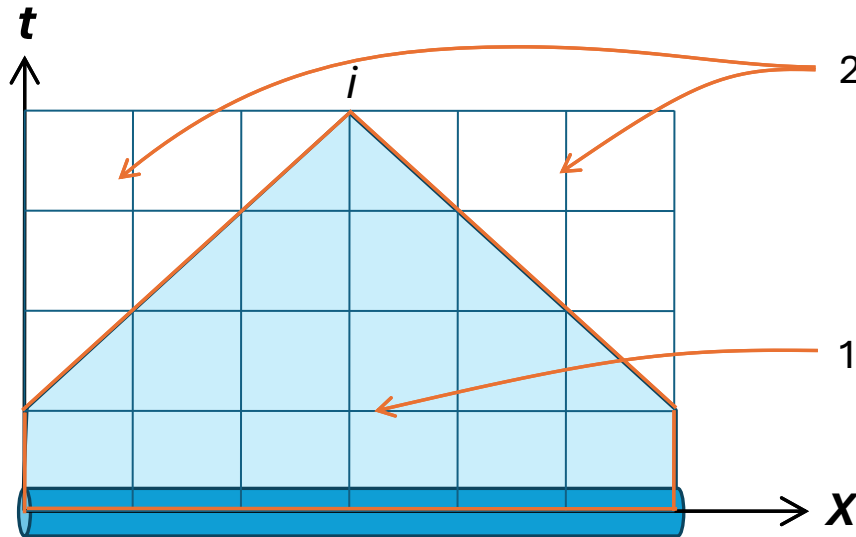
Skema eksplisit

- Persamaan dan teknik penyelesaiannya *straight-forward*, penyelesaian dilakukan *node per node*
- Rentan terhadap konvergensi dan stabilitas hitungan
- *Time step* terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

Skema implisit

- Persamaan dan teknik penyelesaian lebih “rumit”, penyelesaian dilakukan secara simultan untuk semua *node*
- Konvergensi dan stabilitas hitungan lebih mudah dijaga
- *Time step* tidak terkendala oleh konvergensi dan stabilitas hitungan

FDA: Skema Eksplisit dan Implisit



- 1) Saat menghitung T di i , hanya titik-titik hitung (*nodes*) di dalam segitiga ini yang berpengaruh dalam hitungan
- 2) Saat menghitung T di i , titik-titik hitung (*nodes*) di kedua zona ini tidak diperhitungkan, padahal secara fisik, justru node-node di sini berpengaruh thd T di titik i

Skema Eksplisit

FDA: Skema Eksplisit dan Implisit

Skema Implisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

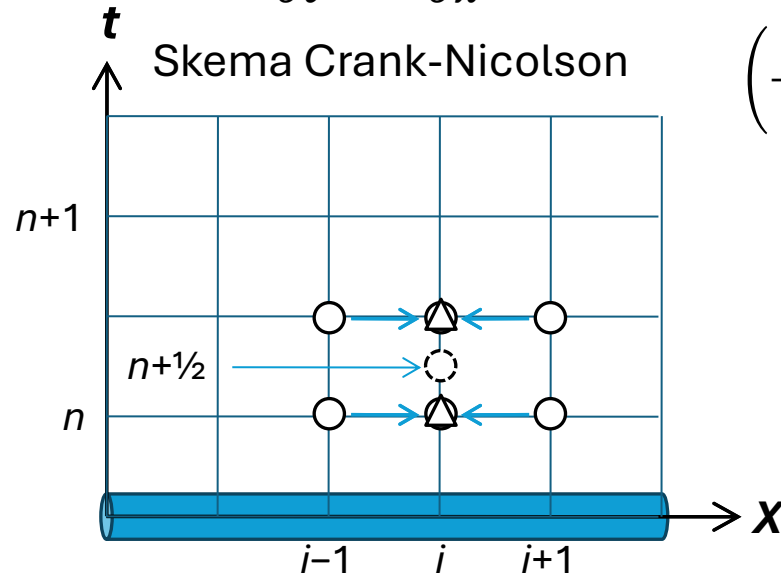
1st order accurate

2nd order accurate

- 1) Skema implisit menjamin konvergensi dan stabilitas hitungan, namun aproksimasi suku derivatif waktu dan suku derivatif ruang memiliki akurasi berbeda
- 2) Skema implisit yang memiliki akurasi yang sama pada aproksimasi suku derivatif waktu dan ruang adalah Metode **Crank-Nicolson**

FDA: Metode Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



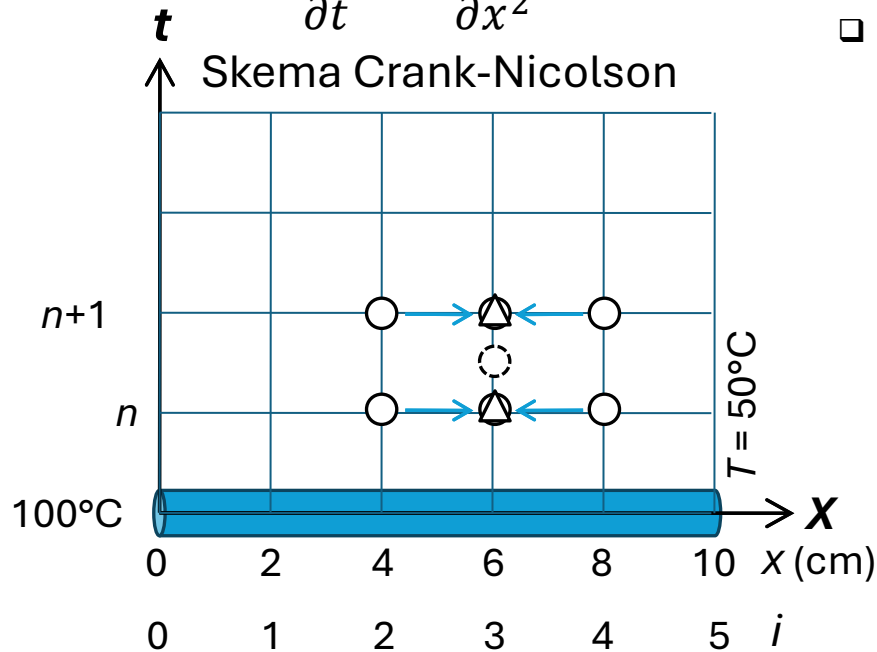
- Bentuk beda hingga persamaan parabolik dengan demikian dapat dituliskan sbb.

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + 2 \left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} =$$

$$\left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^n + 2 \left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^n$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
 - panjang batang, $L = 10$ cm, $\Delta x = 2$ cm
 - *time step*, $\Delta t = 0.1$ s
 - koefisien difusi termal, $k = 0.835$ cm²/s
 - syarat batas $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=10, t) = 50^\circ\text{C}$
 - nilai awal $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + 2 \left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^n + 2 \left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n + \left(k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^n$$

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.020875 \quad 2 \left(1 + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) = 2.04175 \quad 2 \left(1 - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) = 1.95825$$

- Hitungan pada saat $n+1=1$ atau $t+\Delta t = 0.1$ s

	T_1	T_2	T_3	T_4	
node 1	$+2.04175T_1^1$	$-0.020875T_2^1$			= 4.1750
node 2	$-0.020875T_1^1$	$+2.04175T_2^1$	$-0.020875T_3^1$		= 0
node 3		$-0.020875T_2^1$	$+2.04175T_3^1$	$-0.020875T_4^1$	= 0
node 4			$-0.020875T_3^1$	$+2.04175T_4^1$	= 2.0875

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Diperoleh 4 persamaan dengan 4 *unknowns*

$$\begin{bmatrix} 2.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.041750 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{pmatrix}$$

matriks tridiagonal

- Apabila jumlah persamaan banyak, maka penyelesaian dilakukan dengan bantuan program komputer
- Salah satu teknik penyelesaian yang dapat dipakai adalah *tridiagonal matrix algorithm* (TDMA) yang dapat diperoleh dari internet

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Karena hanya 4 persamaan, penyelesaian masih mudah dilakukan dengan bantuan *spreadsheet* Microsoft Excel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2.041750 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.041750 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.041750 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{Bmatrix}}_{\{T\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{Bmatrix}}_{\{RHS\}}$$

$$\{T\} = [A]^{-1} \{RHS\}$$

Gunakan fungsi =MINVERSE(...) dan =MMULT(...) dalam Microsoft Excel

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Penyelesaian persamaan tsb dengan bantuan *spreadsheet* Microsoft Excel adalah sbb.

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{array} \right\} \\ \{T\} \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.489827 & 0.005009 & 0 & 0 \\ 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 & 0 \\ 0 & 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 \\ 0 & 0 & 0.005009 & 0.489827 \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 4.1750 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{array} \right\} \\ \{RHS\} \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 2.045029 \\ 0.021018 \\ 0.010669 \\ 1.022516 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

- Hitungan pada saat $n+1=2$ atau $t+\Delta t = 0.2$ s
 - Matriks koefisien persamaan $[A]$ tidak berubah
 - Matriks di sebelah kanan tanda “=” berubah dan merupakan fungsi T pada saat $n=1$

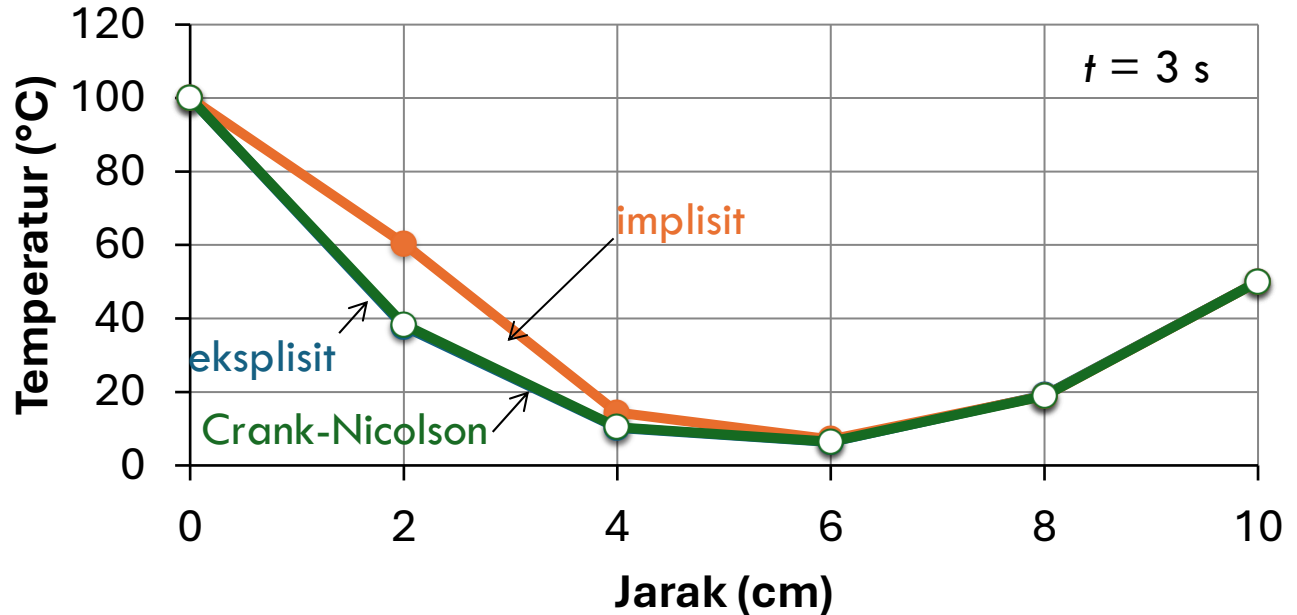
$$\{\text{RHS}\} = \begin{pmatrix} 8.180118 \\ 0.084070 \\ 0.042677 \\ 4.090065 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.489827 & 0.005009 & 0 & 0 \\ 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 & 0 \\ 0 & 0.005009 & 0.489827 & 0.005009 \\ 0 & 0 & 0.005009 & 0.489827 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8.180118 \\ 0.084070 \\ 0.042677 \\ 4.090065 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.007269 \\ 0.082578 \\ 0.042232 \\ 2.003647 \end{pmatrix}$$

FDA: Skema Crank-Nicolson

Konduksi atau perambatan termal hasil hitungan dengan skema Crank-Nicolson tampak mirip dengan hasil hitungan dengan skema eksplisit (pada $t = 3$ s)



FDA: Skema Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



FDA



$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \phi \left(k \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \phi) \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

□ Skema FDA

- $\phi = 0$ skema eksplisit
- $\phi = 1$ skema implisit
- $\phi = 1/2$ skema Crank-Nicolson

FDA Persamaan Parabolik

- Bentuk umum FDA persamaan diferensial parsial parabolik

$$\left(-\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} + \left(-\phi k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i+1}^{n+1} = \left[(1 - \phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_{i-1}^n + \dots$$

$$\left[1 - 2(1 - \phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_i^n + \dots$$

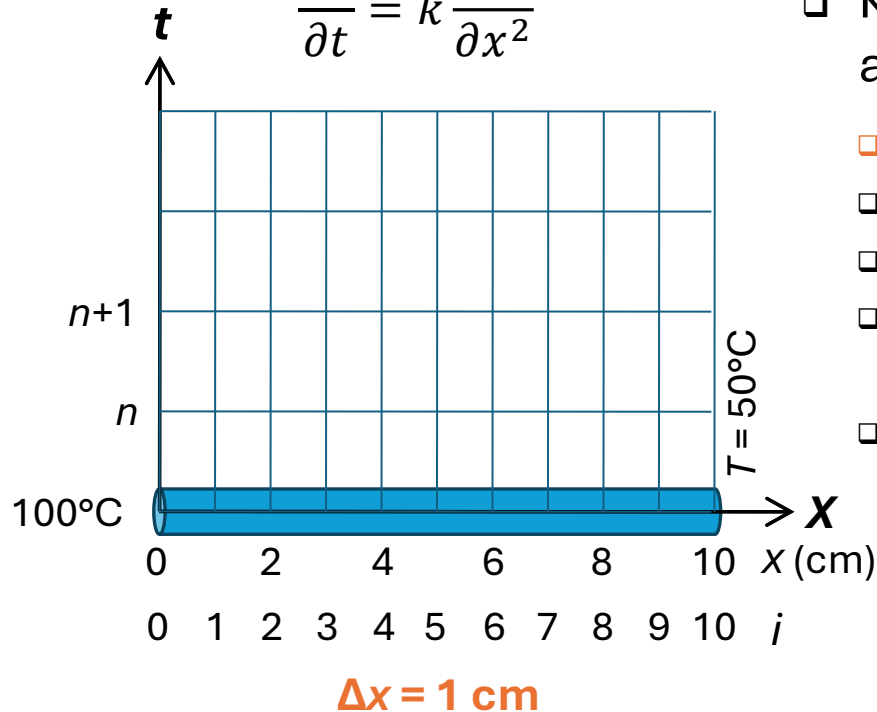
$$\left[(1 - \phi)k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] T_{i+1}^n$$

□ Skema FDA

- $\phi = 0$ skema eksplisit
- $\phi = 1$ skema implisit
- $\phi = \frac{1}{2}$ skema Crank-Nicolson

FDA: Persamaan Parabolik

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- Konduksi termal di sebuah batang aluminium pipih panjang
- panjang batang, $L = 10 \text{ cm}$, $\Delta x = 1 \text{ cm}$ (!!)
- time step, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$
- koefisien difusi termal, $k = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$
- syarat batas $T(x=0, t) = 100^\circ\text{C}$ dan $T(x=10, t) = 50^\circ\text{C}$
- nilai awal $T(x, t=0) = 0^\circ\text{C}$

- Hitung sampai *steady-state condition*
 - Skema eksplisit
 - Skema implisit
 - Skema Crank-Nicolson

PR/
Tugas



Terima kasih